Приложение З.Б1.В.04

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»
в г. Смоленске

Методическое обеспечение дисциплины

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

(НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ)

Смоленск – 2021 г.

Методические материалы составил:

д.т.н., доцент____ ___В.И. Бобков_____
подпись ФИО

«26» июня 2021 г.

Заведующий кафедрой «Высшей математики»:

______________________ д.т.н., доцент __В.И. Бобков_____
подпись ФИО

«28» июня 2021 г.

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»
в г. Смоленске

Методическое обеспечение лекций по дисциплине

ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

(НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ)

Смоленск – 2019 г.

Комплект слайдов к лекциям

Тема 1. Матрицы и определители. Лекции №1-2.

Определение. Матрицей называется таблица чисел вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, стоящие на горизонталях, называются строками матрицы, на вертикалях - столбцами. Сами числа a_{ij}, i - номер строки, j - номер столбца, назовем элементами матрицы.

Обозначаются матрицы большими буквами A, B, C ..., элементы матриц - малыми буквами a_{ij}, b_{ij}, ... , с указанием номера строки и столбца.

Следующие обозначения матриц равносильны по определению:

$$A_{m\times n} \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \|a_{ij}\| \Leftrightarrow (a_{ij})$$

При этом говорят, что матрица имеет размер m x n (m на n).

Если m = n, то матрица A называется квадратной, при m≠n матрица A называется прямоугольной. Матрица A_{mx1} - называется матрицей столбцом, A_{1xn}, - матрицей-строкой. Элементы квадратной матрицы A, числа a_{11}, a_{22},...a_{nn}, образуют главную диагональ матрицы A, числа a_{1n}, $a_{2(n-1)}$,...a_{n1} - побочную диагональ.

Когда все элементы матрицы A_{nxn}, кроме чисел 1, стоящих на главной диагонали, являются нулями, то такую матрицу называют единичной и обозначают

$$E \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Над матрицами, как и над числами, можно совершать следующие операции, вводимые по определению.

A^T называется транспонированной по отношению к матрице A_{mxn} с элементами a_{ij}, если столбцы матрицы A^T являются строками матрицы A, а строки A^T - столбцами матрицы A. Т.е. если $A_{mxn} = (a_{ij})$, то $A^T_{mxn} = (a_{ji})$, i=1,..m, j=1,..n.

Пример.

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Суммой двух матриц A_{mxn}, B_{mxn} - одного размера называется матрица C_{mxn}, того же размера, элементы которой находятся по формуле

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ (i=1, \dots m;\ j= 1, \dots n),$$

как суммы соответствующих элементов матриц A и B, при этом пишут:

$$C \overset{def}{=} A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Пример.

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix};\ B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix};\ C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+1 & 2+3 \\ 3+2 & -1+1 & 1+1 \\ 2+0 & -1+1 & -2+3 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Произведением матрицы A_{mxn} на число k называется матрица C_{mxn}, элементы c_{ij} которой находятся по формуле $c_{ij}= k\cdot a_{ij}$ при этом пишут $C_{mxn} = k\cdot A_{mxn}$

Пример.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix};\ k=2,\ тогда$$

$$C=k\cdot A=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

Противоположной к матрице A_{mxn} называется матрица, обозначаемая (-А), такая что

$$-A\overset{def}{=}(-1)\cdot A$$

Очевидно что:

а) A + (-A) = 0 (сумма матрицы и противоположной к ней есть нулевая матрица)

б) A - B = A + (-B) (разность матриц А и В – это сумма А и противоположной к В матриц)

Произведением матрицы A_{mxn} на матрицу B_{nxk} называется матрица C_{mxk} элементы которой находятся по формуле:

$$c_{i\ell}=a_{i1}\cdot b_{1\ell}+a_{i2}\cdot b_{2\ell}+\ldots+a_{in}\cdot b_{n\ell},\ i=1,...m;\ \ell=1,2,...k.$$

При этом пишут

$$C_{m\times k}\overset{def}{=}A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}$$

Эта операция существует, если число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В

Пример.

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix};\ B_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{2\times 2}=B_{2\times 3}\cdot A_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 1-1\cdot 3+0\cdot 5; & 1\cdot 2-1\cdot 4+0\cdot 6 \\ -1\cdot 1+2\cdot 3+1\cdot 5; & -1\cdot 2+2\cdot 4+1\cdot 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$D_{3\times 3}=A_{3\times 2}\cdot B_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Операция умножения матриц не обладает свойством перестановочности, т.е. $A\cdot B \neq B\cdot A$

Операции над матрицами, введенные выше, обладают следующими свойствами (при выполнении соглашений, оговоренных в определении операций):

1. A + B = B + A
2. A + (B + C) = (A + B) + C
3. $\lambda\cdot(A + B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$
4. $A\cdot(B + C)= A\cdot B + A\cdot C$
5. $(A^T)^T = A$
6. $(A + B)^T = A^T + B^T$
7. $(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$
8. $\lambda\cdot(A\cdot B) = (\lambda\cdot A)\cdot B = A\cdot(\lambda\cdot B)$
9. $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$
10. $A\cdot E = A$, (А - квадратная матрица)
11. $(\lambda\cdot A)^T = \lambda\cdot A^T$
12. $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

Определителем матрицы $A_{1x1} = (a_{11})$, назовем число a_{11}.

Если дана матрица $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то ее определителем второго порядка назовем число, обозначаемое $|A|$ или Δ и вычисляемое по формуле:

$$|A| = \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}\,.$$

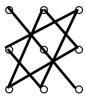
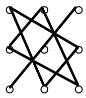
Если же матрица имеет вид

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то ее определителем порядка 3 назовем число, вычисляемое по формуле:

$$\Delta_3 = |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$
$$-(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}),$$

называемой правилом треугольника.
Графически это правило можно изобразить так:

$\Delta_3 = |A| =$  $-$ ,

как разность произведений соединенных элементов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \Delta = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \Delta = 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 0 - \left(2 \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1\right) =$$

$$= -1 + 4 - (-1 + 2) = 2$$

Заметим, что

$$\Delta_3 = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}) + a_{12} \cdot (a_{23} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{33}) +$$
$$+ a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{22}) =$$
$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

тогда по аналогии определитель квадратных матриц порядка выше третьего можно ввести как число, вычисляемое через определители более низкого порядка.

Если дана квадратная матрица A_{4x4}, то *минором* M_{ij} элемента a_{ij} этой матрицы называется определитель порядка 3, полученный из матрицы A, вычеркиванием i - строки и j - столбца.

Пример.

$$A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Очевидно, что у матрицы A_{4x4} имеется 4^2 миноров порядка 3.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A называется число A_{ij}, вычисляемое по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Ясно, что если i+j - четное число, то знаки дополнения и минора одинаковы, если i+j - нечетное число, то знаки противоположны.

Назовем определителем матрицы A_{4x4} число Δ_4, вычисляемое как сумма произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\Delta_4 = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + a_{i4} \cdot A_{i4} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} \cdot A_{ik} \qquad (1)$$

или

$$\Delta_4 = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j} + a_{4j} \cdot A_{4j} = \sum_{k=1}^{4} a_{kj} \cdot A_{kj} \qquad (2)$$

Формула (1) называется разложением определителя по строке, а (2) – разложением по столбцу.

Все сказанное для матрицы A_{4x4} по аналогии можно перенести на случай матрицы A_{nxn}. Определителем этой матрицы назовем число Δ_n, вычисляемое по формуле

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{ki} \text{ (разложение по столбцу i)}$$

или

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot A_{jk} \text{ (разложение по строке j).}$$

При этом алгебраические дополнения и миноры определяются как и ранее.

Свойства определителей.

1) Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ: Свойство очевидно, если применить разложение определителя по нулевой строке (столбцу).

2) Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число k, то ее определитель умножится на это же число.

$$\begin{vmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot a_{11} \cdot A_{11} + \lambda \cdot a_{12} \cdot A_{12} + \ldots \lambda \cdot a_{1n} \cdot A_{1n} =$$

$$= \lambda \cdot (a_{11} \cdot A_{11} + \cdot a_{12} \cdot A_{12} + \ldots \cdot a_{1n} \cdot A_{1n}) = \lambda \cdot \Delta$$

3) При транспонировании матрицы ее определитель не изменится

$$|A^T| = |A|.$$

4) При перестановке двух строк (столбцов) матрицы местами ее определитель меняет знак на противоположный.

5) Если квадратная матрица имеет две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю. С одной стороны, если переставить две одинаковые строки (столбца), то ее определитель не изменится, с другой стороны по свойству (4) – изменит знак, тогда $\Delta = - \Delta$, значит $\Delta = 0$.

6) Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю. Это свойство следует из свойств (2) и (5).

7) Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, т.е.

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot A_{jl} = 0, i \neq j \,.$$

Пусть дана матрица А, у которой i и j строки (столбцы) одинаковы, тогда по свойству (5) определитель этой матрицы равен нулю, раскладывая определитель по строке j (или столбцу) получаем, что и требовалось доказать

ЗАМЕЧАНИЕ

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot A_{jl} = \begin{cases} |A|, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

8) Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) добавить элементы другой строки (столбца) помноженные на число.

9) Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей т.е.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Перечисленные свойства используются для вычисления определителей высоких порядков. Для этого, используя свойства 1-9 , матрица преобразуется так, чтобы в какой-либо строке (столбце) было как можно больше нулей, а затем вычисляется определитель полученной матрицы разложением по этой строке (столбцу).

Пример.

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+2\cdot 4 & 6-2\cdot 2 & -2 & 4 \\ 1+3\cdot 4 & 2-3\cdot 2 & -3 & 1 \\ 4-4 & -2+1\cdot 2 & 1 & 0 \\ 6-4\cdot 4 & 4+2\cdot 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12-2\cdot 6 & 2 & -2\cdot 2+4 \\ 13+4\cdot 6 & -4 & +2\cdot 4+1 \\ -10-12\cdot 6 & 12 & -24+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 37 & -4 & 9 \\ -82 & 12 & -18 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 37 & 9 \\ -82 & -18 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 9\cdot\begin{vmatrix} 37 & 1 \\ -82 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 9\cdot(-74+82) = -144$$

Здесь сначала к элементам 1 и 2 столбцов добавили элементы 3 столбца помноженные на (-4) и (2) соответственно, затем разложили определитель по третьей строке, аналогично поступили с определителем третьего порядка скомбинировав 1 и 2 строки, и 2 и 3 строки, в определителе второго порядка общий множитель второго столбца вынесли и вычислили полученный определитель второго порядка.

Обратная матрица, ее свойства

Пусть A_{nxn} квадратная матрица размера n на n. Обратной к матрице А называется матрица, обозначается A^{-1}, (А в минус первой степени), такая что

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E.$$

Назовем матрицу А невырожденной, если det A=$|A| \neq 0$.

Справедлива следующая теорема – критерий существования обратной матрицы.

Теорема. Для того чтобы матрица А имела обратную матрицу A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы матрица А была невырожденной ($|A| \neq 0$)

Доказательство.

Необходимость. Пусть существует A^{-1}. Тогда

$$A^{-1}\cdot A \overset{def}{=} E$$

По свойству (9) определителя имеем

$$\left|A^{-1}\cdot A\right| = \left|A^{-1}\right|\cdot|A| = |E| = 1 \Rightarrow |A| = \frac{1}{\left|A^{-1}\right|} \neq 0$$

Достаточность. Пусть $|A| \neq 0$; тогда для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можно составить матрицу из алгебраических дополнений вида:

$$A^* = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

здесь алгебраические дополнения строк стоят в столбцах.

Перемножив А на А*, получим

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A\cdot A^* = \frac{1}{\Delta}\cdot(a_{i1}\cdot A_{j1} + a_{i2}\cdot A_{j2} + a_{i3}\cdot A_{31} + \ldots + a_{in}\cdot A_{jn}) = \begin{cases} \frac{\Delta}{\Delta} = 1, i = j\ (\text{–‰”Ћ–‰”}\ 7) \\ 0, i \neq j\ (\text{–‰”Ћ–‰”}\ 7) \end{cases}$$

Значит, $A\cdot A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=E$, то есть $A^*=A^{-1}$.

Пример.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix};\ \Delta=-2;\ A^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица единственна в силу следующей теоремы.

Теорема. Если существует обратная матрица, то она единственна.

Доказательство. Пусть существуют две обратные матрицы X и У, тогда по определению $X\cdot A = E$ и $У\cdot A = E$. Если каждое равенство умножить на A^{-1} справа, то получим

$$\begin{aligned}X\cdot A\cdot A^{-1}&=E\cdot A^{-1}=A^{-1}\Rightarrow\\ Y\cdot A\cdot A^{-1}&=E\cdot A^{-1}=A^{-1}\Rightarrow\end{aligned}\quad т.к.\ A\cdot A^{-1}=E\Rightarrow \text{ имеем, что}$$

$$\begin{aligned}X\cdot E=X=A^{-1}\\ Y\cdot E=X=A^{-1}\end{aligned}\Rightarrow X=Y=A^{-1}$$,значит *единственность доказана*

Обратная матрица обладает следующими свойствами:

1) $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$;

2) $(A^{-1})^{-1}=A$;

3) $(\underbrace{A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot\ldots\cdot A^{-1}}_{m})=(A^{-1})^m$

4) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

Докажем свойства 4 и 2.

4) Пусть $X = B^{-1}\cdot A^{-1}$. Тогда $X\cdot A = B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A = B^{-1}$, умножив справа на B имеем $X\cdot A\cdot B = B^{-1}\cdot B = E$. То есть $X\cdot(A\cdot B) = E \Rightarrow B^{-1}\cdot A^{-1} = (A\cdot B)^{-1}$ по определению.

2) Пусть $X = (A^{-1})^{-1}$. Тогда $X\cdot A^{-1}=(A^{-1})^{-1}\cdot A^{-1}=(A\cdot A^{-1})^{-1}=(E^{-1})^{-1}=E$. То есть $X\cdot A^{-1} = E$, значит, $X = A = (A^{-1})^{-1}$.

Матричные уравнения, их решения

Пусть A_{nxn} – квадратная матрица, X_{nxk} - матрица с неизвестными элементами, B_{nxk} - матрица с известными элементами, тогда уравнение вида

$$A_{nxn}\cdot X_{nxk}=B_{nxk}$$

называется *матричным уравнением*

Если матрица A невырождена, то для нее существует A^{-1} такая, что $A^{-1}\cdot A = E$. Используя это, можно решить матричное уравнение так:

$$A\cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \Leftrightarrow E\cdot X = A^{-1}\cdot B,\ \text{т.е.}$$

$$\boxed{X = A^{-1}\cdot B}$$

Если же матричное уравнение имеет вид $X_{kxn}\cdot A_{nxn} = B_{kxn}$, то схема решения такова:

$$X\cdot A\cdot A^{-1} = B\cdot A^{-1} \Leftrightarrow X = B\cdot A^{-1}$$

Пример.

$$\begin{cases}x_1+2\cdot x_2=1\\ x_1-x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow A\cdot X=B\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B;\ A^{-1}=\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix}-1&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&2/3\\1/3&-1/3\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1/3&2/3\\1/3&-1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}$$

Ранг матрицы, его свойства и вычисление. Системы линейных уравнений

Рассмотрим прямоугольную матрицу $A_{m\times n}$.

Определение.

Минором матрицы A k-го порядка называется любой определитель, составленный из элементов матрицы A, состоящих на пересечении k строк и k столбцов, где $k \le \min(m,n)$.

Пример.

$$A_{3\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У этой матрицы миноры первого порядка это: $M^1 = \{1, 2, 3, 4, \ldots 10, 0\}$,

второго порядка – $M^2 = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}; \ldots \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \ldots \right\}$,

третьего порядка – $M^3 = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \ldots \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \ldots \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \ldots \right\}$.

При этом так как $k \le \min(3, 5)$, то $k = 3$.

Определение.

Рангом матрицы называется число равное наивысшему порядку миноров этой матрицы, отличных от нуля. Обозначение ранга $Rg(A) \Leftrightarrow rang(A) \Leftrightarrow r(A)$.

Для рассмотренной выше матрицы A_{3x5} ранг равен 3. Действительно $r(A_{3\times5}) = 3$, так как существует

$$M^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -5 \ne 0.$$

Свойства ранга.

Ранг матрицы не изменяется:

1) При транспонировании;
2) При перестановке строк или столбцов местами;
3) При отбрасывании строки или столбца из нулей;
4) При умножении строки или столбца на число не равное нулю;
5) При удалении строки или столбца, являющегося линейной комбинацией других строк (столбцов);
6) При добавлении к строке или столбцу линейной комбинации других строк или столбцов.

Преобразования не изменяющие ранга матрицы называются эквивалентными, и матрицы, получающиеся при таких преобразованиях, называются эквивалентными также.

Обозначения эквивалентных матриц таково $A \sim B$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В литературе эквивалентные преобразования могут называться элементарными преобразованиями. Используя эквивалентные преобразования ранг матрицы может быть определен сведением ее к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2k} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rk} \end{pmatrix}, \quad a_{ii} \ne 0,\ i=1,2,\ldots r,\ r \le k.$$

Пример.

$$A_{4\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -21 & 7 \end{pmatrix},$$

тогда существует $M^3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -21 \end{vmatrix} = -84 \neq 0$, значит r(A)=3.

Тема 2. Системы линейных уравнений. Лекции №3-4.

Назовем *системой линейных уравнений* (СЛУ) систему вида

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \text{-------------------------------} \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases} (1) \Leftrightarrow A \cdot X = B \quad (2)$$

где a_{ij} – известные коэффициенты, x_i – неизвестные переменные, b_i – известные свободные члены,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Решением системы называется такой набор чисел ($\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$), который после подстановки вместо существующих неизвестных (x_1, x_2, ...x_n) обращает каждое уравнение в верное равенство.

Если такой набор чисел существует, то говорят что система (1) или (2) совместна, если нет - то не совместна.

Расширенной матрицей для систем (1) или (2) называют матрицу, составленную из элементов матриц A и B следующего вида:

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Имеется теорема позволяющая судить о существовании решения систем вида (1) или (2).

Теорема. (Кронеккера - Капелли).

Для существования решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы A равнялся рангу расширенной матрицы A_p ($r(A) = r(A_p)$).

ЗАМЕЧАНИЕ

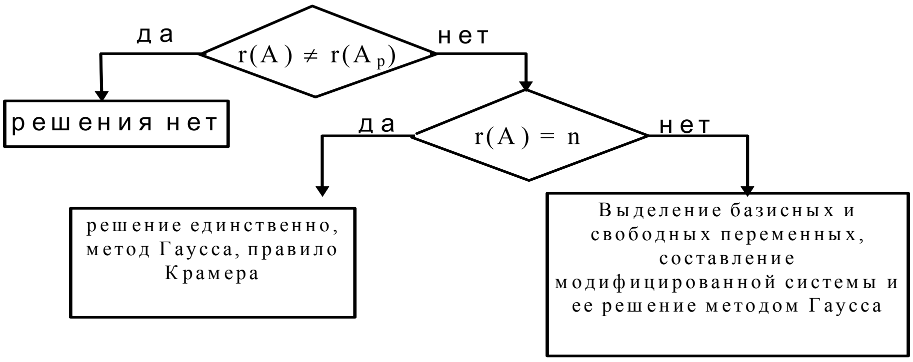
1) Если $r(A)\neq r(A_p)$, то система (1) несовместна

2) Если $r(A) = r(A_p)$, то система (1) совместна, причем решение системы единственно, если $r(A) = r(A_p) = n$ – числу неизвестных, если же $r(A) = r(A_p) < n$, то система имеет бесконечное множество решений.

Алгоритм применения теоремы к решению СЛУ (систем линейных уравнений)

1) Вычисляем $r(A)$ и $r(A_p)$ и сравниваем их
2) Если $r(A) \neq r(A_p)$, то решения СЛУ нет
3) Если $r(A) = r(A_p)$, то проверяем справедливость равенства $r(A) = r(A_p) = n$
4) Если равенство выполняется, то для нахождения единственного решения применяют метод Гаусса или правило Крамера.
5) Если равенство не выполняется ($r(A) = r(A_p) < n$), то перестановкой строк (столбцов) матрицы A находят любой, отличный от нуля минор (базисный минор) так, чтобы в СЛУ первыми стояли r строк базисного минора. При этом (m-r) оставшихся строк системы можно отбросить как не влияющих на решение системы, а (n-r) столбцов с соответствующими неизвестными можно перенести в правую часть системы, задав произвольным образом свободные переменные x_j. Полученную систему r уравнений с r неизвестными можно решить к примеру методом Гаусса.

Графическое изображение алгоритма



Среди СЛУ особое место занимают однородные системы линейных уравнений (ОСЛУ)

$$A_{mxn} \cdot X_{nx1} = 0 \qquad (3)$$

Решение ОСЛУ всегда существует , т.к. $r(A) = r(A_p)$. Если $m = n$, а определитель $|A| \neq 0$, то система (3) имеет нулевое (тривиальное) решение. Не нулевые решение системы (3) возможны тогда и только тогда, когда $r(A)<n$, при этом решений бесчисленное множество. Найти это множество решений можно используя понятие базисных и свободных переменных (см. Теорему Кронеккера-Капелли).

Правило Крамера, метод Гаусса

Для решения СЛУ с квадратной матрицей $A_{n\times n}$ применимо правило Крамера.

Теорема

Если для СЛУ $A \cdot X = B$ матрица A невырождена, то решение системы может быть найдено по правилу Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ j = 1,2,...n$$

Здесь $\Delta = |A|$, Δ_j - определитель матрицы, полученной из матрицы А заменой j - столбца столбцом свободных членов.
Пример.

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; |A| = -3,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

то есть решение $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{3};\ x_2 = \frac{1}{3}$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Для решения СЛУ с матрицей А размера выше 4 метод Крамера не стоит применять, т.к. число операций при применении этого метода имеет порядок n!, т.е. быстро растет с порядком системы. ($n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... 3 \cdot 2 \cdot 1$, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$).

При решении СЛУ высокого порядка лучше применять метод Гаусса. Суть метода Гаусса состоит в том, что при помощи преобразований, не нарушающих равносильности, исходная система сводится к треугольному виду.

Пример.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{a}_{11} \cdot x_1 + \tilde{a}_{12} \cdot x_2 + \tilde{a}_{13} \cdot x_3 = \tilde{b}_1 \\ 0 + \tilde{a}_{22} \cdot x_2 + \tilde{a}_{23} \cdot x_3 = \tilde{b}_2 \\ 0 + 0 + \tilde{a}_{33} \cdot x_3 = \tilde{b}_3 \end{cases}$$

Переход к равносильной треугольной системе называют прямым ходом метода Гаусса. Выражая из треугольной системы $x_3 = -\frac{\tilde{b}_3}{\tilde{a}_{33}}$, затем $x_2 = \frac{1}{\tilde{a}_{22}} \cdot (\tilde{b}_2 - \tilde{a}_{23} \cdot \tilde{x}_3)$, затем

$x_1 = \frac{1}{\tilde{a}_{11}} \cdot (\tilde{b}_1 - \tilde{a}_{12} \cdot \tilde{x}_2 - \tilde{a}_{13} \cdot \tilde{x}_3)$, то есть выполняя обратный ход метода Гаусса, легко находим решение системы.

Равносильные преобразования в методе Гаусса - это линейные комбинации строк матрицы.

Для иллюстрации метода Гаусса рассмотрим примеры.

Пример.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Шаг 1. Делим коэффициенты первого уравнения на коэффициент $a_{11} \neq 0$, при этом получается равносильная система уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - \tfrac{3}{2} x_2 + 2x_3 + \tfrac{1}{2} x_4 = \tfrac{1}{2} \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Шаг 2. На месте 2 и 3 уравнений поставим сумму 1-го уравнения, умноженного на (-1), и 2,3- уравнений. На месте 4-го уравнения сумму 1-ой строки, умноженную на (-2), и 4-ой строки. Для краткости записей воспользуемся понятием расширенной матрицы и эквивалентных преобразований

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\tfrac{3}{2} & 2 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\tfrac{3}{2} & 2 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ 0 & +\tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{3}{2} & \tfrac{3}{2} \\ 0 & \tfrac{7}{2} & -5 & +\tfrac{3}{2} & \tfrac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim$$

Т. к. во 2, 3, 4 уравнениях неизвестное x_1- исключено, то применим схему приведенную выше для исключения неизвестных в системе, состоящей из 2, 3, 4 уравнений. Для этого вторую строку разделим на 1/2, на месте 3, поставим сумму элементов 2 строки, умноженную на (-7/2), и 3-й строки на месте 4-ой строки сумму элементов 2 строки умноженную на (-1) и 4 строки.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\tfrac{3}{2} & 2 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -4 \end{array}\right) \sim$$

Исключая неизвестные в 3 и 4 уравнениях по той же схеме завершим прямой ход метода Гаусса.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\tfrac{3}{2} & 2 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\tfrac{12}{5} & \tfrac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & +\tfrac{18}{5} & -\tfrac{13}{5} \end{array}\right)$$

Используя обратный ход метода Гаусса, имеем:

$$x_4 = -\frac{13}{18},$$

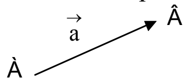
$$x_3 = \frac{7}{5} - \frac{12}{5} \cdot \frac{13}{18} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = 3 - 3 \cdot \frac{13}{18} = \frac{5}{6}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{13}{36} = \frac{25}{9}$$

Тема 3. **Аналитическая геометрия. Лекции №5-6**

Вектором называется направленный отрезок, обозначаемый $\vec{a}$ или $\vec{AB}$.



Точка A – начало вектора, точка B – конец.

Если начало и конец вектора совпадают, то говорят что имеется нулевой $\vec{0}$ вектор.

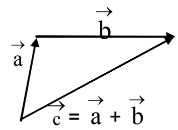
Длинной вектора $\vec{a}$ (модулем) называется число, равное длине отрезка AB. Это число обозначают $|\vec{a}|$ или $|\vec{AB}|$. Очевидно что $|\vec{0}|=0$, направление его произвольно.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называют ***коллинеарными***.

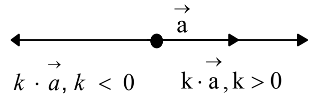
Векторы, лежащие в одной плоскости или на параллельных плоскостях называют ***компланарными***.

Над векторами можно совершать операции, вводимые по определению.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец совпадает с концом вектора $\vec{b}$, при этом конец вектора $\vec{a}$ и начало вектора $\vec{b}$ - совмещены (правило треугольника)



Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называют вектор $\vec{c} = \lambda\cdot\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{c}|=|k|\cdot|\vec{a}|$ и направление как у вектора $\vec{a}$, если k > 0, и противоположное направление, если к < 0.

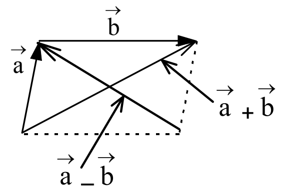


Противоположным к вектору $\vec{a}$ называют вектор

$-\vec{a} = (-1)\cdot\vec{a}$ (произведению числа (-1) на вектор $\vec{a}$). Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это сумма вектора $\vec{a}$ и $-\vec{b}$

ЗАМЕЧАНИЕ

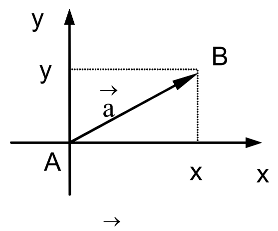
Если сумма $\vec{a} + \vec{b}$ – одна диагональ параллелограмма, то разность $(\vec{a} - \vec{b})$ – другая диагональ.



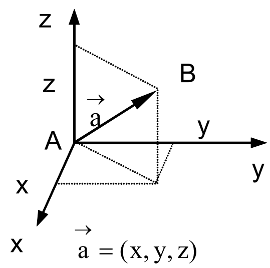
Координатами вектора $\vec{a}$ назовем координаты его конечной точки при условии, что начало совпадает с началом координат.

К примеру в декартовой прямоугольной системе координат имеем

Наплоскости в пространстве



$\vec{a} = (x, y)$



$\vec{a} = (x, y, z)$

Сумма, разность и произведение вектора на число в координатной форме выглядят так

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)$, $\vec{b} = \lambda\cdot\vec{a} = (\lambda\cdot x_1,\ \lambda\cdot y_1,\ \lambda\cdot z_1)$, здесь $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

В декартовой прямоугольной системе координат очевидно что длина вектора $\vec{a}$ (модуль $|\vec{a}|$) вычисляется по формулам:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 0^2} \text{ или } |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

как корень квадратный из суммы квадратов координат.

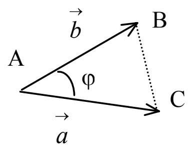
Скалярное, векторное и смешанное произведения

Для векторов можно ввести по определению понятия скалярного, векторного и смешанного произведений.

Определение.

Скалярным произведением $(\vec{a}, \vec{b})$ двух векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ называют число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,$$



Если векторы заданы в координатной форме, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},\ |\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2},\ \cos\varphi = \frac{-|\vec{BC}|^2 + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}{2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

здесь использована теорема косинусов.

Так как $|\vec{BC}|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$, то

$$(\bar{a}\cdot\bar{b}) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\frac{-(x_1-x_2)^2 - (y_1-y_2)^2 - (z_1-z_2)^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}{2|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} \Rightarrow$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2.$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов. Косинус угла между векторами можно вычислить так

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
2) $(\vec{a}, \vec{a}) = |a|^2$;
3) $(\vec{a}, \lambda\cdot\vec{c} + \beta\cdot\vec{b}) = \lambda\cdot(\vec{a}, \vec{c}) + \beta\cdot(\vec{a}, \vec{b})$;
4) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, если $|\vec{a}| = 0$ или $|\vec{b}| = 0$ или $\vec{a} \perp \vec{b}$.

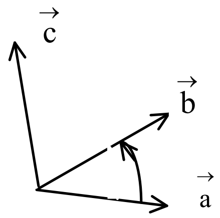
Определение.

Векторным произведением $[\vec{a}, \vec{b}]$ двух векторов $\vec{a}, \vec{b}$ называют вектор $\vec{c}$ такой, что

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$

3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку, т.е. с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден против часовой стрелки



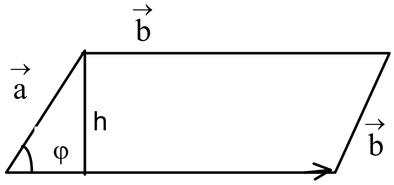
Свойства векторного произведения.

1) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$

2) $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda \cdot [\vec{a}, \vec{b}]$

3) $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$

4) Геометрический смысл векторного произведения: модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$



$h = |\vec{a}| \cdot \sin\varphi$, $S = h \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ т.е. $S = |[\vec{a}, \vec{b}]|$

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ заданы в координатной форме $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то векторное произведение в координатной форме вычисляют так:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix};$$

при этом подразумевается декартова прямоугольная система координат.

Пример.

Заданы $\vec{a} = (1,0,-1)$, $\vec{b} = (1,2,1)$. Найти косинус угла между векторами и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot y_2 + y_1 . y_2 + z_1 \cdot z_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1 \cdot 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = 0, \varphi = 90°$$

$$S = |[\vec{a}, \vec{b}]| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right| \Rightarrow$$

$$S = |2 \cdot i - 2j + 2k| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}.$$

Определение.

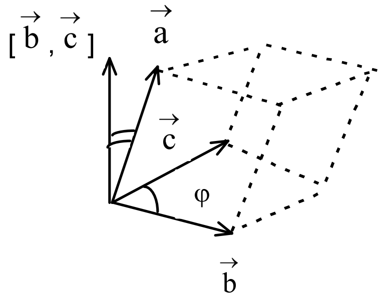
Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называют число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение $[\vec{b}, \vec{c}]$, и обозначаемое $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Т.е. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \stackrel{dcf}{=} \left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right)$.

Отметим, что модуль $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ вычисляется так:

$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |\vec{a}| \cdot |[\vec{b}, \vec{c}]| \cdot \cos(\vec{a} \,\hat{}\, [\vec{b}, \vec{c}])$.

Так как $|[\vec{b}, \vec{c}]|$- площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}, \vec{c}$, вектор $[\vec{b}, \vec{c}]$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а значит $|\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \,\hat{}\, [\vec{b}, \vec{c}])$- это высота параллелепипеда построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.Поэтому смысл модуля смешанного произведения – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



В силу свойств скалярного и векторного произведений

1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$

2) $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$

Если векторы заданы в координатной форме, то $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ можно вычислять по формуле:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Полезно знать следующие теоремы о коллинеарности и компланарности векторов.

Теорема (критерий коллинеарности векторов).

Для того, чтобы векторы $\vec{a}, \vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось 0.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ - коллинеарны⇒ они параллельны⇒ угол $\varphi = \vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}$ или равен 0 или π радиан. Тогда $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = 0$. Что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть $[\vec{a}, \vec{b}] = 0 \Rightarrow$ Либо $|\vec{a}| = 0$, либо $|\vec{b}| = 0$, либо $\sin(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}) = 0$. Если $|\vec{a}| = 0 \Rightarrow \vec{a}$ -нулевой вектор, значит он коллинеарен любому вектору, аналогично для случая $|\vec{b}| = 0$. Если же $\sin(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}) = 0$, то либо $\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b} = 0$, либо $\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b} = \pi \Rightarrow \vec{a}$ параллелен $\vec{b}$.

Теорема (о компланарности векторов).

Для того, чтобы векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение этих векторов равнялось 0.

Необходимость. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны, т.е. лежат в одной плоскости. Тогда $[\vec{b}, \vec{c}]$ перпендикулярен плоскости в которой лежат эти векторы, а значит cos($\vec{a}$ ^[$\vec{b}, \vec{c}$])=0. Поэтому $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |\vec{a}| \cdot |[\vec{b}, \vec{c}]| \cdot \cos(\vec{a}$ ^[$\vec{b}, \vec{c}$])=0/

Достаточность. Пусть $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})=0$ Тогда имеем либо $\vec{a} \perp [\vec{b}, \vec{c}]$, это означает ,что вектор $\vec{a}$ компланарен $\vec{b}, \vec{c}$,

либо $\vec{a}=0$, но нулевой вектор всегда компланарен $\vec{b}, \vec{c}$,

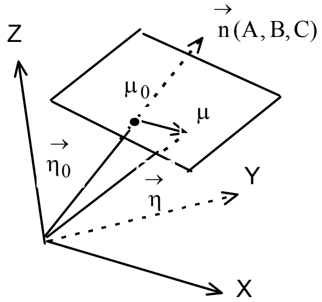
либо $\vec{b}=0$, а значит компланарен $\vec{a}$ и $\vec{c}$,

либо $\vec{c}=0$, а значит компланарен $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Плоскость, уравнения плоскости

Определение.

Алгебраическое уравнение первого порядка Ax+By+Cz+D=0 называют общим уравнением плоскости.
Из того, что любой вектор лежащий в плоскости перпендикулярен вектору нормальному к плоскости, получим разные виды уравнений плоскости, использовав скалярное произведение векторов.



Если μ_0 (x_0,y_0,z_0)- фиксированная точка плоскости, $\mu(x,y,z)$- произвольная точка плоскости, то любой вектор лежащий в плоскости $\overrightarrow{\mu_0\mu}$ можно найти как $\overrightarrow{\mu_0\mu} = \vec{\eta} - \vec{\eta}_0$.

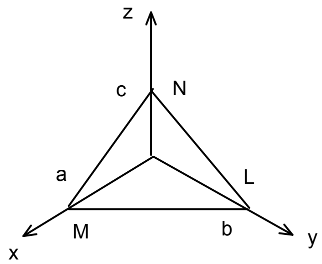
Тогда так как $\vec{n}$ (A,B,C)$\perp \overrightarrow{\mu_0\mu}$ имеем векторное уравнение плоскости $(\vec{n}, \vec{\eta} - \vec{\eta}_0)=0$

В координатной форме это скалярное произведение выглядит следующим образом:

$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0$

и называется уравнением плоскости, проходящей через точку $\mu_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}$ (A,B,C), при этом коэффициент D в общем уравнении плоскости легко вычисляется по формуле $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Если плоскость проходит отсекая на осях координат отрезки а,в,с, то в этом случае имеется уравнение плоскости в "отрезках" $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

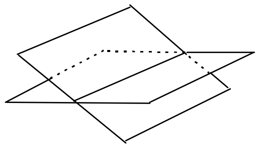


Для нахождения расстояния от точки $\mu_1(x_1,y_1,z_1)$ до плоскости Ax+By+Cz+D=0, заданной общим уравнением, достаточно применить формулу

$$d=\frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Прямая, уравнения прямой

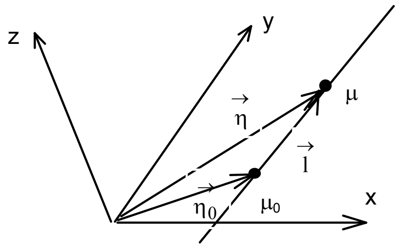
Прямую можно единственным образом задать пересечением двух плоскостей, а значит системой двух уравне-



ний: $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{cases}$

Если прямая проходит через точку $\mu_0(x_0,y_0,z_0)$ и выбран вектор $\vec{l}\left(m,p,n\right)$ - направляющий вектор прямой, то любой вектор на прямой $\overrightarrow{\mu_0\mu}\left(x-x_0,y-y_0,z-z_0\right)$ коллинеарен вектору $\vec{l}$.

Если $\overrightarrow{\mu_0\mu}=\vec{\eta}-\vec{\eta}_0$, то легко получить векторное уравнение прямой $\left[\vec{\eta}-\vec{\eta}_0,\vec{l}\right]=0$



Записав это произведение в координатной форме $\begin{vmatrix} i & j & k \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0$, придем к каноническим уравнениям прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$,

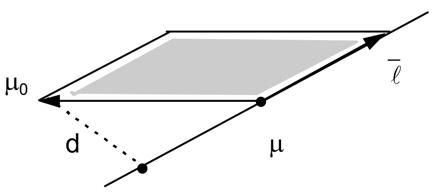
используя тот факт, если определитель равен 0, то его строки пропорциональны.

Приравняв каждую дробь в приведенных выше соотношениях параметру $t(-\infty<t<+\infty)$, получим параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x=x_0+m\cdot t \\ y=y_0+n\cdot t \qquad -\infty<t<+\infty \\ z=z_0+p\cdot t \end{cases}$$

Расстояние от точки μ_0 до прямой с направляющим вектором $\vec{l}$ легко найти соединив т. μ_0 с любой точкой μ, лежащей на прямой, и применив формулу

$$d=\frac{\left|\left[\overrightarrow{\mu\mu_0},\vec{l}\right]\right|}{\left|\vec{l}\right|}$$



где d - высота параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{\mu\mu_0}$ и $\bar{\ell}$. Эта формула в координатной форме имеет вид:

$$d=\frac{\left|i\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0\\ n & p\end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} x-x_0 & z-z_0\\ m & p\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0\\ n & p\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Кривые второго порядка

Определение. Линией второго порядка на плоскости называется геометрическое место точек плоскости с координатами (x,y), удовлетворяющими уравнению второго порядка вида $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$(A,B,C,D,E,F- константы).

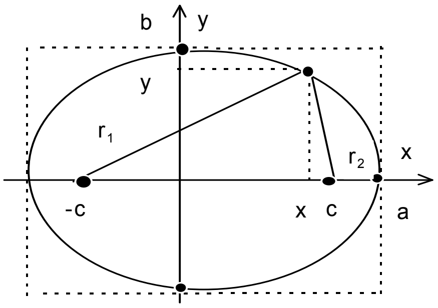
Пример.

$x^2+xy+y^2+3x+1=0$ - уравнение линии второго порядка.

Среди кривых (линий) второго порядка наиболее часто на практике употребляются следующие: эллипс, гипербола и парабола.

Определение.

Эллипсом называется г. м. т. плоскости, каждая из которых такова, что сумма расстояний от нее до точек $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ (фокусов) постоянна и равна 2a(c<a,a>0,c>0).



Так как, $r_1+r_2=2a$, то $\sqrt{y^2+(x+c)^2}+\sqrt{y^2+(x-c)^2}=2a$,

откуда легко, возведением в квадрат, получается каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ b^2=a^2-c^2>0$,

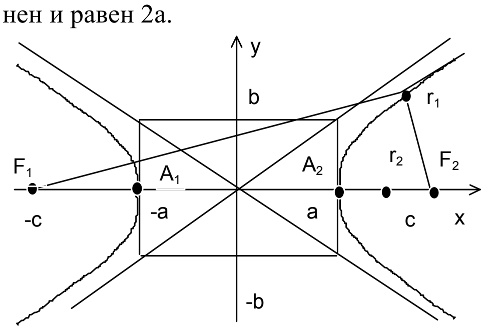
a- большая полуось, b- малая полуось эллипса.

Свойства эллипса.

1. Эллипс целиком лежит в прямоугольнике со сторонами 2a и 2b и центром в начале координат.
2. Эллипс симметричен относительно осей координат.
3. Точки с координатами (a,0), (-a,0), (0,b), (0,-b)- называют вершинами эллипса.
4. В вершинах эллипс касается центров сторон прямоугольника.
5. Число $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ - эксцентриситет, выражающий форму эллипса. При $\varepsilon=0$ (a=b) - эллипс превращается в окружность.

Определение.

Гипербола- это г. м. т. плоскости модуль разности расстояний от которых до фокусов $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ постоянен и равен 2a.



$|r_1-r_2|=2a$ или $\sqrt{y^2+(x+c)^2}-\sqrt{y^2+(x-c)^2}=\pm 2a$

откуда , после преобразований возведения в квадрат, имеем каноническое уравнение гиперболы.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ b^2=c^2-a^2\ge 0}$$

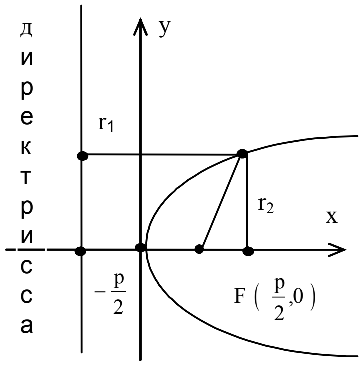
a,b- полуоси гиперболы.

Свойства гиперболы.

1. Гипербола лежит вне прямоугольника со сторонами 2a и 2b и центром в начале координат.
2. Гипербола симметрична относительно осей координат.
3. Вершины гиперболы- точки $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$, в которых она касается середин сторон прямоугольника.
4. При $x\to\pm\infty$ ветви гиперболы стремятся к прямым, являющимся продолжением диагоналей прямоугольника.

Определение.

Парабола- г. м. т. плоскости равноудаленных от точки $F(+\frac{p}{2},0)$ (фокуса) и прямой, называемой директриссой.



$\mathbf{r_1=r_2}$ или $\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+y^2}$, откуда после преобразований имеем $\boxed{y^2=2px}$ - каноническое уравнение параболы.

Известна следующая теорема, позволяющая классифицировать кривые второго порядка.

Теорема. Любое уравнение кривой второго порядка вида $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ может быть при помощи поворота декартовой системы координат.

$\begin{cases}x=x_1\cdot\cos\varphi-y_1\cdot\sin\varphi\\ y=x_1\cdot\sin\varphi+y_1\cdot\cos\varphi\end{cases}$ и переноса начала координат $\begin{cases}x=x_1+c\\ y=y_1+d\end{cases}$, сведено к одному из следующих канонических уравнений

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *(ээллипс* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ *(ммнимый элипс)*

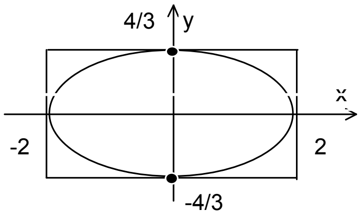
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *(ггипербола)* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (точка (0,0))

$y^2=2px$ *(ппарабола* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ $\begin{cases}\textit{пара пересекающихся прямых}\\ y=\pm\frac{b}{a}x\end{cases}$

$y^2=0$ {*пара совпадающих прямых* $y^2=a$ {*(пара параллельных прямых)*

Пример.

Определить тип кривой и построить график $4x^2+9y^2=16\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16/9}=1\Rightarrow\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{(4/3)^2}=1$, это каноническое уравнение эллипса с полуосями a=2, b=4/3



Поверхности второго порядка

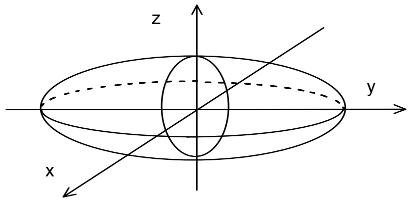
Определение.

Множество точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой прямоугольной системе координат 0xyz удовлетворяют уравнению
$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0$. (1),
где хотя бы один из коэффициентов $a_{ij}\neq 0$, называется поверхностью второго порядка. Известна следующая теорема.

Теорема. Уравнение (1) определяет одну из следующих поверхностей (записанных в канонической форме)

1)

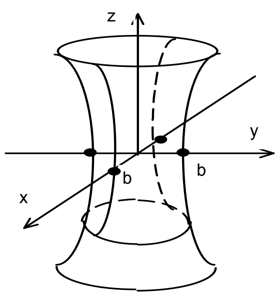
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ *- эллипсоид*



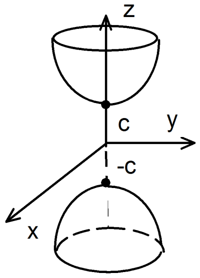
2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1-\varnothing$ (мнимый эллипсоид)

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ -(точка (0,0,0)- или мнимый конус)

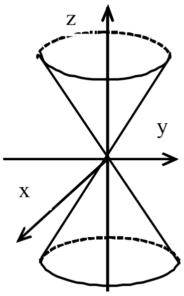
4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ -однополостный гиперболоид



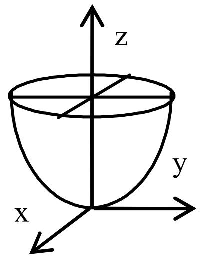
5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ -двуполостный гиперболоид



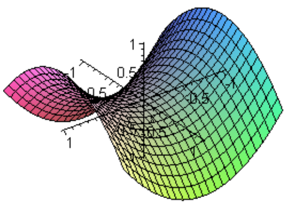
6) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=\boldsymbol{0}$ - *конус*



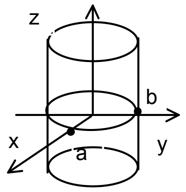
7) $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2Z$ -эллиптический параболоид



8) $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2Z$ гиперболический параболоид ("седло")



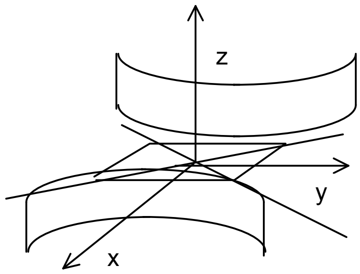
9) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\boldsymbol{1}$ - *круговой цилиндр*



10) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1-\varnothing$ (мнимый цилиндр)

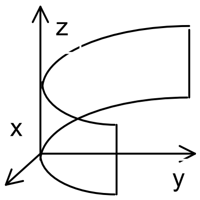
11) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ -прямая (x=0, y=0)

12) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ -гиперболический цилиндр



13) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ пара плоскостей

14) $x^2=2py$ параболический цилиндр



15) $x^2=a^2$ пара параллельных плоскостей

16) $x^2=-a^2-\varnothing$, пара мнимых плоскостей
17) $x^2=0$ пара совпадающих плоскостей.

Знание вида графиков поверхностей необходимо в дальнейшем при изучении разделов функции многих переменных, задач связанных с оптимизацией, линейным и нелинейным программированием и т.п.

Канонические уравнения П.В.П. получаются после решения характеристического уравнения
$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0$,
корни которого $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ -действительные числа, а числа I_1,I_2,I_3 -инварианты вида.

$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}$; $I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$;

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для получения канонических уравнений (1) - (17) корни характеристического уравнения λ_1, λ_2, λ_3 подставляют в следующие уравнения:

для поверхностей 1 - 6

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+\frac{I_4}{I_3}=0$$

для поверхностей 7,8

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2\pm 2\sqrt{\frac{I_4}{I_2}}\,Z=0$$

для поверхностей 9 -13

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{K_2}{I_2}=0$$

для поверхности 14

$$\lambda_1x^2\pm 2\sqrt{-\frac{K_2}{I_1}}\cdot x=0$$

для поверхностей 15 - 17

$$\lambda_1x^2+\frac{K_1}{I_1}=0;$$

при этом координаты центр П.В.П. находятся из решения системы уравнений $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1=0 \\ a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2=0 \\ a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z+a_3=0 \end{cases}$.

Тема 4. Теория пределов. Лекции 7-8.

Определение. Множество $X\subset\mathbb{R}$ называется *ограниченнымсверху*, если существует число A такое, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство $x\le A$. При этом число A называется *верхней гранью* множества X.

Если A является верхней граньюмножества X, то любое число $A'>A$ также является верхней гранью множества X.

Определение. Множество $X\subset\mathbb{R}$ называется *ограниченнымснизу*, если существует число B такое, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство $B\le x$. При этом число B называется *нижней гранью* множества X.

Если B является нижней граньюмножества X, то любое число $B'<B$ также является нижней гранью множества X.

Определение. Множество $X\subset\mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если существует число C такое, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство $|x|\le C$.

Множество $X\subset\mathbb{R}$ является ограниченным тогда и только тогда, когда оно ограниченно и сверху и снизу.

Определение. Число x_0 называется *наибольшим* (*наименьшим*) *элементом*множества $X\subset\mathbb{R}$, если $x_0\in X$ и для всех $x\in X$ выполняется неравенство $x\le x_0$ ($x\ge x_0$).

Наибольший (наименьший) элемент множества X является его верхней (нижней) гранью. Если существует верхняя (нижняя) грань множества X, принадлежащая X, то у X существует наибольший (наименьший) элемент.

Пример. а) Множество $X=[2;+\infty)$ является ограниченным снизу, неограниченным сверху, неограниченным, имеет наименьший элемент, равный 2, не имеет наибольшего.

б) Множество $X=[2;3)$. является ограниченным снизу, ограниченным сверху, ограниченным, имеет наименьший элемент, равный 2, не имеет наибольшего.

Точные грани множества

Определение. *Точной верхней гранью* (или *супремумом*)множества $X \subset \mathbb{R}$, называется наименьшая из его верхних граней. Обозначается $\sup X$.

Если $M=\sup X$, то, во-первых, M является верхней гранью X, во-вторых, любое число $M'<M$ не является верхней гранью, то есть:

1) Для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \le M$.
2) Для любого $M'<M$ найдется $x \in X$ такой, что $M'<x$.

Обозначив $\varepsilon = M-M'$, получим другую запись пункта 2:

3) Для любого $\varepsilon>0$ найдется $x \in X$ такой, что $M-\varepsilon<x$.

Определение. *Точной нижней гранью* (или *инфимумом*)множества $X \subset \mathbb{R}$, называется наибольшая из его нижних граней. Обозначается $\inf X$.

Если $m=\inf X$, то, во-первых, m является нижней гранью X, во-вторых, любое число $m'>m$ не является нижней гранью, то есть:

4) Для любого $x \in X$ выполняется неравенство $m \le x$.
5) Для любого $m'>m$ найдется $x \in X$ такой, что $x<m'$.

Обозначив $\varepsilon = m'-m$, получим другую запись пункта 2:

2) Для любого $\varepsilon>0$ найдется $x \in X$ такой, что $x<m+\varepsilon$.

Пример. Множеством верхних граней множества $X=[2;3)$ является множество $ВГ=[3;+\infty)$. Наименьшим элементом множества $ВГ$ является 3, $3=\sup X$. Множеством нижних граней множества $X=[2;3)$ является множество $НГ=(-\infty;2]$. Наибольшим элементом множества $НГ$ является 2, $2=\inf X$.

Множеством, противоположным множеству $X \subset \mathbb{R}$, называется множество, обозначаемое $-X$, состоящее из элементов $-x$, где $x \in X$.

Суммой множеств $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, называется множество, обозначаемое $X+Y$, состоящее из всевозможных сумм $x+y$, где $x \in X$, $y \in Y$:

$$-X=\{-x \mid x \in X\},\ X+Y=\{x+y \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Теорема. *Если множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет супремум, то множество $-X$ имеет инфимум и* $\inf(-X)=-\sup X$.

Доказательство. Обозначим $M=\sup X$. Тогда для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \le M$. Так как для любого $y \in -X$ найдётся $x \in X$ такой, что $y=-x$, то для любого $y \in -X$ выполняется неравенство $y \ge -M$. Возьмём произвольно $\varepsilon>0$. Тогда найдётся $x \in X$ такой, что $M-\varepsilon<x$, а значит, $-x<-M+\varepsilon$, значит, найдётся $y=-x \in -X$ такой, что $-x<-M+\varepsilon$. Тем самым доказано, что $-M=\inf(-X)$, $\inf(-X)=-\sup X$.

Упражнение. Доказать, что если множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет инфимум, то множество $-X$ имеет супремум и $\sup(-X)=-\inf X$.

Теорема. *Если множества $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ имеют супремум, то множество $X+Y$ также имеет супремум и* $\sup(X+Y)=\sup X+\sup Y$.

Доказательство. Обозначим $\sup X = M_1$, $\sup Y = M_2$. Произвольное $z \in X+Y$ представимо в виде $x = x + y$, где $x \in X$, $y \in Y$. Тогда выполняются неравенства $x \le M_1$, $y \le M_2$. Значит, $z = x + y \le M_1 + M_2$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся $x \in X$ и $y \in Y$ такие, что $M_1 - \varepsilon/2 < x$, $M_2 - \varepsilon/2 < y$. Тогда для элемента $z = x + y \in Z$ выполняется неравенство $M_1 + M_2 - \varepsilon < z$. Тем самым доказано, что $\sup(X+Y) = M_1 + M_2 = \sup X + \sup Y$.

Следствие. *Если множества $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ имеют инфимум, то множество $X+Y$ также имеет инфимум и* $\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$.

Доказательство. Множества $-X$ и $-Y$ имеют супремум, при этом $\sup(-X) = -\inf(X)$, $\sup(-Y) = -\inf(Y)$. Тогда их сумма, равная $-X + (-Y)$ имеет супремум, $\sup(-X + (-Y)) = \sup(-X) + \sup(-Y) = -\inf(X) - \inf(Y)$. Множество $X + Y = -(-X + (-Y))$ имеет инфимум, $\inf(X+Y) = = -\sup(-X + (-Y)) = -(-\inf(X) - \inf(Y)) = \inf X) + \inf Y$.

Разностью двух множеств X и Y называется сумма множеств X и $-Y$.

Упражнение. Доказать, что если множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет супремум, а множество $Y \subset \mathbb{R}$ имеет инфимум, то множество $X - Y$ имеет супремум, а множество $Y - X$ имеет инфимум. При этом выполняются равенства $\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y$, $\inf(Y - X) = \inf Y - \sup X$.

Существование точных граней

Лемма о сечениях. *Если непустые множества $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$ таковы, что $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \mathbb{R}$ и для любых двух элементов $a \in A$, $b \in B$ выполняется неравенство $a < b$ (т.е. $A < B$), то либо в A есть наибольший, либо в B есть наименьший.*

Теорема о существовании точной верхней грани. *Если непустое множество X ограниченно сверху, то у него существует супремум.*

Доказательство. Рассмотрим множество B, состоящее из верхних граней множества X. Так как X ограниченно сверху, то $B \ne \varnothing$. Пусть A - множество чисел, не являющихся верхними гранями множества X. Тогда $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \mathbb{R}$. Кроме того, для произвольного $x \in X$ выполняется неравенство $x - 1 < x$, значит $x - 1 \notin B$, то есть $x \in A$, $A \ne \varnothing$. Покажем, что $A < B$. Предположим, что это не так, тогда найдутся $a \in A$, $b \in B$ такие, что $a > b$ ($a \ne b$, т.к. $A \cap B = \varnothing$). Но так как b - верхняя грань, то и a - также верхняя грань, т.е. $a \in B$. Получили противоречие.

Таким образом, множества A и B удовлетворяют условию леммы о сечениях, следовательно, в A есть наибольший или в B есть наименьший. Предположим, что $a \in A$ является наибольшим элементом A. Так как a_0 - не верхняя грань множества X, то найдётся $x \in X$ такой, что $a < x$. Рассмотрим число $c = (a + x)/2 < x$. Тогда c не является верхней гранью, т.е. $c \in A$, но $c > a$, значит a не является наибольшим в A. Получили противоречие. Следовательно, в A нет наибольшего, значит, в B есть наименьший элемент, который и является, согласно определению, точной верхней гранью (супремумом) множества X. Теорема доказана.

Следствие (существование точной нижней грани). *Если непустое множество X ограниченно снизу, то у него существует инфимум.*

Доказательство. Если непустое множество X ограниченно снизу, то непустое множество $-X$ ограниченно сверху. Тогда существует $\sup(-X)$, а значит, существует $\inf X = \sup(-X)$.

Предельные точки и предел последовательности

Для точки a произвольнойинтервал $(b;c)$, содержащий точку a, называется её *окрестностью*, обозначается $U(a)$. Множество $(b;a) \cup (a;c)$ называется *проколотой окрестностью* точки a и обозначается $\overset{\circ}{U}(a)$. Окрестность вида $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ называется ε-*окрестностью* точки a и обозначается $U_\varepsilon(a)$.

Определение. Число a называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого натурального числа n_0 найдётся натуральное число $n > n_0$ такое, что выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Теорема. *Число a является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, тогда и только тогда, когда в любой её окрестности находится бесконечно много членов последовательности.*

Доказательство. Пусть a является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$ и найдётся такая её окрестность, в которой находится лишь конечное число членов последовательности, а именно $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$. Положим $\varepsilon = \min\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}\}$, тогда в ε-*окрестности* $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ нет ни одного члена последовательности, что противоречит тому, что a является предельной точкой.

Пусть теперь в любой окрестности точки a находится бесконечно много членов последовательности. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого натурального числа n_0 найдётся натуральное число $n > n_0$ такое, что выполняется неравенство $x_n \in U_\varepsilon(a)$, иначе в окрестности $U_\varepsilon(a)$ находилось бы лишь конечное число членов последовательности, не превосходящее n_0. Следовательно, точка a является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$. Теорема доказана.

Пример. У последовательности $x_n = (-1)^n$ две предельные точки $a_1 = 1$ и $a_2 = -1$, так как в любой окрестности точки -1 находятся члены с нечётными номерами, в любой окрестности точки 1 - с нечётными.

Предельных точек может быть как угодно много. Так, например, множеством предельных точек последовательности $x_n = \cos n$ является отрезок $[-1;1]$.

Определение. Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$ (обозначается $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$) если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральноё число $n_0(\varepsilon)$ такое, что при всех натуральных $n > n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Последовательность $\{x_n\}$ при этом называется *сходящейся.*

Таким образом, если $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то вне окрестности точки a находится лишь конечное число членов последовательности, не превосходящее $n_0(\varepsilon)$. Предел всегда является предельной точкой, предельная точка не обязана быть пределом.

Упражнение. Сформулировать утверждения:

а) a не является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$;

б) a не является пределом последовательности $\{x_n\}$;

в) последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела.

Пример. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём натуральноё число $n_0(\varepsilon)$ такое, что при всех натуральных $n > n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|1/n - 0| < \varepsilon$, $n > 1/\varepsilon$, $n_0(\varepsilon) = [1/\varepsilon]$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

Теорема о единственности предела. *Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то он единственный.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет по крайней мере два предела: $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, $b = \lim_{n\to\infty} x_n$ и $a < b$. Положим $\varepsilon = (b-a)/2 > 0$. Согласно определению предела найдутся натуральные числа n_1 и n_2 такие, что при всех $n > n_1$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, а при всех $n > n_2$ выполняется неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$. Тогда при выполняются неравенства:

$$x_n < a + \varepsilon = (a+b)/2,\ x_n > b - \varepsilon = (a+b)/2.$$

Следовательно, $x_n < x_n$. Полученное противоречие доказывает, что предположение о существовании двух пределов ложно. Теорема доказана.

Упражнение. Выяснить, верны ли утверждения:
а) если у последовательности есть предел, то у неё ровно одна предельная точка;
б) если у последовательности одна предельная точка, то у неё существует предел.

Свойства предела последовательности

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся, то она ограниченна, т.е. существует такое число $C > 0$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \le C$.*

Доказательство. Пусть $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, тогда для $\varepsilon = 1$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n - a| < 1$, $|x_n| < 1 + |a|$. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $|x_n| \le C$, где $C = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0}|, |a|+1\}$.

Теорема о предельном переходе под знаком неравенства. *Пусть $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, $b = \lim_{n\to\infty} y_n$ и при всех $n > n_1$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \le y_n$. Тогда $a \le b$.*

Доказательство. Предположим, что $a > b$ и возьмём $\varepsilon = (a-b)/2$. Тогда найдутся натуральные числа n_2 и n_3 такие, что при всех натуральных $n > n_2$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, а при всех натуральных $n > n_3$ выполняется неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$. Тогда при $n > \max\{n_1, n_2, n_3\}$ выполняются неравенства $y_n < b + \varepsilon = (a+b)/2 < a - \varepsilon < x_n \le y_n$, т.е. $y_n < y_n$. Полученное противоречие доказывает, что предположение о том, что $a > b$ ложно, значит, $a \le b$. Теорема доказана.

Замечание. Если в условии теоремы знак неравенства поменять на строгий, $x_n < y_n$, то в заключении теоремы он останется нестрогим, $a \le b$. Так, для последовательностей $x_n = 1/n$ и $y_n = 2/n$ выполняется неравенство $x_n < y_n$, однако $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Теорема (лемма о двух милиционерах). *Если последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$ сходятся и $a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ а последовательность $\{z_n\}$ такова, что при $n > n_1$ выполняются неравенства $x_n \le z_n \le y_n$ то $\{z_n\}$ сходится и $\lim_{n\to\infty} z_n = a$.*

Доказательство. Согласно определению предела найдутся натуральные числа n_2 и n_3 такие, что при всех натуральных $n > n_2$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, а при всех натуральных $n > n_3$ выполняется неравенство $|y_n - a| < \varepsilon$. Тогда при $n > \max\{n_1, n_2, n_3\}$ выполняются неравенства

$$a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon,$$

т.е. при $n > n_0$, где $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ выполняется неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a.$ Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим последовательность $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$. Так как $-\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\sin n}{n} \le \dfrac{1}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0,$ то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0.$

Теорема о сохранении знака сходящейся последовательности. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \ne 0,$ *то найдётся* $n_0 \in \mathbb{N}$ *такое, что при всех* $n > n_0,\, n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство* $|x_n| > |a|/2.$ *При этом, если* $a > 0,$ *то* $x_n > a/2,$ *если* $a < 0,$ *то* $x_n < a/2.$

Доказательство. Положим $\varepsilon = |a|/2 > 0.$ Тогда найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > n_0,$ $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n - a| < |a|/2,$ т.е. $a - |a|/2 < x_n < a + |a|/2.$ При $a > 0$ из левого неравенства получаем $x_n > a - |a|/2 = a/2.$ При $a < 0$ из правого неравенства получаем $x_n < a + |a|/2 = a/2.$ В обоих случаях выполняется неравенство $|x_n| > |a|/2.$ Теорема доказана.

Арифметические свойства предела последовательности

Теорема. *Если существуют пределы* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$ *то существуют следующие пределы и выполняются равенства:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(kx_n) = ka;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = ab;$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b},$ при $b \ne 0.$

Доказательство. Докажем сначала, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b.$ Зададим произвольно $\varepsilon > 0.$ Согласно определению предела найдутся натуральные числа n_1 и n_2 такие, что при всех натуральных $n > n_1$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon/2,$ а при всех натуральных $n > n_2$ выполняется неравенство $|y_n - b| < \varepsilon/2.$ Тогда при $n > \max\{n_1, n_2, n_3\}$ выполняются неравенства

$|x_n + y_n - (a+b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b.$

Докажем теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = ab.$ Зададим произвольно $\varepsilon > 0.$ Имеем

$$|x_n \cdot y_n - ab| = |x_n \cdot y_n - x_n \cdot b + x_n \cdot b - ab|,$$
$$|x_n \cdot y_n - ab| \le |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a|.$$

Рассмотрим первое слагаемое $|x_n| \cdot |y_n - b|.$ Так как последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограниченна, т.е. существует $C > 0$ такое, что $|x_n| \le C.$ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$ то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > n_1,\, n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|y_n - b| < \varepsilon/2C$ и тогда $|x_n| \cdot |y_n - b| < \varepsilon/2.$

Для второго слагаемого $|b| \cdot |x_n - a|$ при $b = 0$ имеем $|b| \cdot |x_n - a| = 0 < \varepsilon/2.$ При $b \ne 0$ найдется найдётся $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > n_2,\, n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$|x_n - a| < \varepsilon/2C$ и тогда $|b|\cdot|x_n - a| < \varepsilon/2$. Таким образом, при $n > \max\{n_1; n_2\}$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n \cdot y_n - ab| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = ab$.

Если теперь взять $y_n = k$, то получим $\lim\limits_{n\to\infty}(kx_n) = ka$.

Для разности двух последовательностей по уже доказанным свойствам имеем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n + (-y_n)) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty}(-y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = a - b.$$

Для доказательства свойства предела частного докажем сначала, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, при $b \neq 0$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Имеем $\left|\dfrac{1}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|y_n - b|}{|y_n|\cdot|b|}$. По теореме о сохранении знака найдётся $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > n_1$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|y_n| > |b|/2$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > n_2$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|y_n - b| < \varepsilon \cdot b^2/2$ и тогда при $n > \max\{n_1; n_2\}$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{1}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right| < \varepsilon$. Тем самым доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

Используя доказанные свойства, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = a\cdot\frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Теорема доказана.

Пример. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n+1}{n^3-5n-4}$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n+1}{n^3-5n-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+3/n^2+1/n^3}{1-5/n^2-4/n^3}.$$

По свойствам пределов получаем

$$\lim_{n\to\infty} 3/n^2 = 3\cdot\lim_{n\to\infty} 1/n \cdot \lim_{n\to\infty} 1/n = 0.$$

Аналогично, $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^3 = \lim\limits_{n\to\infty} 5/n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} 4/n^3 = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+3/n^2+1/n^3\right) = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-5/n^2-4/n^3\right) = 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n+1}{n^3-5n-4} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3+3n+1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3-5n-4\right)} = 1.$$

Утверждение. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$ ($x_n \in \mathbb{R}$ при нечётных k и $x_n \geq 0$ при чётных k).

Доказательство. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. При $a = 0$ имеем $\left|\sqrt[k]{x_n}\right| < \varepsilon$, если $\left|x_n\right| < \varepsilon^k$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\left|x_n\right| < \varepsilon^k$, т.е. $\left|\sqrt[k]{x_n}\right| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$.

При $a > 0$ по теореме о сохранении знака найдётся $n_1 \in \mathbb{N}$ что при всех $n > n_1$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n > a/2 > 0$. Имеем

$$\left|\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{\left(\sqrt[k]{x_n}\right)^{k-1} + \left(\sqrt[k]{x_n}\right)^{k-1}\cdot\sqrt[k]{a} + \ldots + \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}} <$$

$$< \frac{|x_n - a|}{\left(\sqrt[k]{a/2}\right)^{k-1} + \left(\sqrt[k]{a/2}\right)^{k-1}\cdot\sqrt[k]{a} + \ldots + \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}} = \frac{|x_n - a|}{A}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то найдётся $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > n_2$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n - a| < A\varepsilon$. Тогда при всех $n > \max\{n_1; n_2\}$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\left|\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{a}\right| < \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$.

При $a < 0$ и нечётном k по теореме о сохранении знака найдётся $n_1 \in \mathbb{N}$ что при всех $n > n_1$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n < a/2 < 0$. Тогда рассмотрим последовательность $y_n = -x_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -a > 0$. Тогда по доказанному $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{y_n} = \sqrt[k]{-a} = -\sqrt[k]{a}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{-y_n} = -\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{y_n} = -\left(-\sqrt[k]{a}\right) = \sqrt[k]{a}.$$

Предел монотонной ограниченной последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$). Последовательность $\{x_n\}$ называется *невозрастающей* (*неубывающей*), если при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_{n+1} \le x_n$ ($x_{n+1} \ge x_n$). Во всех этих случаях последовательность называется *монотонной.*

Теорема. *Неубывающая ограниченная сверху последовательность имеет предел.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ неубывающая ограниченная сверху. Тогда найдётся такое число $C > 0$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \le C$, т.е. множество членов последовательности ограниченно сверху, значит, имеет супремум M. Покажем, что $M = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Действительно, по определению супремума при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \le M$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся n_0 такое, что $\le M$. Тогда при всех $n > n_0$ имеем $M - \varepsilon < x_{n_0} \le x_n \le M$, т.е. $\left|x_n - M\right| < \varepsilon$, $M = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Теорема доказана.

Кроме того, мы доказали, что предел неубывающей ограниченной последовательности не меньше каждого её члена.

Следствие. *Невозрастающая ограниченная снизу последовательность имеет предел.*

Доказательство. Если последовательность $\{x_n\}$ невозрастающая ограниченная снизу, то последовательность $\{-x_n\}$ неубывающая ограниченная сверху. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n)$. Тогда существует и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n)$.

Бесконечно большие последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого $C>0$ найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n>n_0$ выполняется неравенство $|x_n|>C$. При этом говорят, что предел $\{x_n\}$ равен бесконечности: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Если для любого $C>0$ найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n>n_0$ выполняется неравенство $x_n > C$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Если для любого $C>0$ найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n>n_0$ выполняется неравенство $x_n < -C$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Теорема. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *неубывающая неограниченная сверху, то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Доказательство. Так какпоследовательность $\{x_n\}$ неограниченная сверху, то для любого $C>0$ найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $x_{n_0} > C$. Тогда, т.к. $\{x_n\}$ неубывающая, при всех $n>n_0$ выполняются неравенства $x_n \ge x_{n_0} > C$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Аналогично, если последовательность $\{x_n\}$ невозрастающая неограниченная снизу, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Таким образом, справедлива общая теорема о монотонных последовательностях.

Теорема. *У монотонной последовательности существует предел, конечный или бесконечный.*

Число е

Числом сочетаний из n элементов по k (обозначается C_n^k) называется количество способов выбрать из множества, состоящего из n элементов, подмножество, состоящее из k элементов, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$. Справедливо равенство, называемое *биномом Ньютона*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Теорема-определение. *Последовательность* $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, и этот предел называется числом е.*

Доказательство. Для того, чтобы доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, покажем, что она возрастает и ограничена сверху. По формуле бинома Ньютона имеем

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} = 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Тогда

$$x_{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\cdot$$
$$\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Очевидно, что все слагаемые, начиная со второго, в x_n меньше соответствующего слагаемого в x_{n+1}, $x_n < x_{n+1}$, последовательность $\{x_n\}$ является возрастающей.

Так как

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\frac{1}{k!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}\le\frac{1}{2^{k-1}},$$

то $x_n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<3$, последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной.

Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Теорема доказана.

Таким образом, согласно определению, $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Теорема о вложенных стягивающихся отрезках

Определение. Система отрезков $\sigma_n=[a_n;b_n]$ *называется системой вложенных стягивающихся отрезков***,** если $\sigma_{n+1}\subset\sigma_n$ при любом n и $\lim\limits_{n\to\infty}|\sigma_n|=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

Теорема. *Система вложенных стягивающихся отрезков* $\sigma_n=[a_n;b_n]$ *имеет единственную общую точку.*

Доказательство. Так как $\sigma_{n+1}\subset\sigma_n$, то последовательность $\{a_n\}$ является неубывающей. Кроме того, для любого n выполняется неравенство $a_n<b_n\le b_1$, следовательно, последовательность $\{a_n\}$ является ограниченной. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$. Так как для любых n и k выполняется неравенство $a_n<b_k$, то $c\le b_k$. Кроме того, $c\ge a_k$, значит, $c\in[a_k,b_k]$ при любом k. Таким образом, c является общей точкой всех отрезков $\sigma_k=[a_k;b_k]$. Предположим теперь, что общих точек две - c_1 и c_2. Так как $c_1\in[a_n,b_n]$, $c_2\in[a_n,b_n]$, то $|c_1-c_2|\le b_n-a_n$. Но $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, значит $|c_1-c_2|=0$, $c_1=c_2$. Теорема доказана.

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Определение. Последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется подпоследовательностьюпоследовательности $\{x_n\}$, если последовательностей индексов $\{n_k\}$ является возрастающей.

Теорема Больцано-Вейерштрасса. *Из всякой ограниченной последовательности* $\{x_n\}$ *можно выделить сходящуюсяподпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - ограниченная последовательность, т.е. существует $C>0$ такое, что при всех $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n|\le C$, или $x_n\in[-C;C]$. Обозначим $\sigma_1=[-C;C]$. Разделим этот отрезок пополам. По крайней мере в одной из частей содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, обозначим эту часть σ_2 (если в обеих частях содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, то можно взять любую). Продолжая деление каждого из выбранных отрезков пополам и выбирая ту часть, в которой содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, получим систему вложенных стягивающихся отрезков, имеющих общую точку a.

Построим теперь подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Положим $n_1=1$, $x_{n_1}\in\sigma_1$. Так как в отрезке σ_2 бесконечно много членов последовательности, то найдётся номер $n_2>n_1$ такой, что $x_{n_2}\in\sigma_2$. Если определено n_k, $x_{n_k}\in\sigma_k$, то найдётся номер n_{k+1} такой, что $n_{k+1}>n_k$ и $x_{n_{k+1}}\in\sigma_{k+1}$.

Докажем, что $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$, т.е. что последовательность $\{x_{n_k}\}$ - сходящаяся. Зададим произвольно $\varepsilon>0$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty}|\sigma_k|=0$, то найдётся $k_0\in\mathbb{N}$ такое, что при всех $k>k_0$ справедливо неравенство $|\sigma_k|<\varepsilon$. Так как $a\in\sigma_k$, то $\sigma_k\subset(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$, значит, $x_{n_k}\in(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$. Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$. Теорема доказана.

Упражнение. Доказать, что из неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большуюподпоследовательность.

Таким образом, из любой последовательности можно выделить подпоследовательность, имеющую предел, конечный или бесконечный.

Критерий Коши сходимости последовательности.

Теорема. *Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует $n_0\in\mathbb{N}$ такое, что при всех $n>n_0$, $m>n_0$ выполняется неравенство $|x_n-x_m|<\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}|x_x|=a$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $n_0\in\mathbb{N}$ такое, что при всех $n>n_0$, $m>n_0$ выполняются неравенства $|x_n-a|<\varepsilon/2$, $|x_m-a|<\varepsilon/2$, следовательно, $|x_n-x_m|<\varepsilon$.

Докажем в обратную сторону. Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что для любого $\varepsilon>0$ существует $n_0\in\mathbb{N}$ такое, что при всех $n>n_0$, $m>n_0$ выполняется неравенство $|x_n-x_m|<\varepsilon$. Нужно доказать, что она сходится. Докажем, что она ограниченна. Возьмём $\varepsilon=1$, тогда найдётся $n_0\in\mathbb{N}$ такое, что при всех $n>n_0$, $m>n_0$ выполняется неравенство $|x_n-x_m|<1$. Зафиксируем произвольное $m>n_0$. Тогда при любом $n>n_0$ выполняется неравенство $|x_n|\le|x_{m_0}|+|x_n-x_{m_0}|<|x_{m_0}|+1$. Значит, последовательность $\{x_n\}$ ограниченна. Следовательно, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, пусть $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$. Докажем, что тогда $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Возьмём произвольное $\varepsilon>0$. Тогда существуют $n_0\in\mathbb{N}$, $k_0\in\mathbb{N}$ такие, что при всех $n>n_0$, $m>n_0$ выполняется неравенство $|x_n-x_m|<\varepsilon/2$, а при всех $k>k_0$ выполняется неравенство $|x_{n_k}-a|<\varepsilon/2$. Так как последовательность номеров $\{n_k\}$ возрастающая, $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=+\infty$, то найдётся номер $k>k_0$ такой, что $n_k>n_0$. Тогда при всех $n>n_0$ выполняются неравенства

$|x_n - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Последовательность $\{x_n\}$ сходится. Теорема доказана.

Следствие. *Последовательность* $\{x_n\}$ *расходится тогда и только тогда, когда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для любого* $n_0 \in \mathbb{N}$ *найдутся* $n > n_0$, $m > n_0$ *такие, что выполняется неравенство* $|x_n - x_m| \ge \varepsilon$.

Пример. Докажем, что последовательность $x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ не имеет предела. Рассмотрим разность $x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Тогда при $\varepsilon = 0{,}5$ для любого $n_0 \in \mathbb{N}$ найдутся $n > n_0$, $m = 2n > n_0$ такие, что выполняется неравенство $|x_n - x_m| > 0{,}5 = \varepsilon$. Последовательность не имеет предела.

Эквивалентные определения

Определение предела функции в точке по Коши. Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *по Коши* если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого x, удовлетворяющего условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon).$$

Число a ***не*** является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 в смысле определения по Коши, если найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существует x такой, что выполняются неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - a| \ge \varepsilon$:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \quad (0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - a| \ge \varepsilon).$$

Определение предела функции в точке по Гейне. Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *по Гейне* если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, такой, что $x_n \ne x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$:

$$\forall \{x_n\} \quad ((\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \wedge x_n \ne x_0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a).$$

Число a ***не*** является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 в смысле определения по Гейне, если существует такая последовательность $\{x_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \ne x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \ne a$. Если найдутся две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \ne x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$, $y_n \ne x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = b \ne a$, то функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0.

Теорема. *Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. Пусть число a является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 в смысле определения по Коши. Докажем, что она является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 и в смысле определения по Гейне. Возьмём произвольную последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \ne x_0$. Нужно доказать, что тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Согласно определению предела по Коши существует $\delta > 0$ такое, что для любого x, удовлетворяющего условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \ne x_0$, то найдётся

$n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $0 < |x_n - x_0| < \delta.$ Тогда при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|f(x_n) - a| < \varepsilon,$ значит $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a.$

Пусть теперь a является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 в смысле определения по Гейне. Докажем, что a является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 и в смысле определения по Коши. Предположим, что это не так. Тогда найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существует x такой, что выполняются неравенства $0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - a| \geq \varepsilon.$ Возьмём $\delta = 1/n$ и построим последовательность $\{x_n\},$ удовлетворяющую условиям $0 < |x_n - x_0| < 1/n, |f(x_n) - a| \geq \varepsilon.$ Тогда, с одной стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,$ $x_n \neq x_0.$ Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a,$ т.к. a является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 в смысле определения по Гейне. С другой стороны, $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon.$ Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq a.$ Получили противоречие. Следовательно, a является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 в смысле определения по Коши. Теорема доказана.

Если a является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 смысле определения по Коши или по Гейне , то a называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x).$

Упражнение. Доказать, что если для всех $x \neq x_0, x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ выполняется равенство $f(x) = g(x),$ то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x),$ где последнее равенство понимается в том смысле, что если существует предел слева, то существует и предел справа, и наоборот, и они равны между собой.

Примеры.

1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0}(kx + b) = kx_0 + b.$ Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и рассмотрим модуль разности

$$|(kx + b) - (kx_0 + b)| = |k| \cdot |x - x_0|.$$

Если $k = 0,$ то $|(kx + b) - (kx_0 + b)| = 0 < \varepsilon.$ Если $k \neq 0,$ то $|(kx + b) - (kx_0 + b)| = |k| \cdot |x - x_0| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \varepsilon / |k|$ и $\delta = \varepsilon / |k|.$

2. Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0.$ Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и рассмотрим модуль разности

$$|\sin x - \sin x_0| = 2|\sin((x - x_0)/2)| \cdot |\cos((x + x_0)/2)|.$$

Покажем, что при всех x выполняется неравенство $|\sin\alpha| \leq |\alpha|.$ Действительно, $\sin 0 = 0.$ При $0 < \alpha < \pi/2$ рассмотрим точки A и B единичной окружности, соответствующие углам α и $-\alpha.$ Длина дуги AB равна 2α и больше длины отрезка AB, равной $2\sin\alpha,$ значит, $0 < \sin\alpha < \alpha.$

При $\alpha > \pi/2$ получаем неравенства:

$$\sin\alpha \leq 1 < \pi/2 < \alpha, \sin\alpha \geq -1 > -\pi/2 > -\alpha, |\sin\alpha| \leq |\alpha|.$$

При $\alpha < 0$ имеем $|\sin\alpha| = |\sin(-\alpha)| < |-\alpha| = |\alpha|.$

Таким образом,

$$|\sin x - \sin x_0| = 2|\sin((x - x_0)/2)| \leq |x - x_0| < \varepsilon$$

при $|x - x_0| < \delta,$ где $\delta = \varepsilon.$

3. Докажем, что у функции $f(x) = \cos(1/x)$ не существует предела в точке $x_0 = 0.$ Воспользуемся определением предела по Гейне. Возьмём последовательности $x_n = \cos(1/2\pi n)$ и

$y_n = \cos(1/(\pi + 2\pi n))$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, $y_n \neq 0$. Однако, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = -1$, следовательно, функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0.

Свойства предела функции в точке.

Теорема о единственности предела. *Если предел функции в точке существует, то он единственный.*

Доказательство. Предположим, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ и $a < b$. Положим $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$. Тогда согласно определению предела найдутся $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$, а при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta_2$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Положим $\delta_1 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta_2$, выполняются неравенства $f(x) < a + \varepsilon = \dfrac{a+b}{2}$ и $f(x) > b - \varepsilon = \dfrac{a+b}{2}$, то есть $f(x) < f(x)$. Предположение о том, что предел не единственный привело к противоречию. Теорема доказана.

Теорема об ограниченности функции, имеющее предел. *Если функция имеет предел в точке, то она ограниченна в некоторой проколотой окрестности этой точки.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. По определению предела для $\varepsilon = 1$ найдется $\delta > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < 1$. Тогда $|f(x)| < 1 + |a|$. Теорема доказана.

Теорема о переходе к пределу под знаком неравенства. *Если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ *и в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *выполняется неравенство* $f(x) \le g(x)$, *то* $a \le b$.

Теорема о двух милиционера. *Если в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *выполняются неравенства* $f(x) \le h(x) \le g(x)$ *и существуют пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$, *то существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$.

Теорема о сохранении знака. *Еслисуществует* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0$, *то в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *выполняется неравенство* $|f(x)| > |a|/2$. *При этом, если* $a > 0$, *то* $f(x) > a/2$, *если* $a < 0$, *то* $f(x) < a/2$.

Доказательства теорем аналогичны доказательствам соответствующих теорем для предела последовательности.

Арифметические свойства пределов

Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, то существуют следующие пределы и выполняются равенства:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0} kf(x) = ka$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = ab$; 4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, при $b \neq 0$.

Для доказательства воспользуемся определением предела функции по Гейне. Для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $x_n \neq x_0$, соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ являются сходящимися и выполняются равенства $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b.$

Тогда согласно свойствам пределов последовательности существую пределы следующих последовательностей и выполняются равенства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) \pm g(x_n)) = a \pm b;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} kf(x_n) = ka;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n)\cdot g(x_n)\right) = ab;$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{a}{b},$ при $b \neq 0.$

Согласно определению предела функции по Гейне это означает, что существуют пределы соответствующих функций и выполняются соответствующие равенства.

Упражнение. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Доказать равенства:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0);$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)},$ если $Q(x_0) \neq 0.$

Критерий Коши существования предела

Теорема. *Предел функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *существует тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $\delta > 0$ *такое, что при всех* $x_1, x_2,$ *удовлетворяющих условиям* $0 < |x_1 - x_0| < \delta,\ 0 < |x_2 - x_0| < \delta,$ *выполняется неравенство* $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$

Доказательство. Предположим, что существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a.$ Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при всех $x,$ удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta,$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon/2.$ Следовательно, при всех $x_1, x_2,$ удовлетворяющих условиям $0 < |x_1 - x_0| < \delta,\ 0 < |x_2 - x_0| < \delta,$ выполняются неравенства $|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \varepsilon,$ что и требовалось доказать.

Докажем обратное утверждение. Нужно показать, что существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).$ Возьмём произвольное $\varepsilon > 0.$ Тогда найдётся $\delta > 0$ такое, что при всех $x_1, x_2,$ удовлетворяющих условиям $0 < |x_1 - x_0| < \delta,\ 0 < |x_2 - x_0| < \delta,$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$ Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Возьмём произвольную последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $x_n \neq x_0.$ Тогда для найденного $\delta > 0$ существует номер n_0 такой, что при всех $k > n_0,\ n > n_0$ выполняются неравенства

$0 < |x_k - x_0| < \delta,\ 0 < |x_n - x_0| < \delta.$ Тогда $|f(x_k) - f(x_n)| < \varepsilon.$ и для последовательности $\{f(x_n)\}$ выполняется условие Коши, следовательно, она сходится.

Осталось показать, что для всех последовательностей $\{x_n\}$ с заданными условиями предел последовательности $\{f(x_n)\}$ будет один и тот же. Возьмём две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ и $x_n \neq x_0,\ y_n \neq x_0.$ Тогда по доказанному существуют пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$ и $\{f(y_n)\}.$ Рассмотрим последовательность $\{z_n\}$ такую, что

$z_{2k} = x_k$, $z_{2k+1} = x_{k+1}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$, следовательно, существует предел последовательности $\{f(z_n)\}$. Так как последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(y_n)\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{f(z_n)\}$, то их пределы равны между собой. Согласно определению предела функции по Гейне существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Следствие. *У функции $f(x)$ в точке x_0 не существует пределатогда и только тогда, когда найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ такое, существуют x_1, x_2, удовлетворяющие неравенствам* $0 < |x_1 - x_0| < \delta$, $0 < |x_2 - x_0| < \delta$, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Пример. Докажем, что у функции Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \in Q, \\ 0, \text{ при } x \in Q \end{cases}$ не существует предела ни в одной точке x_0. Действительно, возьмём $\varepsilon = 1$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдутся $x_1 \in Q$, $x_2 \notin Q$, для которых выполняются неравенства $0 < |x_1 - x_0| < \delta$, $0 < |x_2 - x_0| < \delta$. Однако $|f(x_1) - f(x_2)| = 1$.

Односторонние пределы и пределы на бесконечности

Определение. Число a называется пределом функции ***справа*** в точке x_0, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Число a называется пределом функции ***слева*** в точке x_0, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Утверждение. Предел функции в точке существует тогда и только тогда, когда существуют равные между собой пределы справа и слева.

Пример. $\lim\limits_{x\to+0} e^{1/x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-0} e^{1/x} = 0$.

Определение.Число a называется *пределом функции при x, стремящемся к бесконечности,* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $C > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > C$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Число a называется *пределом функции при x, стремящемся к плюс бесконечности,* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $C > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $x > C$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Число a называется *пределом функции при x, стремящемся к минус бесконечности,* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $C > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $x < -C$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Пределы функций на бесконечности обладают теми же свойствами, что и пределы функций в точке.

Тема 5. Дифференциальное исчисление. Лекции 9-11.

Производная. Определение, непрерывность функции, имеющей производную.

<u>*Определение:*</u> Производной от функции f в точке x называется предел, к которому стремится отношение ее приращения Δy в этой точке к соответствующему приращению Δx аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Т.е., если $f(x)$ определена в $U(x_0)$, то

$\forall x\in U(x_0)$

при $\Delta x=x-x_0$

и $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

$\exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

<u>*Теорема:*</u> (необходимое условие существования производной)
Если функция f имеет конечную f' в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.
<u>*Доказательство:*</u>

$\exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x_0)$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x_0)+\overset{=}{o}(1)$

$\Delta f=\Delta x\cdot f'(x_0)+\overset{=}{o}(1)\cdot\Delta x$

При $\Delta x\to 0,$ $\Delta f\to 0$,
Следовательно f - непрерывна в точке x_0.
Теорема доказана.

<u>*Замечание*</u>*:* обратное утверждение неверно, если функция f непрерывна в точке x, то отсюда не следует, что она имеет производную в этой точке.
<u>*Контрпример:*</u> $y=|x|$
<u>*Утверждение*</u>*:* если функция имеет в точке правую и левую производную, то она непрерывна и справа и слева.
<u>*Контрпример:*</u>

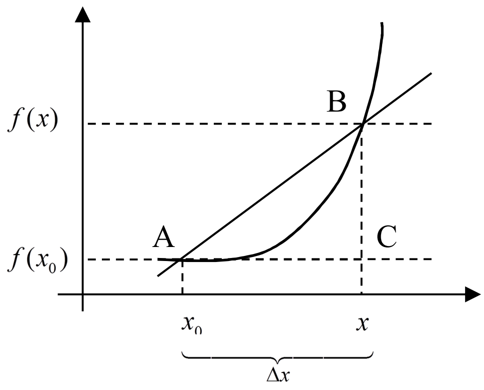
$$f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\ ,x\neq 0\\ 0\ ,x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$$

$f'_+(0)=\dfrac{\Delta x\cdot\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}$ - не существует

Геометрический смысл производной.

<u>*Теорема 1:*</u>
График функции имеет невертикальную касательную тогда и только тогда, когда существует конечное значение производной этой функции в данной точке.



<u>*Доказательство:*</u>
Пусть существует значение f’(x_0)-конечное, тогда
$AC = \Delta x$
$BC = \Delta f$
$tg\,\alpha_{сек} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$
при $\Delta x -> 0$ $tg\alpha_{сек} \to tg\alpha_{кас}$
Секущая стремится к касательной.
$f'(x_0) \leftarrow tg\alpha_{сек} \to tg\alpha_{кас}$ => $f'(x_0) = tg\alpha_{кас}$ ч.т.д.
Пусть существует невертикальная касательная => существует $tg\alpha_{кас}$ - конечный.
Секущая стремится к касательной.

$$tg\alpha_{сек} \to tg\alpha_{кас} \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Теорема доказана.

Арифметические свойства производной.

Пусть f = f(x) и g = g(x) – функции, имеющие конечные производные в точке x_0, тогда справедливы равенства:

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $(f * g)' = f'g + g'f$
   2.1. $(kf)' = kf'$ где k – константа
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$

---

1. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x} = f' \pm g'$

2.

$$(f*g)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(f*g)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)*g(x+\Delta x)-f(x)*g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)*g(x+\Delta x)-\mathbf{f(x+\Delta x)*g(x)+f(x+\Delta x)*g(x)}-f(x)*g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)(g(x+\Delta x)-g(x))+g(x)(f(x+\Delta x)-f(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)(g(x+\Delta x)-g(x))}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)(f(x+\Delta x)-f(x))}{\Delta x} = f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)-f(x))}{\Delta x} = f'g + g'f$$

Заметим, что функция f , как имеющая производную, непрерывна, и потому при $\Delta x \to 0$ $f(x+\Delta x) \to f(x)$

3.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)*g(x)-f(x)*g(x+\Delta x)}{\Delta x*g(x+\Delta x)*g(x)} = \left[g(x+\Delta x)\to g(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{g^2(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)*g(x)-f(x)*g(x+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{1}{g^2(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)*g(x)-\mathbf{f(x)*g(x)}+\mathbf{f(x)*g(x)}-f(x)*g(x+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{g^2(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)-f(x)\big(g(x+\Delta x)-g(x)\big)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{g^2(x)}\left(g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right) = \frac{f'g-g'f}{g^2}$$

Производная обратной функции.

Теорема:

Пусть на интервале (a,b) задана непрерывная строго монотонная, т.е. строго возрастающая или строго убывающая, функция $y=f(x)$. Пусть образ (a,b) есть интервал (A,B).тогда обратная к f функция $x=\varphi(y)$ есть однозначная непрерывная и строго монотонная на (A,B) функция.

Доказательство:

Зафиксируем $x\in(a,b)$ и дадим ему приращение $(x+\Delta x\in(a,b))$. Тогда f получит соответствующее приращение $\Delta y(y, y+\Delta y\in(A,B))$ такое, что $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$.

Наоборот, $\varphi(y+\Delta y)=x+\Delta x$.

Вследствие непрерывности прямой и обратной функций для указанных Δx и Δy имеет место утверждение: из $\Delta x\to 0$ следует $\Delta y\to 0$, и обратно.

Пусть теперь функция φ в точке y имеет неравную нулю производную $\varphi'(y)$. Покажем, что в таком случае функция f также имеет в соответствующей точке x производную. В самом деле, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$.

Так как из того, что $\Delta x\to 0$ следует, что $\Delta y\to 0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}, \text{ и мы получили } f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}, \qquad (1)$$

$$\text{или } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}. \qquad (1')$$

Этим доказано, что если $y=f(x)$ есть строго монотонная непрерывная функция и $x=\varphi(y)$ обратная к ней функция, имеющая в точке y производную $\varphi'(y)\neq 0$, то функция f имеет в соответствующей точке x производную, определяемую формулой (1).

Может случится, что в точке y $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\infty$. В этом случае, очевидно, функция f имеет в соответствующей точке x производную $f'(x)=0$.

Если же $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=0$, то для строго возрастающей функции при этом $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}>0$, а для строго убывающей $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}<0$. В первом случае $f'(x)=+\infty$, а во втором $f'(x)=-\infty$.

__Пример 1.__

$y=\log_a x$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x},\quad a>0$$

Если логарифм натуральный, то

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Функция lnx как действительная функция определена только для положительных значений x.

__Пример 2.__

$y=\ln|x|$

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|}\,sign\,x=\frac{1}{x},\quad x\neq 0$$

где $sign\,x=\begin{cases}1 \text{ для x} > 0\\ -1 \text{ для x} < 0\end{cases}$

__Пример 3.__

$$(x^n)'=(e^{n\ln x})'=\frac{n}{x}e^{n\ln x}=n\cdot x^{n-1}.$$

__Пример 4.__

Функция $y=\arcsin x$ строго возрастает на отрезке [-1,1] и отображает этот отрезок на $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Обратная к ней функция $x=\sin y$ имеет производную $(\sin y)'=\cos y$, положительную на интервале $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Поэтому

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad -1<x<1.$$

__Пример 5.__

$$(\arccos x)'=(\frac{\pi}{2}-\arcsin x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\quad -1<x<1.$$

__Пример 6.__

$$(arctg\,x)'=\frac{1}{(tg\,y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+tg^2\,y}=\frac{1}{1+x^2},\quad -\infty<x<+\infty.$$

Производная сложной функции.

__Теорема:__

Пусть функция $f(x)$ такая, что $\exists f'(x_0)$, и функция $g(y)$ такая, что $\exists g'(y_0)$, $y_0=f(x_0)$. Тогда функция $H(x)=g(f(x))$ и $\exists H'(x_0)=g'(y_0)\times f'(x_0)$.

<u>*Доказательство*</u>:

$f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда:

$$\Delta f = f'(x_0)\times\Delta x + \overline{\overline{O}}(\Delta x)$$

$$\Delta g = g'(y_0)\times\Delta y + \overline{\overline{O}}(\Delta y)$$

Рассмотрим ΔH:

$$\Delta H = g(f(x_0+\Delta x)) - g(\overbrace{f(x_0)}^{y_0}) = g(\overbrace{f(x_0)}^{y_0} + \overbrace{f'(x_0)\times\Delta x + \overline{\overline{O}}(\Delta x)}^{\Delta y\to 0}) - g(y_0) =$$

$$= g'(y_0)\times f'(x_0)\times\Delta x + g'(y_0)\times\overline{\overline{O}}(\Delta x) + \overline{\overline{O}}(\Delta x)$$

$$g(y_0+\Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\cdot\Delta y + \overline{\overline{O}}(\Delta y) = g'(y_0)\cdot(f'(x_0)\cdot\Delta x + \overline{\overline{O}}(\Delta x)) + \underbrace{\overline{\overline{O}}\left(f'(x_0)\cdot\Delta x + \overline{\overline{O}}(\Delta x)\right)}_{\overline{\overline{O}}(\Delta x)}$$

$$y'(x_0)\cdot\overline{\overline{O}}(\Delta x) = \overline{\overline{O}}(\Delta x), \text{ т.к. } y'(x_0) = const$$

$$\Delta H = \underbrace{g'(y_0)\cdot f'(x_0)\cdot\Delta x}_{H'(x_0)} + \overline{\overline{O}}(\Delta x)$$

Производные элементарных функций.

1. $y = C$; $\Delta y = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

$$\Delta x \ne 0$$

$$y' = 0$$

2. $y = x^\alpha$, $\alpha\in\mathbf{R}$

$$\Delta y = (x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha - x^\alpha$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^\alpha\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1}{\Delta x} = x^\alpha\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\cdot\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

3. $y = e^x$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

$$(e^{\Delta x}-1)\to\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = e^x$$

4. $y = \sin x$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \cos x$$ (т.к. функция непрерывна)

<u>*Замечание*</u>: если функция имеет конечную производную в точке, то она непрерывна в этой точке (было доказано в <u>*Билете 1*</u>), но она может быть разрывной в любой другой точке, кроме этой.

<u>*Пример*</u>:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x\in\mathbf{Q} \\ 0, & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$$

$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}=0$, т.к.

$$\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\begin{cases}\dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=\Delta x \text{ , если } \Delta x\in\mathbf{Q}\\ 0 \text{ , если } \Delta x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$$

$x_0\neq 0$

$\forall\ \ \delta>0\ \ \exists x_1,x_2\in U_\delta(x_0)$

$x_1\in\mathbf{Q}$

$x_2\notin\mathbf{Q}$

$f(x_1)=x_1{}^2$

$f(x_2)=0$

$\exists\delta:\ x_1{}^2>\dfrac{x_0{}^2}{2}$

$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|>\dfrac{x_0{}^2}{2}=\varepsilon$

$\exists\ \varepsilon\ \forall\ \ \delta>0\ \exists\ x_1,x_2\in U_\delta(x_0)$

$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|>\varepsilon$ - не выполняется критерий Коши и в каждой точке $x_0\neq 0$ функция разрывна.

Дифференциал функции. Определение. Геометрический смысл.

Если функция f имеет производную $f'(x_o)$ в точке x_o, то существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)$, где $\Delta f=f(x_o+\Delta x)-f(x_o)$, $\Rightarrow\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x_0)+\overset{=}{o}(1)$, $\Rightarrow$ $\Delta f=f'(x_0)\Delta x+\overset{=}{o}(\Delta x)$ или $\Delta f=A\Delta x+\overset{=}{o}(\Delta x)$, где $A=f'(x_o)$.

<u>*Определение:*</u>

Функция fдифференциируема в точке x_o, если ее приращение представимо в виде:

$\Delta f=A\Delta x+\overset{=}{o}(\Delta x)$, где $A\Delta x=df$. (*)

Дифференциал — это главная линейная часть приращения функции.

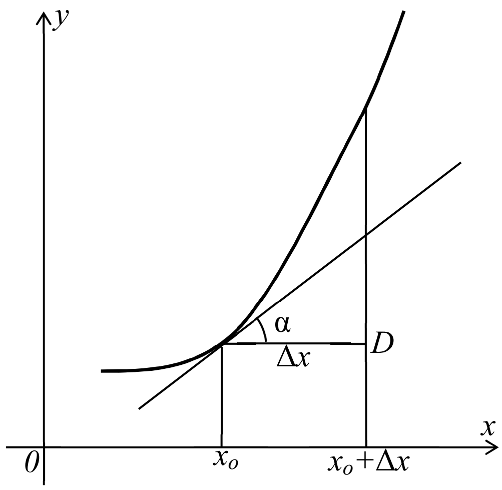
Если существует конечная производная $f'(x_o)$ в точке x_o, то функция $f(x)$ дифференцируема в этой точке.

Верно и обратное: если функция f дифференцируема в точке x_o, т.е. ее приращение представимо в виде (*), то она имеет производную в точке x_o, равную A:

$\Delta f=A\Delta x+\overset{=}{o}(\Delta x)$;

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=A+\dfrac{\overset{=}{o}(\Delta x)}{\Delta x}$;

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=A,\Rightarrow f'(x_0)=A.$



<u>*Геометрический смысл дифференциала:*</u>

A и B – точки графика $f(x)$, соответствующие значениям x_o и $(x_o+\Delta x)$ независимой переменной. Ординаты точек A и B соответственно равны $f(x_o)$ и $f(x_o+\Delta x)$. Приращение функции $\Delta f=f(x_o+\Delta x)-f(x_o)$ в точке x_o равно длине отрезка BD и представимо в виде суммы $\Delta f=BD=DC+CB$, где $DC=tg\alpha\Delta x=f'(x_o)\Delta x$ и α

есть угол между касательной в точке *A* к графику и положительным направлением оси *x*. Отсюда видно, что *DC* есть дифференциал функции *f* в точке x_o:

$DC=df=f'(x_o)\Delta x$.

При этом на долю второго члена *CB* приращения Δf приходится величина $\overset{=}{o}(\Delta x)$. Эта величина, при больших Δx, может быть даже больше, чем главный член, но она есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, когда $\Delta x\to 0$.

Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.

Пусть функция f имеет производную в точке x (конечную): $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$.

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для достаточно малых Δx можно записать в виде суммы $f'(x)$ и некоторой функции, которую мы обозначим через $\varepsilon(\Delta x)=\overset{=}{o}(1)$, которая стремится к нулю вместе с Δx: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon(\Delta x)$

$(\varepsilon(\Delta x)\to 0, \quad \Delta x\to 0)$

и приращение в точке может быть записано в виде:

$\Delta y=f'(x)\Delta x+\Delta x\varepsilon(\Delta x)$ или $\Delta y=f'(x)\Delta x+\underset{\Delta x\to 0}{\overset{=}{o}(\Delta x)}$ **(1)**,

ведь выражение $\underset{\Delta x\to 0}{\overset{=}{o}(\Delta x)}$ понимается как функция от Δx такая, что ее отношение к Δx стремится к нулю вместе с Δx. *Пояснение:* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0\Rightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=0\Rightarrow\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x=\overset{=}{O}(\Delta x)$

Определение.

Функция f называется дифференцируемой в точке x, если ее приращение можно представить в виде: $\Delta y=A\Delta x+\underset{\Delta x\to 0}{\overset{=}{o}(\Delta x)}$ **(2),**

где A не зависит от Δx, но вообще зависит от x.

Теорема 1:

Для того, чтобы функция f была дифференцируемой в точке x, необходимо и достаточно, чтобы она имела конечную производную в этой точке.

Доказательство:

Достаточность условия доказана выше: из существования конечной производной $f'(x)$ следовала возможность представления Δy в виде (1), где можно положить $f'(x)=A$.

Необходимость условия. Пусть функция f дифференцируема в точке x. Тогда из (2), предполагая $\Delta x\neq 0$, получаем $\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\underset{\Delta x\to 0}{\frac{\overset{=}{o}(\Delta x)}{\Delta x}}=A+\underset{\Delta x\to 0}{\overset{=}{o}(1)}$.

Предел правой части при $\Delta x\to 0$ существует и равен A: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$.

Это означает, что существует производная $f'(x)=A$. Теорема доказана.

Производные высших порядков. Формула Лейбница.

Пусть функция y=f(x) дифференцируема в точке Xo, то есть существует ее производная в этой точке f ’ (Xo). Пусть f - дифференцируема в некоторой окрестности U(Xo). f’(x) определена на U(Xo) и если дифференцируема в точке Xo, то (f’(Xo))’=f’’(Xo). Вообще $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'$

Теорема: (Формула Лейбница)

Пусть функции U и Vn раз дифференцируемы, т.е. существуют $U^{(n)}$ и $V^{(n)}$. Значит (U*V) – тоже n раз дифференцируема, при этом

$$(U*V)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k * U^{(k)} * V^{(n-k)}$$

<u>Доказательство:</u>

Метод математической индукции:

Пусть при n=m – верно, т.е.

$$(U*V)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k * U^{(k)} * V^{(m-k)} \qquad (*)$$

Надо доказать, что

$$(U*V)^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k * U^{(k)} * V^{(m+1-k)}$$

<u>Доказательство:</u>

Продифференцируем (*):

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k (U^{(k+1)} * V^{(m-k)} + U^{(k)} * V^{(m+1-k)}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k * U *^{(k+1)} * V^{(m-k)} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k * U^{(k)} * V^{(m+1-k)} =$$

$$= | l = k+1; m-k = m+1-l | =$$

$$= \sum_{l=1}^{m+1} C_m^{l-1} * U^{(l)} * V^{(m+1-l)} + \sum_{l=0}^{m} C_m^l * U^{(l)} * V^{(m+1-l)} =$$

$$\sum_{l=1}^{m} (C_m^{l-1} + C_m^l) * U^{(l)} * V^{(m+1-l)} + C_m^m * U^{(m+1)} * V^{(0)} + C_m^0 * U^{(0)} * V^{(m+1)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} C_{m+1}^l * U^{(l)} * V^{(m+1-l)} + C_{m+1}^{m+1} * U^{(m+1)} * V^{(0)} + C_{m+1}^0 * U^{(0)} * V^{(m+1)} =$$

$$= \sum_{l=0}^{m+1} C_{m+1}^l * U^{(l)} * V^{(m+1-l)}$$

Теорема доказана.

Дифференциалы высших порядков. Инвариантность формы первого дифференциала. Неинвариантность формы дифференциалов второго и высших порядков.

f(x) дифференцируема,

$d(df) = d^2 f, d(dx) = 0, d^2(x) = 0, dx^2 = dx \times dx = (dx)^2, d(x^2) = 2xdx$

тогда $d^{n+1} f = d(d^n f)$. Далее, пусть f – nраз дифференцируема, $df = f'dx$

$d(df) = d(f'dx) = df' \times dx + f'd(dx) = f''dx \times dx = f''dx^2$

$(dx)^n = dx^n$. Докажем, что $f^{(n)} dx^n$

1) $n = 1$, $df = f'dx$

2) Пусть при $n = m$ $d^m f = f^{(m)} dx^m$

3) $d^{m+1} f = f^{(m+1)} dx^{m+1}$

$$d^{m+1} f = d(d^m f) = d(f^{(m)} dx^m) = df^m dx^m + f^{(m)} \underbrace{d(dx^m)}_{0} = f^{(m+1)} dx \times dx^m = f^{(m+1)} dx^{m+1}$$

Инвариантность/Неинвариантность.

1) *y(x), x* – независимая переменная, $dy = y'_x dx$, пусть $x = x(t)$, x – зависимая переменная,тогда

$y = y(x(t))\ dy = (y(x(t)))'_t dt = y'_x \times \underbrace{x'_t dt}_{dx} = y'_x dx$

2) *y(x), x* – независимая переменная, $d^2 y = y''_{xx} dx^2$, пусть $x = x(t)$, *x* – зависимая переменная,тогда $dy = y'_x dx\ dy^2 = d(y'_x dx) = dy'_x dx + y'_x d(dx) = y''_{xx} dx^2 + y'_x d^2 x$, здесь $d^2 x \neq 0$, $d^2 x = 0 \Leftrightarrow x = at + b$.

Возрастание (убывание) функции в точке. Необходимое и достаточное условие. Теорема Ферма.

*Определение 1:.*f(x) – возрастает (не убывает) в точке x_0, если

$\exists U(x_0): \forall \Delta x: x_0 + \Delta x \in U(x_0)\ \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0\ \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0\right)$.

Определение 1'. f(x) – возрастает (не убывает) в точке x_0, если

$\exists U(x_0): \forall \Delta x \in U(x_0)\ \begin{matrix} x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)\ (f(x) \geq f(x_0)) \\ x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)\ (f(x) \leq f(x_0)) \end{matrix}$

Определение 1''. f(x) – возрастает (не убывает) в точке x_0, если

$\exists \delta > 0: \forall \Delta x : \Delta x < \delta \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$

Определение 2. f(x) – убывает (не возрастает) в точке x_0, если

$\exists U(x_0): \forall \Delta x: x_0 + \Delta x \in U(x_0)\ \frac{\Delta f}{\Delta x} < 0\ \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0\right)$.

Определение 2'. f(x) – убывает (не возрастает) в точке x_0, если

$x > x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)\ (f(x) \leq f(x_0))$

$x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)\ (f(x) \geq f(x_0))$

Определение 2''. f(x) – убывает (не возрастает) в точке x_0, если

$\exists \delta > 0: \forall \Delta x : \Delta x < \delta \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$

Теорема 1:(Необходимое условие возрастания (неубывания) функции в точке x_0)

Если f возрастает (не убывает) в точке x_0 и дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) \geq 0$.

Доказательство:

Т.к. функция возрастает (не убывает), то, по определению 1'' ,

$\exists\ \delta > 0 : |\Delta x| < \delta \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$, а значит и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$. Теорема доказана.

Теорема 1'(Необходимое условие убывания (невозрастания) функции в точке x_0)

Если f убывает (не возрастает) в точке x_0 и дифференцируема в точке, то $f'(x_0) \leq 0$.

Доказательство:

Т.к. функция убывает (не возрастает), то, по определению 2'' ,

$\exists\ \delta > 0 : |\Delta x| < \delta \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$, а значит и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$, теорема доказана.

Теорема 2: (Достаточное условие возрастания)

Если f(x) дифференцируема в точке x_0, причем $f'(x_0) > 0$, то f(x) возрастает в точке x_0.

Доказательство:

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A > 0$, значит

по теореме о сохранении знака:

$\exists\ \delta > 0 : \forall \Delta x : |\Delta x| < \delta \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} > \frac{A}{2} > 0\ \Rightarrow$ f возрастает.

Теорема доказана.

Замечание: если $f'(x_0) \geq 0$, то про возрастание сказать ничего нельзя.
Теорема 2': (Достаточное условие убывания)
Если f(x) дифференцируема в точке x_0, причем $f'(x_0) < 0$, то f(x) убывает в точке x_0.
Доказательство:
По теореме о сохранении знака:

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A < 0$, значит

$\exists\, \delta > 0 : \forall \Delta x : |\Delta x| < \delta \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} < \frac{A}{2} < 0 \Rightarrow$ f(x) убывает.

Теорема доказана.
Замечание: если $f'(x_0) \leq 0$, то про убывание сказать ничего нельзя.

Теорема Ферма:(Необходимое условие существования экстремума)
Если f(x) дифференцируема в точке x_0 и x_0 – точка локального экстремума, то $f'(x_0) = 0$.
Доказательство:
Пусть $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f(x) возрастает в точке x_0, т.е.

$\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$ *при* $\begin{matrix} \Delta x > 0 \Rightarrow \Delta f > 0 \\ \Delta x < 0 \Rightarrow \Delta f < 0 \end{matrix}$, т.е. x_0 – не точка экстремума.

Аналогично невозможен случай $f'(x_0) < 0$, следовательно $f'(x_0) = 0$.
Теорема доказана.

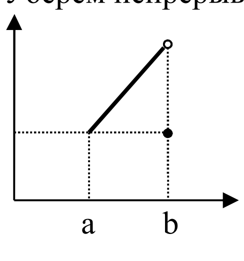
Теорема Ролля.

Теорема:
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и $f(a) = f(b)$, то существует точка $\xi \in (a,b)$, такая, что $f'(\xi) = 0$.
Доказательство:
Так как функция f непрерывна на [a,b], то существует точка x_1, в которой f достигает максимума и точка x_2, в которой f достигает минимума. Рассмотрим 2 случая:

1. Обе точки x_1 и x_2 совпадают с a или b, тогда $f(a) = f(b) = \max f(x) = \min f(x) \Rightarrow f = const$
   И тогда $\forall \xi \in (a,b)$ производная $f'(\xi) = 0$
2. Одна из точек не является концевой отрезка [a,b]. Пусть ξ - та из них, которая $\in (a,b)$, тогда в точке ξ достигается локальный экстремум, кроме того, $\exists f'(\xi)$, так как по условию $f'(x)$ существует $\forall x \in (a,b)$. Поэтому по теореме Ферма $f'(\xi) = 0$, что и требовалось доказать.

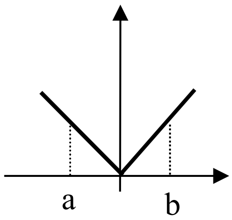
Контрпример 1

Уберем непрерывность в точке b: теорема потеряет силу.

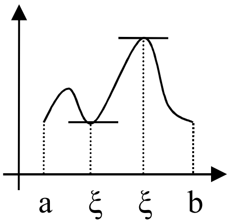


Контрпример 2

Уберем дифференцируемость в одной из точек: теорема потеряет силу.



Теорема Ролля имеет простой *геометрический смысл:* если выполнены все условия теоремы, то на графике функции $y = f(x)$ существует точка $(\xi, f(\xi))$, касательная в которой параллельна оси x.



Физический смысл: при прямолинейном движении если перемещение тела = 0, то существует момент времени, в который скорость тела = 0.

Теорема Коши. Физический смысл.

Теорема: (Коши о среднем)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и имеют производные на интервале (a,b), одновременно не обращающиеся в ноль. При этом $g(b)-g(a)\neq 0$ (что следует из условия $g'(x)\neq 0$). Тогда на интервале (a,b) найдется точка ζ, для которой выполняется неравенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)},\ a<\zeta<b.$$

Доказательство: Вводим функцию $H(x)=(f(b)-f(a))\cdot g(x)-(g(b)-g(a))\cdot f(x)$. Очевидно, что она непрерывна на $[a,b]$ и имеет производную на (a,b), т.к. $f(b)-f(a)$ и $g(b)-g(a)$постоянны. Кроме того, $H(a)=H(b)$, поэтому по теореме Ролля найдется такая точка ζ из (a,b), что $H'(\zeta)=0$.

$H'(\zeta)=(f(b)-f(a))\cdot g'(\zeta)-(g(b)-g(a))\cdot f'(\zeta)\Rightarrow(f(b)-f(a))\cdot g'(\zeta)=(g(b)-g(a))\cdot f'(\zeta)\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$, т.к. по условию $g(b)-g(a)\neq 0$ и $g'(x)\neq 0$ на (a,b).

Теорема доказана.

Физический смысл: Если $f'(x)$ и $g'(x)$ – скорости, то отношение перемещений равно отношению скоростей в какой-то момент времени.

Теорема о среднем Лагранжа.

Теорема:

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет производную на интервале (a,b). Тогда существует на интервале (a,b) точка c, для которой выполняется равенство

$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ **(1),**

причем $(a<c<b)$.

Доказательство:

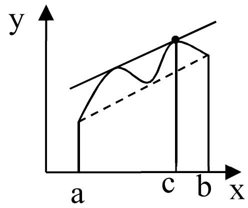
В теореме Коши, возьмем $g(x)=x$. Тогда $g'(x)=1$, $g(a)=a$, $g(b)=b$.

Из теоремы Коши: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ теорема доказана.

Физический смысл:

Найдется момент времени когда $V_{ср}=V_{мгновен}$ (средняя скорость равна мгновенной)

Геометрический смысл:



Теорема Лагранжа утверждает, что если кривая есть график непрерывной на $[a,b]$ функции, имеющей производную на (a,b), то на этой кривой существует точка, соответствующая некоторой абсциссе $c(a<c<b)$ такая, что касательная к кривой в этой точке параллельна хорде, стягивающей концы кривой $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Равенство (1) называется *формулой (Лагранжа) конечных приращений*. Промежуточное значение c удобно записывать в виде $c=a+\theta(b-a)$, где θ есть некоторое число, удовлетворяющее неравенствам $0<\theta<1$. Тогда формула Лагранжа примет вид

$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a))$ $(0<\theta<1)$

Она верна, очевидно, не только для $a<b$, но и для $a \geq b$.

Формула Тейлора для многочленов.

Рассмотрим произвольный многочлен степени n:

(1) $$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

Пусть a – любое фиксированное число, тогда, полагая $x=(x-a)+a$, получим

(2) $$P_n(x)=b_n(x-a)^n+b_{n-1}(x-a)^{n-1}+\ldots+b_1(x-a)+b_0=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-a)^k$$

Это выражение называют разложение многочлена $P_n(x)$ по степеням $(x-a)$. Здесь $b_0,b_1,\ldots,b_n$ – числа, зависящие от a_i и a, – коэффициенты разложения $P_n(x)$ по степеням $(x-a)$.

Подставим в выражение (2) $x=a$, получим

(3) $$P_n(a)=b_0$$

Найдем последовательные производные $P_n(x)$ и подставим в ним $x=a$

$$P_n'(x)=n\cdot b_n(x-a)^{n-1}+\ldots+b_1$$

$$P_n'(a)=b_1$$

$$P_n''(x)=n\cdot(n-1)\cdot b_n(x-a)^{n-2}+\ldots+2b_2$$

$$P_n''(a)=2b_2 \Rightarrow b_2=\frac{P_n''(a)}{2}$$

$$P_n^{(k)}(x)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot b_n(x-a)^{n-k}+\ldots+k!\cdot b_k$$

$$P_n^{(k)}(a)=k!\cdot b_k \Rightarrow b_k=\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}$$

Таким образом, многочлен $P_n(x)$ может быть представлен в виде

$$P_n(x)=\frac{P^n(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots+\frac{P^k(a)}{k!}(x-a)^k+\ldots+P(a)$$

или

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

Последняя формула называется формулой Тейлора для многочлена $P_n(x)$ по степеням $(x-a)$. Отметим, что правая часть этого выражения фактически не зависит от a.

Формула Тейлора для дифференцируемых функций.

Если функция f(x) n раз дифференцируема в точке a, то для нее существует многочлен

$Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ - это многочлен Тейлора n-го порядка функции f(x) в точке a. Обозначим за $R_{n+1}(x) = f(x) - Q(x)$ - на сколько многочлен отличается от самой функции. $R_{n+1}(x)$ называют остаточным членом. Нужно доказать, что для «хороших» функций $R_{n+1}(x)$ будет достаточно мало. Докажем теорему, которую сформулируем в конце. =))

Рассмотрим функцию f; зафиксируем точку a, в которой будем раскладывать функцию, и произвольную точку x, такую что f(x) n-1 раз дифференцируема на [a,x] и n раз дифференцируема на (a,x). В точке a функция дифференцируема n-1 раз, значит для нее можно составить многочлен Тейлора n-1 порядка.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

Представим $R_n(x)$ в виде: $R_n(x) = (x-a)^p H,\ x \neq a$, где p – произвольное число, H – некоторая функция, зависящая от x.

Рассмотрим функцию: $F(u) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(u)}{k!}(x-u)^k + (x-u)^p H$

$$F(x) = f(x)$$
$$F(a) = f(x)$$

Рассмотрим F(u) на [a,x]: F(u) непрерывная на [a,x], дифференцируема на (a,x), F(x)=F(a) $\Rightarrow$ по теореме Ролля $\exists U^* \in (a,x): F'(U^*) = 0$

$F(u) = f(u) + \frac{f'(u)}{1!}(x-u) + \frac{f''(u)}{2!}(x-u)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(u)}{(n-1)!}(x-u)^{n-1} + (x-u)^p H$; продифференцируем:

$F'(u) = \cancel{f'(u)} + \cancel{\frac{f''(u)}{1!}(x-u)} - \cancel{f'(u)} + \cancel{\frac{f'''(u)}{2!}(x-u)^2} - \cancel{\frac{2}{2!}(x-u)f''(u)} + \ldots + \frac{f^{(n)}(u)}{(n-1)!}(x-u)^{n-1} - p(x-u)^{p-1}H$ - и почти все взаимно уничтожается.

$$F'(U^*) = 0$$

$$\frac{f^{(n)}(U^*)}{(n-1)!}(x-U^*)^{n-1} = p(x-U^*)^{p-1}H$$

$$H = \frac{f^{(n)}(U^*)\cdot(x-U^*)^{n-p}}{p(n-1)!}$$

$U^* \in (a,x) \Leftrightarrow U^* = a + \theta(x-a);\ 0 < \theta < 1$, тогда $(x-U^*)^{n-p} = \left((x-a)(1-\theta)\right)^{n-p}$

$H = \frac{f^{(n)}(U^*)\cdot\left((x-a)(1-\theta)\right)^{n-p}}{p(n-1)!}$; $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(U^*)(x-a)^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}$ Подставим теперь p:=n;

$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(U^*)(x-a)^n}{n!}, U^* \in (a,x)$ - это остаточный член в форме Лагранжа. Подставим теперь p:=1

$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))(x-a)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}, U^* \in (a,x)$ - это остаточный член в форме Коши.

Рассмотрим форму Лагранжа:

Пусть теперь f имеет непрерывную n-ю производную в точке a. Это означает, что на [a,x) функция n раз дифференцируема. Значит f(x) можно представить в виде:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)\,;\quad R_n(x)=\frac{f^{(n)}(U^*)(x-a)^n}{n!},U^*\in(a,x)$$

$f^n(U^*)=f^{(n)}(a)+\varepsilon(x);\varepsilon(x)\to 0$ *при* $x\to 0$, т.к. производная непрерывна. Тогда $R_n(x)$ можно представить в виде:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{\varepsilon(x)}{n!}(x-a)^n\,;\ \varepsilon(x)(x-a)^n=\overline{\overline{O}}\left((x-a)^n\right)$$

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\overline{\overline{O}}\left((x-a)^n\right)$ - это формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема

Если функция n-1 раз дифференцируема на [a,x], n раз на (a,x), то она раскладывается по формуле Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и Коши. Если функция f(x) имеет непрерывную n-ю производную в точке a, то в окрестности точки a она раскладывается по формуле Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа, Коши и Пеано.

Теорема (о единственности разложения функции по формуле Тейлора в форме Пеано)

Если

$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+\overline{\overline{O}}\left((x-x_0)^n\right)=a_0'+a_1'(x-x_0)+a_2'(x-x_0)^2+...+a_n'(x-x_0)^n+\overline{\overline{O}}\left((x-x_0)^n\right)$, то $\forall i\ a_i=a_i'$, a_i - коэффициенты из формулы Тейлора. Т.е. если есть какие-то другие коэффициенты a_i', то они тоже есть коэффициенты из формулы Тейлора: $a_i=a_i'=\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$

Доказательство.

Устремим $x\to x_0$, получим, что $a_0=a_0'$, т.к. $\overline{\overline{O}}\left((x-x_0)^n\right)\to 0$; тогда

$$a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+\overline{\overline{O}}\left((x-x_0)^n\right)=a_1'(x-x_0)+...+a_n'(x-x_0)^n+\overline{\overline{O}}\left((x-x_0)^n\right)$$

сократив на $(x-x_0)$, получим:

$a_1+...+a_n(x-x_0)^{n-1}+\overline{\overline{O}}\left((x-x_0)^{n-1}\right)=a_1'+...+a_n'(x-x_0)^{n-1}+\overline{\overline{O}}\left((x-x_0)^{n-1}\right)$ и опять же $\overline{\overline{O}}\left((x-x_0)^{n-1}\right)\to 0$, если $n-1>1$.

И так мы можем проделать до n-го коэффициента. Теорема доказана.

Формула Тейлора для важнейших элементарных функций.

Общий вид формулы Тейлора для функций:

$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$, где $R_n(x)$ - остаточный член.

При $a=0$ получаем так называемую формулу Маклорена.

Формула Тейлора для важнейших элементарных функций:

1) $f(x)=e^x$,

$x_0=0$, $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$. Отсюда получаем, что

$e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}x^k+R_n(x)$. $R_n(x)=\frac{f^{(n)}(0+\theta(x-0))}{n!}x^n$,

$R_n(x)=\dfrac{e^{\theta x}x^n}{n!}$, где $0<\theta<1$. И в итоге имеем: $|R_n(x)|\le\dfrac{e^x|x^n|}{n!}$, $n\to\infty$, $R_n(x)\to 0$.

<u>Пример</u>:

Пусть $x_0=1$, тогда получим:

$$e=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}+R_n(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{(n-1)!}+R_n(1),\ R_n(1)\le\frac{1}{n!}.$$

2) $f(x)=\sin x$,

Поскольку $f^{(n)}(x)=\sin(x+\dfrac{\pi n}{2})$, $f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & -\text{при четном n}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & -\text{при нечетном n}\end{cases}$, формула имеет вид:

$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+...+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\dfrac{x^n}{n!}+R_{n+2}(x)$, где n – нечётное число, а остаточный член в форме Лагранжа равен $R_{n+2}(x)=\dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\sin(\theta x+\dfrac{\pi n}{2}+\pi)$, $0<\theta<1$.

Очевидно, что для остаточного члена справедлива следующая оценка: $|R_{n+2}(x)|\le\dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}$.

3) $f(x)=\cos x$,

Поскольку $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$, то

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k}+R_{2k}(x),\quad R_{2k}(x)=\frac{\cos\left(\theta x+\frac{\pi}{2}(2k+1)\right)}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1},$$

$0<\theta<1$, $\forall x\ R_{2k}(x)\to 0$, $|x|<1$.

4) $f(x)=\ln(1+x)$,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!,$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!}{k!}\cdot x^k+R_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{(-1)^{n-2}\cdot x^{n-1}}{n-1}+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{n!\cdot(1+\theta x)}\cdot x^n,\quad |R_n(x)|=\frac{1}{n}\cdot\frac{|x|^n}{|1+\theta x|^n}\le\frac{|x|^n}{n}\to 0\ \text{при}\ n\to\infty,$$

Рассмотрим остаточный член в форме Коши:

$$R_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(n-1)!\cdot(1+\theta x)^n}\cdot x^n\cdot(1-\theta)^{n-1},\quad |R_n(x)|=\frac{1\cdot|x|^n}{(1-\theta|x|)}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}\right)^{n-1},\quad \frac{1-\theta}{1-\theta|x|}<1,$$

$|R_n(x)|<\dfrac{|x|^n}{1-\theta|x|}$, где $n\to\infty$, $R_n(x)\to 0$ и $-1<x<0$.

5) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ **,**

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)$,

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n-1)}{n!}\cdot x^n+\overline{\overline{O}}(x^n),$$

Остаточный член в форме Пеано.

Правило Лопиталя. Случай 0/0.

<u>*Теорема 1:*</u>(Неопределенность вида 0/0)

Пусть f(x) и g(x) дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

$g(x)\neq 0$ в этой окрестности и $g'(x)\neq 0$ в той же окрестности, тогда, если $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, то

$$\exists\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

<u>*Доказательство:*</u>

1) а – конечное.

Доопределим функции: f(a)=0 и g(a) = 0; f(x) и g(x) непрерывны на [a;x]

$x+\varepsilon\in^{0} U(a)$

$\exists\xi\in(a;x):\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ при $x\to a,\xi\to a$

f(a)=g(a)=0 =>

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

2) $a=\infty$

Пусть $\frac{1}{x}=t$ $x\to\infty;t\to 0$

Введем функции $F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $G(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{(f(\frac{1}{t}))'}{(g(\frac{1}{t}))'}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(\frac{1}{t})*(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})*(-\frac{1}{t^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теорема доказана.

<u>*Замечание:*</u> обратное неверно, т.е. из существования предела функций не следует существование предела производных.

<u>*Контрпример:*</u> $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$

Правило Лопиталя. Случай ∞/∞ **.**

<u>*Теорема:*</u>

Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a и $g(x)\neq 0$ и $g'(x)\neq 0$ в некоторой выколотой окрестности точки a, тогда, если

$\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство:

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n\to a$, $x_n\neq a$, тогда по определению предела по Гейне

$$f(x_n)\to\infty \quad \text{и} \quad g(x_n)\to\infty$$

Тогда $\forall k\ \exists n_{k_1}:\forall n'_k>n_{k_1}\quad \left|f(x_{n'_k})\right|>k\left|f(x_k)\right|$ - для f(x) определение предела вида |f(x)|>C, где C = $k\left|f(x_k)\right|$

$\forall k\ \exists n_{k_2}:\forall n''_k>n_{k_2}\quad \left|g(x_{n''_k})\right|>k\left|g(x_k)\right|$ - аналогично для g(x)

Тогда можно найти такой номер, для которого будут выполняться оба неравенства:

$$n_k>\max\{n_{k_1},n_{k_2}\}$$

$$\left|f(x_{n_k})\right|>k\left|f(x_k)\right|,\quad \left|g(x_{n_k})\right|>k\left|g(x_k)\right|$$

Используя термины $\overline{\overline{O}}$ можно записать:

$f(x_k)=\overline{\overline{O}}(f(x_{n_k}))$, $g(x_k)=\overline{\overline{O}}(g(x_{n_k}))$ Пояснение: $\dfrac{|f(x_k)|}{|f(x_{n_k})|}<\dfrac{1}{k}$, а т.к. $k\to\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|f(x_k)|}{|f(x_{n_k})|}=0$

Найдем теперь предел отношения $f(x_{n_k})$ к $g(x_{n_k})$:

$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(x_{n_k})}{g(x_{n_k})}=$ [можно добавить или отнять $\overline{\overline{O}}$, предел от этого не изменится]

$=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(x_{n_k})-f(x_k)}{g(x_{n_k})-g(x_k)}=$ [воспользуемся теоремой Коши: $\exists\xi\in(x_k,x_{n_k})$ или $\in(x_{n_k},x_k)$ - смотря, что больше]

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}=\begin{bmatrix} k\to\infty \\ x_k\to a \\ x_{n_k}\to a \\ \xi_k\to a\end{bmatrix}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ - по определению предела по Гейне.

Мы получили еще не совсем теорему о сходимости последовательности через подпоследовательности, (ее формулировка: если $\{x_n\}$ такова, что из любой её подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ можно извлечь в свою очередь подпоследовательность $\{x_{n_{k_l}}\}$, сходящуюся к конечному или бесконечному A, то предел $\{x_n\}$=A) мы пока что только из самой последовательности выделили сходящуюся подпоследовательность, а это еще не значит, что сама последовательность сходится.

Теперь возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ и её произвольную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, тогда по только что доказанному из подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ мы можем выделить подпоследовательность $\{x_{n_{k_l}}\}$, сходящуюся к $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, т. е. $\lim\limits_{l\to\infty}\dfrac{f(x_{n_{k_l}})}{g(x_{n_{k_l}})}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}$

Теперь мы взяли произвольную последовательность, поэтому $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Причем важно, чтобы предел отношения производных существовал. Теорема доказана.

Раскрытие неопределенностей вида $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, $\infty-\infty$, 1^∞.

Кроме рассмотренных неопределенностей $\frac{\infty}{\infty}$ и $\frac{0}{0}$, встречаются неопределенности вида $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, $\infty-\infty$, 1^∞, определение которых очевидно. Эти неопределенности сводятся к неопределенностям $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$ алгебраическими преобразованиями.

1) *Неопределенность* $0\cdot\infty$ *(* $f(x)g(x), f(x)\to 0, g(x)\to\infty$ *при* $x\to a$ *).*

   Ясно, что $f(x)g(x)=\frac{f}{1/g}\left(\frac{0}{0}\right)$ или $f\cdot g=\frac{g}{1/f}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

2) *Неопределенности вида* 1^∞, 0^∞, ∞^0 *для выражения* f^g *сводятся к неопределенности* $0\cdot\infty$.

   Согласно определению этой функции $f^g=e^{g\ln f}(f>0)$. $\lim\limits_{x\to a} g\ln f=k$, то $\lim\limits_{x\to a} f^g=e^k$.

3) *Неопределенность* $\infty-\infty$ *(* $f(x)-g(x)$, $f\to+\infty$, $g\to+\infty$ *при* $x\to a$ *)*

   Легко видеть, что $f-g=\frac{1}{\frac{1}{f}}-\frac{1}{\frac{1}{g}}=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}\left(\frac{0}{0}\right)$.

Достаточное условие невозрастания (неубывания) функции на отрезке. Условие постоянства функции на отрезке.

<u>*Определение:*</u> Функция f называется строго возрастающей на отрезке [a,b], если для любых точек x_1, x_2 из [a,b], удовлетворяющих неравенству $x_1<x_2$, имеет место неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

<u>*Определение:*</u> Функция f называется неубывающей на [a,b], если из того, что $x_1,x_2\in[a,b]$ и $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)\le f(x_2)$.

<u>*Определение:*</u> Функция f называется строго убывающей на отрезке [a,b], если из того, что $x_1,x_2\in[a,b]$ и $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)>f(x_2)$.

<u>*Определение:*</u> Функция f называется невозрастающей на [a,b], если из того, что $x_1,x_2\in[a,b]$ и $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)\ge f(x_2)$.

<u>*Пример:*</u> $f(x)=\frac{1}{x}$

Если $f(x)$ убывает на $(0;+\infty)$ и на $(-\infty;0)$, то нельзя говорить, что $f(x)$ убывает на $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

<u>*Теорема 1*</u>: (Достаточное условие возрастания (неубывания) и убывания (невозрастания) функции на отрезке)

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b) и $\forall x\in(a,b)$

1) $f'(x)\ge 0\Rightarrow f$ - неубывающая на $[a,b]$
2) $f'(x)\le 0\Rightarrow f$ - невозрастающая на $[a,b]$
3) $f'(x)>0\Rightarrow f$ - возрастающая на $[a,b]$

4) $f'(x)<0 \Rightarrow f$ - убывающая на $[a,b]$

Доказательство:

$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ $x_1 < x_2$ $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ удовлетворяет теореме Лагранжа, т.е.

$\exists \xi \in (x_1, x_2): f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

1) Т.к. $f'(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, т.е. функция – неубывающая.

2), 3) и 4) доказываются аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 2: (Условие постоянства функции на отрезке)

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b) и $\forall x \in (a,b)$ $f'(x)=0$, то $\forall x \in [a,b]$ $f(x)=const$

Доказательство:

Зафиксируем точку $x_0 \in [a,b]$, тогда $\forall x \in [a,b]$ на отрезках $[x_0, x]$ и $[x, x_0]$ $\exists \xi \in [x_0, x]$ или $\in [x, x_0]$ такое, что на этих отрезках будет выполняться теорема Лагранжа:

$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$

А т.к. $f'(\xi) = 0$, $f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x) = const$.

Теорема доказана.

Достаточные условия экстремума.

Теорема 1: (первое достаточное условие существования экстремума)

Если $f(x)$ дифференцируема в $\overset{o}{U}(x_0)$, f' имеет разные знаки слева и справа от $x_0 \Rightarrow x_0$ – точка экстремума.

Доказательство:

Т.к $f(x)$ с одной стороны возрастает, с другой убывает, т.е.

$\forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \Delta f > 0 (\uparrow x_0 \downarrow)$ - max

$\forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \Delta f < 0 (\downarrow x_0 \uparrow)$ - min

Теорема доказана.

Теорема 2: (второе достаточное условие существования экстремума)

Если в x_0 $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$, то x_0 - точка min; если $f''(x_0)<0$, то x_0 - точка max

Доказательство:

$f'(x_0)=0$, существует $f''(x_0) \Rightarrow f'$ определена в $U(x_0)$.

Рассмотрим 2 случая:

1) $f'(x)$ в точке x_0 возрастает ($f''(x_0)>0$)

2) $f'(x)$ в точке x_0 убывает ($f''(x_0)<0$)

----

1) $f''(x_0)>0$, $f'(x)$ возрастает, $f'(x_0)=0$ =>

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in U(x_0) \quad f'(x)<0 \text{ при } x<x_0 \\ \forall x \in U(x_0) \quad f'(x)>0 \text{ при } x>x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 - \text{точка минимума}$$

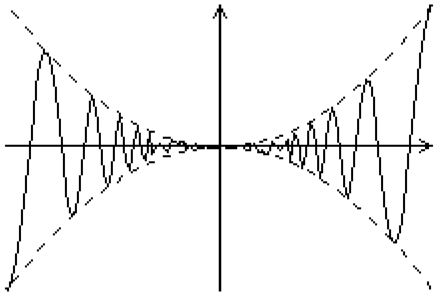
2) Аналогично для $f''(x_0)<0$

Теорема доказана.

Выпуклость функции в точке. Достаточное условие.

Определение: Функция *f(x)* называется выпуклой вверх (вниз) в точке x_o, если найдется такая окрестность $U(x_o)$, что для всех точек из этой окрестности $U(x_o)$ график функции *f(x)* лежит не выше (не ниже) касательной, проведенной в точке x_o.

Замечание: Говорить о выпуклости в точке можно только если функция дифференцируема в этой точке.



Контрпример: $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$. *0* - ни точка выпуклости вверх, ни точка выпуклости вниз, ни точка перегиба, потому что в любой окрестности *U(0)* есть точки в которых функция выпукла вверх и вниз.

Теорема: (Достаточное условие выпуклости вверх (вниз)).

Если функция *f* в точке x_o имеет непрерывную вторую производную $f''(x_0)$, и при этом $f''(x_0)$*<0 (>0)*, то *f* выпукла в вверх (вниз) в точке x_o.

Доказательство:

Т.к. функция f имеет непрерывную вторую производную $f''(x_0)$, то эта производная определена в некоторой окрестности $U(x_0)$. Разложим функцию f по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{(f''(x_0) + \varepsilon(x))(x - x_0)^2}{2}.$$

Причем функция $y_{кас}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ является графиком касательной к функции f в точке x_0. Поэтому если $f''(x_0)$>0, то f(x)> $y_{кас}$ (x) в окрестности $U(x_0)$ (т.к. ε(x)→0, при x→0), а если $f''(x_0)$ <0, то f(x)< $y_{кас}$ (x) в $U(x_0)$.

Точка перегиба. Достаточные условия. Общая теорема о точках перегиба и экстремума.

Определение.

Точка x_0 называется точкой перегиба, если в этой точке график переходит через сторону касательной (разные выпуклости слева и справа).

Замечание.

Точка перегиба существует только если $f \in C, f \in D$. Пример $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$

Теорема 1*(Достаточное условие существования точки перегиба).*

Если функция f имеет $f'''(x)$ непрерывной в точке x_0, $f''(x_0)$ =0 и $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 точка перегиба.

Доказательство:

В этом случае: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_2(x)$, $r_2(x) = \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0 + \theta(x - x_0)$ (формула Тейлора), или $f(x) = y_{кас} + r_2(x)$.

В силу непрерывности f''' в x_0 и того факта, что $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ $f'''(x_0 + \theta(x - x_0))$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки x_0. С другой стороны, множитель $(x - x_0)^3$ меняет знак при переходе x через x_0, а вместе с ним и величина $r_2(x)$ (равная превышению точки кривой над касательной в x_0) меняет знак при переходе x через x_0.

Теорема доказана.

Теорема 2(Общая теорема о точках перегиба и экстремума.)

Пусть функция f обладает следующими свойствами: $f''(x_0) = ... = f^{(n)}(x_0) = 0,$

$f^{(n+1)}(x)$ ***непрерывна в*** x_0 ***и*** $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$***. Тогда, если*** n ***- нечетное число, то кривая*** $y = f(x)$ ***обращена выпуклостью вверх или вниз в зависимости от того, будет ли*** $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ ***или*** $f^{(n+1)}(x_0) > 0$***, а если*** n ***четное, то*** x_0 ***есть точка перегиба кривой.***

Доказательство:

1) Разложим по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$$

$f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$ того же знака, что $f^{(n+1)}(x_0)$, $|x - x_0|^{n+1} > 0$, $x \neq x_0$, если n - нечетное то $f(x) > y_{кас}(x)$ или $f(x) < y_{кас}(x) \Rightarrow$ **всегда,** x_0 **- не точка перегиба.**

Если n - четная $\dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$

С одной стороны $f(x) > y_{кас}(x)$, с другой стороны $f(x) < y_{кас}(x) \Rightarrow x_0$ - точка перегиба. n - четное.

2) $f(x) > f(x_0)$, $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ - min

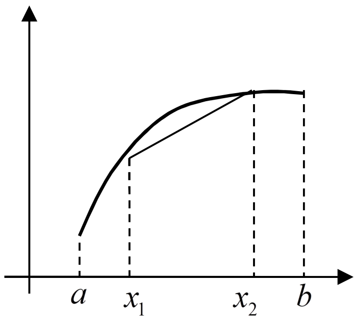
$f(x) < f(x_0)$, $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ - max

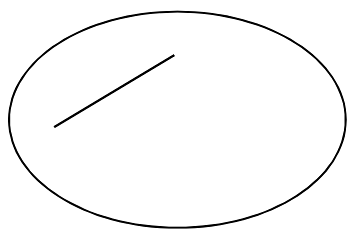
Выпуклость функции на отрезке. Необходимое и достаточное условие.

Определение: По определению кривая $f(x)$ называется выпуклой вниз (вверх) на отрезке [a,b], если любая дуга этой кривой с концами в точках x_1, x_2 ($a \le x_1 < x_2 \le b$)расположена не выше (не ниже) стягивающей ее хорды.

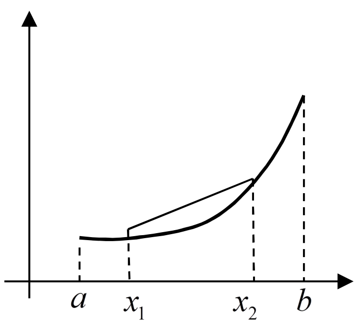
Определение: Множество называется выпуклым, если для любых двух точек этого множества, отрезок, соединяющий их лежит также в этом множестве.

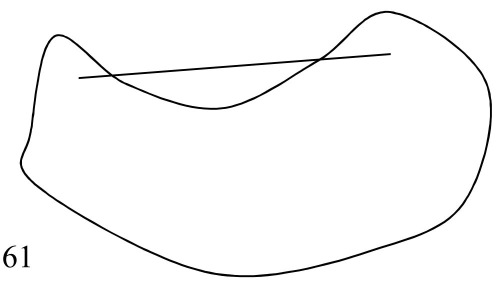
Замечание: Если функция выпукла на отрезке, то это не означает, что она выпукла в каждой его точке.





Выпуклость вверх *Выпуклое множество*





Выпуклость вниз *Невыпуклое множество*

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие выпуклости на отрезке)
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на [a,b] и имеет вторую производную на (a,b). Для того чтобы кривая $y = f(x)$ была выпуклой вверх (вниз) на [a,b], необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f''(x) \le 0$ ($f''(x) \ge 0$) для всех $x \in (a,b)$.
Доказательство:
$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть наша кривая выпукла вверх на [a,b]. Тогда для любых x и h>0 таких, что x, x+2h$\in$[a,b], имеет место неравенство $f(x+h) \ge (f(x) + f(x+2h))/2$, откуда $f(x+h) - f(x) \ge f(x+2h) - f(x+h)$.
Если теперь x_1 и x_2 - произвольные точки интервала (a,b), то, положив h = (x_2 - x_1)/n, будем иметь
$f(x_1 + h) - f(x_1) \ge f(x_1 + 2h) - f(x_1 + h) \ge ... \ge f(x_2) - f(x_2 - h)$.
Таким образом, $(f(x_1 + h) - f(x_1))/h \ge (f(x_2 - h) - f(x_2))/(-h)$, и, переходя к пределу при $h \to 0$, получим неравенство $f'(x_1) \ge f'(x_2)$, показывающее, что производная f' на интервале (a,b) не возрастает. Но тогда $f''(x) \le 0$ на (a,b).
$\boxed{\Leftarrow}$ Обратно, пусть $f''(x) \le 0$ и $a < x_1 < x_2 < b$. Нам нужно доказать, что функция $F(x) = f(x) - f(x_1) - m(x - x_1)$, где $m = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$, удовлетворяет неравенству $F(x) \ge 0$ на $[x_1, x_2]$. Допустим, что это не так. Тогда $\min_{x_1 \le x \le x_2} F(x) = F(x_0) < 0$ и $x_1 < x_0 < x_2$. Поэтому $F'(x_0) = 0$.
Применяя формулу Тейлора, получим
0= $F(x_2) = F(x_0) + \dfrac{(x_2 - x_0)^2}{2!} F''(x_0 + \theta(x_2 - x_0)) = F(x_0) + \dfrac{(x_2 - x_0)^2}{2!} f''(x_0 + \theta(x_2 - x_0))$. Но в правой части этой цепочки равенств первый член по предположению отрицательный, а второй неположительный, поэтому правая часть меньше нуля, и мы пришли к противоречию.
Доказательство в случае $f''(x) \ge 0$ аналогично. Теорема доказана.

Асимптота. Уравнение наклонной асимптоты.

Определение: Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой функции *f(x)* при $x \to +\infty(-\infty)$, если *f* определена в окрестности точки $+\infty(-\infty)$ и расстояние между графиком и прямой стремится к нулю.
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} r(\Gamma_{f(x)}, \Gamma_{ac}) = 0$
Уравнение наклонной асимптоты:
Пусть $y = kx + b$ - асимптота при $x \to +\infty$

$A(x; f(x))$, $y = kx + b$, $kx + b - y = 0$, $r(\Gamma_{f(x)}, \Gamma_{ac}) = \left| \dfrac{kx + b - y}{\sqrt{1 + k^2}} \right| \to 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (kx + b - y) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x} \right) = 0$, значит $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$,

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$

<u>*Замечание:*</u> возможен случай, когда k существует, а b – нет, в этом случае асимптот нет!

Тема 6. Интегральное исчисление. Лекции 12-14.

Первообра́зная. Неопределенный интеграл. Свойства.

<u>*Определение 1:*</u> Функция F называется первообразной функции f на интервале (a,b), если функция f непрерывна на интервале (a,b), и для всех x из этого интервала выполняется равенство: F´(x)=f(x).

<u>*Замечание:*</u> Вместо (a,b) можно рассматривать [a,b], (a,b] и [a,b), но нужно будет говорить про односторонние производные: $F'_+(a)$=f(a), и $F'_-(b)$=f(b).

<u>*Пример*</u>

$f(x) = \frac{1}{x}$.

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0. \Rightarrow F(x) = \ln|x|$

на промежутке (-∞,0) и на (0,+∞).

<u>*Теорема:*</u>(О множестве всех первообразных).

Пусть F(x) является первообразной функции f(x) на на промежутке I, тогда функции вида F(x)+C и только они являются первообразными функции f(x), где C – произвольная константа.

<u>*Доказательство:*</u>

Пусть функция F(x) – первообразная функции f(x), тогда F´(x)=f(x) и (F(x)+C)´=f(x). Пусть функции F и G – первообразные функции f(x) на промежутке I (нужно доказать, что они отличаются на константу). Тогда (F-G)´=0$\Rightarrow$F-G=C (по теореме о функции, имеющей нулевую производную). Теорема доказана.

<u>*Определение 2:*</u> Множество всех первообразных функции f(x) на промежутке I называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx$. При этом если функция F(x) – первообразная функции f(x), то $\int f(x)dx = F(x) + C$.

<u>*Пример:*</u>

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

<u>*Свойства первообразных и неопределенного интеграла.*</u>

1. Пусть функция f(x) имеет первообразную F(x) на промежутке I и функция g(x) имеет первообразную G(x) на промежутке I, тогда функция f(x)±g(x) будет иметь первообразную F(x)±G(x) на промежутке I. Для интегралов: $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

<u>*Замечание:*</u> Обратное неверно! Из существования интеграла $\int (f(x) \pm g(x))dx$ не следует существование интегралов $\int f(x)dx$ и $\int g(x)dx$.

Первообразной функции k·f(x) является функция k·F(x). Для интегралов: $\int kf(x)dx = kF(x) + C$.

2. Первообразной производной функции f´(x) является сама функция f(x). Для интегралов: $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

3. $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)$ (по определению).

Замена переменной в неопределенном интеграле.

Основную роль в интегральном исчислении играет формула замены переменных (или подстановки) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt + C = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) + C$ (1).

В этой формуле предполагается, что $x = \varphi(t)$ есть непрерывно дифференцируемая функция на некотором интервале изменения t, а $f(x)$ - непрерывная функция на соответствующем интервале или отрезке оси x. Докажем это утверждение. Слева в (1) стоит функция, которая является первообразной от $f(x)$. Ее производная по t равна:

$$\frac{d}{dt}\int f(x)dx = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)\frac{dx}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Следовательно, если ввести в этой функции подстановку $x = \varphi(t)$, то получится первообразная от функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Интеграл же справа есть, по определению, некоторая первообразная от $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Но две первообразные для одной и той же функции отличаются на некоторую постоянную C. Это и записано в виде первого равенства (1). Что касается второго, то оно носит формальный характер - мы просто уславливаемся писать: $\int F(t)\varphi'(t)dt = \int F(t)d\varphi(t)$

Пример: $\int x\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int \cos x^2 dx^2 = \frac{\sin x^2}{2} + C$.

Интегрирование по частям неопределенного интеграла.

Пусть даны U и V, тогда по правилу интегрирования по частям

$$\int U\,dV = U\cdot V - \int V\,dU$$

$$\int U\cdot V'dx = U\cdot V - \int V\cdot U'dx$$

$$U\cdot V' = (U\cdot V)' - V\cdot U'$$

$$(U\cdot V)' = U\cdot V' + V\cdot U'$$

Пример 1:

$$\int x\cdot\cos x\,dx = \begin{bmatrix} U = x & dV = \cos x\,dx \\ dU = dx & V = \sin x \end{bmatrix} = \sin x\cdot x - \int \sin x\,dx = x\cdot\sin x + \cos x + C$$

Пример 2:

$$\int (x^2+1)\cdot e^{2x}dx = \begin{bmatrix} U = x^2+1 & dV = e^{2x}dx \\ dU = 2x\,dx & V = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix} = (x^2+1)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int x\cdot e^{2x}dx = \begin{bmatrix} x = U & dV = e^{2x}dx \\ dx = dU & V = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(x^2+1)\cdot e^{2x}}{2} - (x\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx) = \frac{e^{2x}}{2}(x^2 - x + \frac{3}{2}) + C$$

Пример 3:

$$\int \ln x\,dx = \begin{bmatrix} U = \ln x & dV = dx \\ dU = \frac{dx}{x} & V = x \end{bmatrix} = x\cdot\ln x - \int dx = x\cdot\ln x - x + C$$

Пример 4:

$$\int x\cdot\operatorname{arctg} x\,dx = \begin{bmatrix} U = \operatorname{arctg} x & dV = x\,dx \\ dU = \frac{dx}{1+x^2} & V = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{\operatorname{arctg} x\cdot x^2}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg} x\cdot x^2}{2} - \frac{1}{2}(\int dx - \int\frac{dx}{x^2+1}) = \operatorname{arctg} x\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

Правило:

При интегрировании выражений вида $\int P(x)\cdot f(x)\,dx$, где P(x)-многочлен,

Если $f(x): \cos\alpha x, \sin\alpha x, e^{\alpha x}$ за U принимаем

$U = P(x)$

$dV = f(x)\,dx$

Если $f(x): \arccos\alpha x, \arcsin\alpha x, \mathrm{arctg}\,\alpha x, \ln x$ за U принимаем

$U = f(x)$

$dV = P(x)\,dx$

<u>Пример5</u>.

$$\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx = \begin{bmatrix} U = e^{ax} & dV = \cos bx\,dx \\ dU = a\cdot e^{ax}dx & V = \frac{1}{b}\sin bx \end{bmatrix} = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} U = e^{ax} & dV = \sin bx\,dx \\ dU = a\cdot e^{ax}dx & V = -\frac{1}{b}\cos bx \end{bmatrix} = \frac{e^{ax}\cdot\sin bx}{b} - \frac{a}{b}(-\frac{1}{b}e^{ax}\cdot\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx) =$$

$$= \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx$$

$$(1+\frac{a^2}{b^2})\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{b^2} + C'$$

$$\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{(a^2+b^2)} + C$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

1. $\int \frac{\partial x}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n}\partial x = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c, \qquad n \neq 1$

2. $\int \frac{\partial x}{x-a} = \ln|x-a| + C$

3. $\int \frac{\partial x}{x^2-a^2} = \int \frac{\partial x}{(x-a)(x+a)} \qquad (1)$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

$$A(x+a) + B(x-a) = 1$$

$$x=-a: B = -\frac{1}{2a} \qquad x=a: A = \frac{1}{2a}$$

$$(1) = \frac{1}{2a}(\int\frac{\partial x}{x-a} - \int\frac{\partial x}{x+a}) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \int\frac{\partial x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$

4. $\int\frac{\partial x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{\partial x}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\int\frac{\partial\frac{x}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$

5. $\int\frac{\partial x}{x^2+px+q} = \int\frac{\partial x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}$

5.1 $\quad q - \frac{p^2}{4} = 0 \quad x + \frac{p}{2} = y \qquad \int\frac{\partial y}{y^2} = -\frac{1}{y} + C$

5.2 $\quad q - \frac{p^2}{4} < 0 \qquad q - \frac{p^2}{4} = -a^2 \qquad \int\frac{\partial x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - a^2}$

5.3 $\quad q - \frac{p^2}{4} > 0 = a^2 \qquad \int\frac{\partial x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2}$

6. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\partial x = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)-\frac{Mp}{2}+N}{x^2+px+q}\partial x = \frac{M}{2}\int \frac{\partial(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{\partial x}{x^2+px+q} = \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + сл.5$

7. $\int \frac{\partial x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^{2n}}\int \frac{\partial x}{\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)^n} = \frac{1}{a^{2n-1}}\int \frac{\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)^n} = \int \frac{\partial x}{(x^2+1)^n} =$

$$\int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n}\partial x = \int \frac{\partial x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2}\int \frac{x*2x}{(x^2+1)^n}\partial x = \begin{bmatrix} u = x & \partial v = \frac{2x}{(x^2+1)^n} \\ \partial u = \partial x & V = \frac{1}{(1-n)(x^2+1)^{n-1}} \end{bmatrix} =$$

$I_n \to I_{n-1} \to \ldots \to I_1 = \operatorname{arctg} x$

8. $\int \frac{\partial x}{(x^2+px+q)^n} = \left[q-\frac{p^2}{4} > 0\right] = \int \frac{\partial x}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}$ -случай 7

9. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\partial x = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{(x^2+px+q)^n}\partial x$ Случай 8.

$$= \frac{M}{2}\int \frac{\partial(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{\partial x}{(x^2+px+q)^n}$$

Интегрирование рациональных дробей.

Пусть нужно найти неопределенный интеграл $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ от рациональной действительной дроби.

Если степень многочлена Pk не меньше степени многочлена Qn ($k \geq n$), то прежде всего разделим P на Q : $\frac{P}{Q} = R + \frac{P_1}{Q}$

Многочлен R интегрируется без труда, а P_1/Q – правильная действительная дробь. Все трудности сводятся к интегрированию правильной дроби, которую мы снова обозначим через P/Q и представим в виде:

$$R(x) = \frac{P_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Тогда пусть $k < n$, $b_n = 1$

1 случай.

Знаменатель содержит простые действительные корни, тогда его можно разложить на простейшие множители: (см.Теор.1)

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$ Тогда

$$\frac{P_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_n)} = [\text{приведем к общему знаменателю}] = \frac{A_1(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \ldots + A_n(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}$$

Приравнивая тождественно равные числители, получим:

$$a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = A_1(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \ldots + A_n(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

Существуют 2 метода нахождения A_i :

1) сравниваем коэффициенты при x с одинаковыми степенями; однако этот метод очень трудоемкий.
2) Т.к. равенства тождественны, можем взять $x := x_1$, тогда $P_k(x_1) = A_1(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)$. Так, подставляя поочередно $x_1 \ldots x_n$ найдем все A_i

Т.о., мы получили сумму элементарных дробей, которые можем легко проинтегрировать.

Пример $\int \frac{2x+5}{(x-1)(x+1)(x-2)}dx$

2 случай.

Знаменатель содержит кратные корни, тогда его можно представить в виде:

$$J=(x-x_1)^{s_1}(x-x_2)^{s_2}...(x-x_n)^{s_n}.$$

Пусть существуют n различных корней с кратностями $s_1,...,s_n$, тогда

$\frac{P_k(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{A_{s_1}}{(x-x_1)^{s_1}}+...+\frac{N_1}{(x-x_n)}+...+\frac{N_{s_n}}{(x-x_n)^{s_n}}$ - и делаем все так же, как и в предыдущем примере.

Пример $\int \frac{2x+5}{(x-1)^2(x-2)}dx$

3 случай.

Знаменатель содержит кратные корни и многочлены, имеющие комплексные корни;

$J=(x-x_1)^{s_1}(x-x_2)^{s_2}(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)$, где многочлены $(x^2+p_1x+q_1)$, $(x^2+p_2x+q_2)$ имеют комплексные корни.

Тогда R(x) представим в виде:

$$\frac{P_k(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{A_{s_1}}{(x-x_1)^{s_1}}+...+\frac{B_1}{(x-x_2)}+...+\frac{B_{s_2}}{(x-x_2)^{s_2}}+\frac{Dx+E}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{Fx+S}{x^2+p_2x+q_2}$$

Снова приводим к общему знаменателю и приравниваем числители.

Пример $\int \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx$

4 случай

Знаменатель содержит кратные действительные и кратные комплексные корни;

$J=(x-x_1)^{s_1}(x-x_2)^{s_2}(x^2+p_1x+q_1)^{s_3}(x^2+p_2x+q_2)^{s_4}$

Тогда R(x) представим в виде:

$$\frac{A_1}{(x-x_1)}+...+\frac{A_{s_1}}{(x-x_1)^{s_1}}+...+\frac{B_1}{(x-x_2)}+...+\frac{B_{s_2}}{(x-x_2)^{s_2}}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+...+\frac{C_{S_3}x+D_{S_3}}{(x^2+p_1x+q_1)^{S_3}}+\frac{E_1x+F_1}{x^2+p_2x+q_2}+...+\frac{E_{S_4}x+F_{S_4}}{(x^2+p_2x+q_2)^{S_4}}$$

А дальше все делаем по старой схеме: методом неопределенных коэффициентов находим A, B...

Пример $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x^2+4)^2}dx$

Теорема 1

Любой многочлен над полем C раскладывается на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами:

$P(x)=(x-z_1)^{\alpha_1}(x-z_2)^{\alpha_2}...(x-z_k)^{\alpha_k}$;

$z_i\in C$;

$\sum_{i=1}\alpha_i=n-$степень многочлена;

Доказательство

Если $z_i\in\mathbb{R}$, то все в порядке: $(x-z_i)^{\alpha_i}$ - линейный множитель с вещественными коэффициентами

Пусть тогда существует невещественный корень $z_0=\alpha+\beta i,\beta\neq 0$. Ему соответствует скобка $(x-z_0)^k$.

Тогда если z_0 – корень, то сопряженный к нему $\overline{z_0}=\alpha-\beta i$ тоже будет корнем. Тогда наряду с множителем $(x-z_0)^k$ будет присутствовать множитель $(x-\overline{z_0})^k$. Перемножим эти 2 скобки:

$(x-z_0)(x-\overline{z_0})=(x-(\alpha+\beta i))(x-(\alpha-\beta i))=(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)=(x-\alpha)^2+\beta^2$ - квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами, что и требовалось доказать.

Теперь нам нужно доказать, что любые правильные дроби раскладываются на простейшие.

Лемма 1

Пусть многочлен $Q(x)$ представим в виде: $(x-a)^k\cdot N(x)$, где $N(a)\neq 0$ - выделили максимальное кол-во скобок (x-a)
и $s_p<s_q$ - степень числителя меньше степени знаменателя, тогда

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{A}{(x-a)^k}+\dfrac{M(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot N(x)}$, причем дробь $\dfrac{M(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot N(x)}$ - правильная; если $s_Q=n$, то $s_{(x-a)^{k-1}\cdot N(x)}=n-1$; M(x) – многочлен с действительными коэффициентами.

Доказательство

Действуем так же, как в примерах: приводим к общему знаменателю и приравниваем числители:
$P(x)=A\cdot N(x)+(x-a)\cdot M(x)$; подставим $x=a$, тогда $A=\dfrac{P(a)}{N(a)}$, по условию $N(a)\neq 0$

$M(x)=\dfrac{P(x)-A\cdot N(x)}{(x-a)}$ - нам нужно доказать, что это – многочлен, а не дробь. Подставим x=a, числитель при такой подстановке = 0, а это значит, что многочлен $(P(x)-A\cdot N(x))$ делится на $(x-a)$, т.е. M(x) – многочлен с действительными коэффициентами.

Теперь докажем, что дробь $\dfrac{M(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot N(x)}$ - правильная, т.е. что $s_{M(x)}<s_{(x-a)^{k-1}\cdot N(x)}$.

Степень знаменателя дроби = n-1, для числителя (M(x)): по условию $s_P<s_Q=n$ и $s_N<s_Q=n$
$\Rightarrow s_{P(x)-A\cdot N(x)}<n$, да еще делим на (x-a) ($M(x)=\dfrac{P(x)-A\cdot N(x)}{(x-a)}$), значит $s_{M(x)}<n-1$ - меньше степени знаменателя, что и требовалось доказать.

Лемма 2

Если многочлен Q(x) имеет комплексный корень кратности k, т е представим в виде $Q(x)=(x^2+px+q)^k\cdot N(x)$, при этом многочлен (x^2+px+q) имеет только комплексные корни, которые не являются корнями N(x). $s_p<s_q=n$, тогда дробь можно представить в виде:

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}+\dfrac{M(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\cdot N(x)}$, причем вторая дробь будет правильной. M(x) – многочлен с действительными коэффициентами.

Доказательство

Снова приведем дробь к общему знаменателю и приравняем числители. Получим
$P(x)=(Ax+B)\cdot N(x)+(x^2+px+q)\cdot M(x)$

Пусть $z=\alpha+\beta i$, $\beta\neq 0$ - корень многочлена x^2+px+q, $\beta\neq 0$, значит сопряженное к нему $\bar{z}=\alpha-\beta i$ тоже корень. Подставим z и $\bar{z}$:

$P(z)=(Az+B)\cdot N(z)\Rightarrow Az+B=\dfrac{P(z)}{N(z)}=\Lambda$; $\qquad P(\bar{z})=(A\bar{z}+B)\cdot N(\bar{z})\Rightarrow A\bar{z}+B=\dfrac{P(\bar{z})}{N(\bar{z})}=\bar{\Lambda}$ Найдем определитель системы, чтобы выяснить, имеет она решения, или нет:

$\Delta=\begin{vmatrix} z & 1\\ \bar{z} & 1\end{vmatrix}=z-\bar{z}=2\beta i;\ \beta\neq 0$, значит, система разрешима и существуют A и B – решения системы, нужно доказать, что $A,B\in\mathbb{R}$

$\begin{cases}Az+B=\Lambda\\ A\bar{z}+B=\bar{\Lambda}\end{cases}$, заменим A и B на $\bar{A}$ и $\bar{B}$: $\begin{cases}\bar{A}z+\bar{B}=\Lambda\\ \bar{A}\bar{z}+\bar{B}=\bar{\Lambda}\end{cases}$, решим сопряженную систему: $\begin{cases}A\bar{z}+B=\bar{\Lambda}\\ Az+B=\Lambda\end{cases}$ - получили исходную систему;

так как столбец $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ - решение, столбец $\begin{pmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \end{pmatrix}$ является решением. А т.к. решение должно быть единственным (определитель $\neq 0$), $\left.\begin{matrix} A=\overline{A} \\ B=\overline{B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A,B \in \mathbb{R}$; M(x) находится аналогично *Лемме 1* ; теорема доказана.

Обобщая все вышесказанное, получаем: («Теорему о разложении на простейшие дроби»)

Пусть многочлен $Q(x)$ представим в виде: $Q(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}...(x-a_l)^{k_l}...(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}...(x^2+p_tx+q_t)^{m_t}$ и положим $N_1(x)=(x-a_1)^{k_2}...(x-a_l)^{k_l}...(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}...(x^2+p_tx+q_t)^{m_t}$, тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^1}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{M_1^1(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}N_1(x)}=\frac{A_1^1}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_1^2}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\frac{M_1^2(x)}{(x-a_1)^{k_1-2}N_1(x)}=$$

$$=\frac{A_1^1}{(x-a_1)^{k_1}}+...+\frac{A_1^{k_1}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\overbrace{..}^{k_2\ \text{слагаемых,соответствующих}\ 2-й\ \text{скобке}}+...+\overbrace{.............}^{k_l\ \text{слагаемых}}+...+\underbrace{...+\frac{C_t^{m_t}x+D_t^{m_t}}{x^2+p_tx+q_t}}_{m_t\ \text{слагаемых}}$$

Заметим, что в самой последней дроби степень числителя (первая) меньше степени знаменателя (вторая) , т.е. последняя дробь – правильная. И каждую из дробей-слагаемых мы можем проинтегрировать в элементарных функциях.

Общий вывод: Любая рациональная дробь интегрируется в элементарных функциях.

Интегрирование выражений вида $R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p,...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q\right)$.

Докажем, что любой такой интеграл – берущийся в элементарных функциях. Пусть $\alpha_1=\frac{p_1}{q_1},\ \alpha_2=\frac{p_2}{q_2},\ ...\ ,\alpha_n=\frac{p_n}{q_n},\ \alpha_1,\ ...\ \alpha_n\in Q$, т.к. $p_i,q_i\in Z$. Пусть m=НОК $(q_1,q_2,...,q_n)$, $m\in Z$. Сделаем замену: $t^m=\frac{ax+b}{cx+d}$, тогда $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_i}{q_i}}=t^{\frac{mp_i}{q_i}}=t^{\beta_i}$, причем последнее выражение - рациональное, т.к. m делится на любое q_i .

Тогда получим, что x=φ(t), dx=φ´(t)dt, где φ(t) и φ´(t)dt – рациональные выражения, поэтому: $R_1(t)dt$ - тоже рациональное выражение

Первая подстановка Эйлера

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

Пусть многочлен ax^2+bx+c имеет вещественные корни.

Пусть $\alpha,\beta,\alpha\neq\beta$ - корни, тогда $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$.

Рассмотрим подстановку $t=\frac{\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}}{x-\alpha}$.

$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$,
$\int R(x,y)dx$,
$t^2=\dfrac{a(x-\beta)}{x-\alpha}$,
$x=\varphi(t)$,
$dx=\varphi'(t)dt$,
$y=t(x-\alpha)=\psi(t)\Rightarrow y=\int R(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt.$

Вторая подстановка Эйлерадля интегралов вида $\int R(x,y)dx$, где $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Корни трехчлена ax2+bx+c комплéксные. Тогда надо считать, что a>0, иначе трехчлен был бы отрицателен для всех x. Делаем подстановку $t=y\pm x\sqrt{a}$.Возводя это равенство в квадрат и заменяя y^2 его выражением, получим:

$t\mp x\sqrt{a}=\sqrt{ax^2+bx+c}(=y);$
$t^2\mp 2xt\sqrt{a}+ax^2=ax^2+bx+c;$
$x=\dfrac{t^2-c}{b\pm 2t\sqrt{a}}=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)dt,\ y=\psi(t).$

Где x, y и dx – некоторые рациональные функции от t. В конечном счете получаем:
$\int R(x,y)dx=\int R(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt=\int R_1(t)dt$.

Интегрирование тригонометрических выражений.

Пусть $R(u,v)=\dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ $(u=\cos x, v=\sin x)$, где P и Q - многочлены от u и v .

1) Если один из многочленов P,Q четный по v, а другой – нечетный по v, то подстановка $t=\cos x$ рационализирует интеграл.
2) Если один из многочленов P,Q четный по u , а другой – нечетный по u, то подстановка $t=\sin x$ рационализирует интеграл.
3) Если оба многочлена четные по u и v , то подстановка $t=tgx$ рационализирует интеграл.
3’) Выражения вида $\int\cos^m x\sin^n xdx$, где m и n - четные. Они сходны с 3 случаем, где $Q(u^0,v^0)=1$
4) **Универсальная подстановка.**

Рационализация $\int R(\cos x,\sin x)dx$ также достигается с помощью подстановки $t=tg\dfrac{x}{2};(-\pi<x<\pi)$, которая называется *универсальной. В самом деле,*

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2\left(\frac{1}{1+tg^2\frac{x}{2}}\right) - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,;\ \sin x = tgx\cdot\cos x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}\,;$$

$$dt = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{dx}{2} \Rightarrow dt = (1+t^2)\frac{dx}{2} = \frac{2}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \int R(\cos x, \sin x)dx = \int R_1(t)dt\,.$$

5) Выражения вида $\int \cos\alpha x \sin\beta x\cdot dx$; $\int\cos\alpha x\cos\beta x\cdot dx$; $\int\sin\alpha x\sin\beta x\cdot dx$. Они рационализируются с помощью перевода в тригонометрические суммы.

Тригонометрические подстановки.

Следующие интегралы превращаются в тригонометрические выражения при помощи тригонометрических подстановок:

1. $\int R\,(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$ $R = \dfrac{P}{Q}$

   $x = a\cdot\cos t$

   $dx = -a\cdot\sin t\,dt$

   $0 \le t \le \pi$

   $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cdot\sin t$

2. $\int R\,(x, \sqrt{a^2 + x^2})\,dx$

   $x = a\cdot tg\,t$

   $dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt$

   $\sqrt{a^2 + a^2\cdot tg^2 t} = \dfrac{a}{\cos t}$

3. $\int R\,(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx$

   $x = \dfrac{a}{\cos t}$

   $dx = -\dfrac{a}{\cos^2 t}\sin t\,dt$

   $\sqrt{x^2 - a^2} = a\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t} - 1} = a\cdot tg\,t$

<u>Пример:</u>

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\begin{bmatrix} x=a\cdot\cos t \\ dx=-a\cdot\sin t\ dt\end{bmatrix}=-a^2\int\sin^2 t\ dt=-\frac{a^2}{2}(t-\frac{\sin 2t}{2})+C=$$

$$=\begin{bmatrix} x=a\cdot\cos t \\ \sin t=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \\ \sin 2t=\frac{2}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\end{bmatrix}=-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+x\cdot\sqrt{a^2-x^2}+C$$

Определенный интеграл Римана.
Эквивалентные определения.

Пусть задана функция f(x) на отрезке $[a;b]$. Составим разбиение R: $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$.

$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$

$\lambda_R=\max\limits_i\{\Delta x_i\}$

$\forall i=0,1,...,n-1$

$\xi_i\in[x_i;x_{i+1}]$

$\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=S_{R,\xi_i}$

Это интегральная сумма, соответствующая разбиению R и выбору точек ξ_i.

Если существует предел при $\lambda_R\to 0$ интегральных сумм $\lim\limits_{\lambda_R\to 0}S_R$, и он не зависит от R и ξ_i, то он называется ***определенным интегралом Римана.***

Определение по Коши:

$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\forall R:\lambda_R<\delta\forall\xi_i\ \left|S_R-\int\limits_a^b f(x)\partial x\right|<\varepsilon$

По Гейне:

$\forall R^k:\lambda_{R^k}\to 0\ \ \forall\xi_i^k\ \lim\limits_{\lambda_R\to 0}S_{R^k}=\int\limits_a^b f(x)\partial x$, где R^k - последовательность разбиений.

Критерий Коши:

$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\forall R',R'':|\lambda_{R'}-\lambda_{R''}|<\delta\qquad\forall\xi_i',\xi_i''\ |S_{R'}-S_{R''}|<\varepsilon$

Ограниченность интегрируемой функции.

Теорема:

Если функция f(x) интегрируема на [a,b] и существует $\int\limits_a^b f(x)dx$, то функция ограничена на этом отрезке.

Доказательство:

От противного: пусть f(x) неограничена на [a,b]. Введем произвольное разбиение R:
$a=x_0<x_1<...<x_n=b$. Т.к. функция неограниченна на [a,b], то она неограничена хотя бы на одном из отрезков $[x_i,x_{i+1}]$. Пусть i_0 - номер того отрезка, на котором функция неограниченна. Тогда рассмотрим интегральную сумму:

$S_R=f(\xi_{i_0})\cdot\Delta x_{i_0}+\sum\limits_{i\neq i_0}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ - т.е. выделили суммы одно слагаемое. Обозначим $A=\sum\limits_{i\neq i_0}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, тогда получим:

$|S_R| \ge |f(\xi_{i_0})| \cdot \Delta x_{i_0} - |A|$ (следует из неравенства о модулях). Тогда возьмем произвольное N и сделаем разность $|f(\xi_{i_0})| \cdot \Delta x_{i_0} - |A| > N$. Для этого у нас должно быть $|f(\xi_{i_0})| > \dfrac{N+|A|}{\Delta x_{i_0}}$. У нас функция неограниченна на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, значит $\forall N\ \exists \xi_{i_0} \in [x_i, x_{i+1}] : |f(\xi_{i_0})| > \dfrac{N+|A|}{\Delta x_{i_0}}$. Тогда интегральная сумма будет $> N\ \forall N$, т.е. будет являться величиной неограниченной, т.е. не будет существовать ее предела, а значит и $\int\limits_a^b f(x)dx$, что противоречит условию.

Теорема доказана.

Суммы Дарбу. Их Свойства.

Определение:

Пусть f ограничена на отрезке $[a;b]$. Введём разбиение R этого отрезка.

R: $m_i = \inf\limits_{[x_i;x_{i+1}]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{[x_i;x_{i+1}]} f(x)$.

Тогда можем составить выражения:

$\sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \underline{S}_R$ - нижняя сумма Дарбу, $\sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \overline{S}_R$ - верхняя сумма Дарбу.

$\forall \xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$, $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$.

Свойства сумм Дарбу:

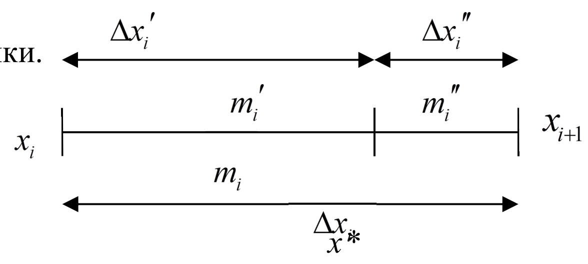
1) $\underline{S}_R \le S_R \le \overline{S}_R$, для одного и того же разбиения.
2) Рассмотрим два разбиения в случае, когда одно разбиение является продолжением другого. Т.е. R_2 - продолжение R_1, если все точки R_1 являются точками R_2.

$$\underline{S}_{R_1} \le \underline{S}_{R_2} \le \overline{S}_{R_2} \le \overline{S}_{R_1},$$

т.е. добавление точек не увеличивает $\overline{S}$ и не уменьшает $\underline{S}$.

Доказательство:

Пусть R_2 получается из R_1 добавлением одной точки.



$R_1 : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $x^* \in [x_i; x_{i+1}]$,

$\underline{S}_{R_1} = \sum\limits_{k \ne i} m_k \Delta x_k + m_i \Delta x_i$,

$\underline{S}_{R_2} = \sum\limits_{k \ne i} m_k \Delta x_k + m_i' \Delta x_i' + m_i'' \Delta x_i''$,

Заметим, что если $A \subset B$, то $\inf A \ge \inf B$ и $\sup A \le \sup B$. Отсюда заключаем:

$m_i' \ge m_i$, $m_i'' \ge m_i$, $m_i' \Delta x_i' + m_i'' \Delta x_i'' \ge m_i(\Delta x_i' + \Delta x_i'')$, $\underline{S}_{R_2} \ge \underline{S}_{R_1}$. Аналогично для $\overline{S}$

3) Для любых двух разбиений одного и того же отрезка нижняя сумма Дарбу не превосходит верхней: $\forall R', R''$ $\underline{S}_{R'} \le \overline{S}_{R''}$. *Доказательство:*

Пусть $R' + R''$ - объединение двух разбиений, тогда $R' \subset R' + R''$, $R'' \subset R' + R''$, тогда по свойству 2

$\underline{S}_{R'} \le \underline{S}_{R'+R''} \le \overline{S}_{R'+R''} \le \overline{S}_{R''}$, т.е. $\forall R', R''$ $\underline{S}_{R'} \le \overline{S}_{R''}$.

4) $\forall R$ $\underbrace{\{\underline{S}_R\}}_{огр.сверху} \Rightarrow \exists \sup \underline{S}_R = \underline{I}$ - нижний интеграл (нижняя точная сумма Дарбу). $\forall R$ $\underline{I} \le \overline{S}_R$.

$\forall R \ \underbrace{\{\overline{S}_R\}}_{огр.снизу} \Rightarrow \exists \inf \overline{S}_R = \overline{I}$ - верхний интеграл (верхняя точная сумма Дарбу). $\forall R \ \underline{S}_R \le \overline{I}$.

$\underline{I} \le \overline{I}$.

Суммы Дарбу и интегрируемость функции по Риману.

<u>*Теорема*</u>:

Функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\lambda_R \to 0}\left(\overline{S}_R - \underline{S}_R\right) \to 0$.

<u>*Доказательство*</u>:

Докажем *необходимость* условия:
Функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$.

Пусть $\int\limits_a^b f(x)dx = I$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall R \ \lambda_R < \delta \Rightarrow \left|S_R - I\right| < \varepsilon$, т.е. $I - \varepsilon < S_R < I + \varepsilon$.

$S_R = \sum f(x_i)\Delta x_i$,

$m_i \le f(x_i) \le M_i$,

$I - \varepsilon \le \sum \sup f(x_i)\Delta x_i \le I + \varepsilon$,

$I - \varepsilon \le \sum \inf f(x_i)\Delta x_i \le I + \varepsilon$,

т.е. $I - \varepsilon \le \underline{S}_R \le I + \varepsilon$ и $I - \varepsilon \le \overline{S}_R \le I + \varepsilon$.

Далее имеем: $\overline{S}_R - \underline{S}_R \le 2\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{\lambda_R \to 0}\left(\overline{S}_R - \underline{S}_R\right) = 0$.

Необходимость доказана.

Докажем *достаточность* условия:

$\lim\limits_{\lambda_R \to 0}\left(\overline{S}_R - \underline{S}_R\right) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall R \ \lambda_R < \delta \Rightarrow 0 \le \overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$.

$\inf\left(\overline{S}_R - \underline{S}_R\right) = \inf \overline{S}_R - \sup \underline{S}_R = \overline{I} - \underline{I} \le \varepsilon \Rightarrow \overline{I} = \underline{I} = I$.

Докажем, что $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Нужно: $\forall R \ \left|S_R - I\right| \overset{?}{<} \varepsilon$, т.е. $I - \varepsilon < S_R < I + \varepsilon$

Имеем: $\underline{S}_R \le S_R \le \overline{S}_R$;

$I = \overline{I} = \inf \overline{S}_R$, тогда по определению $\inf$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R_1 : \overline{S}_{R_1} < I + \varepsilon$,

$I = \underline{I} = \sup \underline{S}_R$, тогда по определению $\sup$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R_2 : I - \varepsilon < \underline{S}_{R_2}$,

т.е. $I - \varepsilon < \underline{S}_{R_2} \le S_R \le \overline{S}_{R_1} < I + \varepsilon \Rightarrow \quad \left|S_R - I\right| < \varepsilon$.

Достаточность доказана.

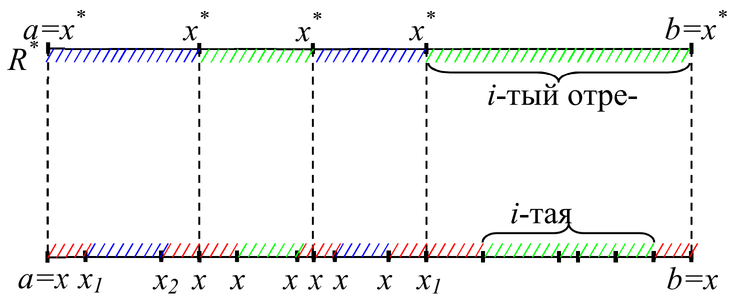
Основная теорема о существовании определенного интеграла Римана.

<u>*Теорема*</u> <u>(Основная)</u>

<u>Ограниченная функция *f* интегрируема на отрезке *[a,b]* тогда и только тогда, когда</u> $\forall\varepsilon>0\ \exists R^*:\left|\overline{S}_{R^*}-\underline{S}_{R^*}\right|<\varepsilon$.

<u>Доказательство:</u>

<u>По теореме об интегрируемости (f интегрируема $\Leftrightarrow \lim\limits_{\lambda_R\to 0}(\overline{S}_R-\underline{S}_R)=0$) функция интегрируема тогда и только тогда, когда</u> $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\underbrace{\forall R\ (\lambda_R<\delta)}_{\Downarrow \atop \exists R^*}\Rightarrow \overline{S}_R-\underline{S}_R<\varepsilon$ (1). Надо доказать, что если $\forall\varepsilon>0\ \exists R^*:\overline{S}_{R^*}-\underline{S}_{R^*}<\varepsilon\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall R\ \ \overline{S}_R-\underline{S}_R<\varepsilon$. Т.е. если найдется одно R^*, удовлетворяющее неравенству (1), то оно (неравенство) будет выполняться для всех *R*. Возьмем произвольное ε. Нужно найти *δ*, такое чтобы выполнялось неравенство $\overline{S}_R-\underline{S}_R<\varepsilon,\forall R:\lambda_R<\delta$. По условию теоремы $\forall\varepsilon>0\ \exists R^*:\left|\overline{S}_{R^*}-\underline{S}_{R^*}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.



Рассмотрим наше разбиение R^* и произвольное *R*, как показано на рисунке. Составим разность верхней и нижней сумм Дарбу́ для нового разбиения *R*: $\overline{S}_R-\underline{S}_R=\sum\limits_{j=0}^{l-1}(M_j-m_j)\Delta x_j$. Нужно сделать его меньше ε. Из условия имеем $\overline{S}_{R^*}-\underline{S}_{R^*}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i^*<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Обозначим через Σ первую сумму и разобьем ее: $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$. Σ_1 – такие слагаемые, что элемент нового разбиения *R* содержит в себе хотя бы одну точку границы старого разбиения R^*. Все остальное войдет в Σ_2. Рассмотрим отдельно Σ_1 и Σ_2:

Σ_1: $|f(x)|\le k$ т.к. функция *f* – ограничена (*k* - константа). Тогда $|M-m|\le 2k$ (*M* и *m* – максимум и минимум на *[a,b]*). Получим $\Sigma_1\le 2k\cdot\delta\cdot 2n<\varepsilon/2$, где $\lambda_R<\delta$, а количество красных отрезков не превосходит *2n*. Для того чтобы это неравенство выполнялось, достаточно взять $\delta<\varepsilon/8kn$. Т.е. при $\delta<\varepsilon/8kn$ $\Sigma_1<\varepsilon/2$.

Σ_2: разобьем Σ_2 на повторные суммы, т.е. $\Sigma_2=\Sigma(\Sigma^i)$. $\Sigma^i\le\sum\limits_j(M_j-m_j)\Delta x_j\le\sum(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i$ $(M_i^*-m_i^*)\Sigma\Delta x_i^*$, где M_j и m_j – максимум и минимум на *j*-том участке. Σ^i – группировка тех новых *j*-тых участков, которые попали в один и тот же старый. Получим $\Sigma_2\le\sum\limits_{i=1}^{n-1}(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i^*=\overline{S}_{R^*}-\underline{S}_{R^*}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow\Sigma_1+\Sigma_2<\varepsilon$, т.е. $\Sigma<\varepsilon$. В итоге:

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall R:\lambda_R<\frac{\varepsilon}{8kn}\quad \overline{S}_R-\underline{S}_R<\varepsilon.$$ Теорема доказана.

<u>Следствие 1:</u> Функция *f* – интегрируема на *[a,b]*, если $\exists R_k$ с $\lambda_{R_k}\to 0:\left|S_{R_k}-I\right|<\varepsilon$ (если существует такая последовательность разбиений с мелкостью, стремящейся к нулю, что модуль разности последовательности интегральных сумм и интеграла стремится к нулю).

<u>Следствие 2:</u> Функция *f* – интегрируема на *[a,b]*, если $\overline{I}=\underline{I}$ (если верхний интеграл равен нижнему).

Равномерная непрерывность функции. Модуль непрерывности.

<u>Определение 1:</u> f ограниченная $[a;b]$ функция, $x',x''\in[a,b]$ и $|x'-x''|<\delta$ при выполнении условия $\forall\delta>0; w(\delta)=\sup|f(x')-f(x'')|$, $w(\delta)\to 0,\delta\to 0$ называется равномерно непрерывной.

Определение 2(Критерий Коши): f - равномерно непрерывная функция на отрезке $[a;b]$ если выполняется условие $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:|x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ при $x',x''\in[a,b]$.

Теорема 1 (Эквивалентность определений 1 и 2)

Доказательство:

Так как $|x'-x''|<\delta$ и $w(\delta)\to0,\delta\to0$ выполняется Критерий Коши.

Теорема 2

Функция непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем ($f\in C[a;b]\Rightarrow f\in C_{равн}[a;b]$***).***

Доказательство:

Допустим что теорема неверна. Построим отрицание к определению 2.

$\exists>0,\forall\delta>0:|x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$. Зададим стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\delta_n=\dfrac{1}{n}$, тогда $\forall n>0,\exists x_n',x_n''\in[a;b]:|x'-x''|<\delta=\dfrac{1}{n}\Rightarrow\left|f(x_n')-f(x_n'')\right|\geq\varepsilon$. Так как точки последовательности $\{x_n'\}$ принадлежат к отрезку $[a;b]$, то эта последовательность ограничена, и из нее можно выделить, по теореме Больцано-Вейерштрасса, подпоследовательность $\{x_{n_к}'\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0\in[a;b]$. Значит, из нее можно выделить также подпоследовательность $x_{n_{k_l}}'\to x_0'$. Аналогично выделим подпоследовательность

$x_{n_{k_l}}''\to x_0''\Rightarrow\left|x_{n_{k_l}}'-x_{n_{k_l}}''\right|<\dfrac{1}{n_{k_l}}$ и $x_0'=x_0''\Rightarrow\varepsilon\leq\left|f(x_{n_{k_l}}')-f(x_{n_{k_l}}'')\right|=0$. Получили противоречие – теорема доказана.

Необходимость условия: Если $f\in C(a;b)$, то теорема 2 не выполняется.

Пример $f(x)=\sin\dfrac{1}{x};(0,1]$ Пусть $x'=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2\pi n};x''=\dfrac{1}{-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n}\Rightarrow f(x')-f(x'')=2\Rightarrow w(\delta)\not\to0$ при $\delta\to0$.

Интегрируемость по Риману непрерывной функции.

Теорема 1:

Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$.

Доказательство:

Пусть f непрерывна на $[a,b]$; тогда для разбиения R, у которого частичные отрезки $\Delta x_i<\delta$, имеет место ($\xi_j,\eta_j\in[x_j,x_{j+1}]$).

$$\sum_{j=0}^{n-1}(f(\xi_j)-f(\eta_j))\,\Delta x_j\leq\sum_{j=0}^{n-1}\omega(\delta)\,\Delta x_j=\omega(\delta)(b-a),$$

где $\omega(\delta)=\sup\limits_{\substack{x',x''\in[a,b]\\|x'-x''|<\delta}}|f(x')-f(x'')|$ есть модуль непрерывности f на $[a,b]$.

Поэтому

$$\bar{S}_R-\underline{S}_R=\sup_{\xi_j,\eta_j}\sum_{j=0}^{n-1}(f(\xi_j)-f(\eta_j))\,\Delta x_j\leq\omega(\delta)(b-a).$$

Но, как мы знаем, для непрерывной на замкнутом конечном отрезке $[a,b]$ функции $\omega(\delta)\to 0\,(\delta\to 0)$, поэтому для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что $\bar{S}_R-\underline{S}_R<\varepsilon$.
В силу основной теоремы интеграл f на $[a,b]$ существует.
Теорема доказана.

Интегрируемость по Риману монотонной функции.

<u>Теорема 1:</u>
Если функция монотонна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.
<u>Доказательство:</u>
Возьмем произвольное разбиение $\forall R\ \lambda_R<\delta$
Рассмотрим разность между верхней и нижней суммой Дарбу, пусть для определенности f не убывает на $[a;b]$, тогда мы получим, что $\forall i\ f(x_i)\le m_i\le M_i\le f(x_{i+1})$
Получим, что разность между верхней и нижней суммой Дарбу
$\sum(M_i-m_i)\Delta x_i\le\delta\sum f(x_{i+1})-f(x_i)\le\delta(f(b)-f(a))$
$\delta(f(b)-f(a))\to 0\ \text{при}\ \delta\to 0$
Теорема доказана.

Аддитивное и однородные свойства определенного интеграла Римана.

<u>Теорема 1:</u> (Аддитивное свойство интегралов)
Функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $\forall c\in[a,b]$ функция интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$ и при этом выполняется равенство: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

<u>Доказательство:</u>
$\Rightarrow$ Пусть f интегрируема на $[a,b]$, тогда по основной теореме $\forall\varepsilon>0\ \exists R:\overline{S_R}-\underline{S_R}<\varepsilon$
Можно считать, что точка с является точкой разбиения, потому что, если она таковой не является, мы добавим эту точку и рассмотрим новое разбиение $R'=R\cup\{c\}$, тогда
$\overline{S_R}\le\overline{S_{R'}},\ \underline{S_{R'}}\ge\underline{S_R}\Rightarrow\overline{S_{R'}}-\underline{S_{R'}}\le\overline{S_R}-\underline{S_R}<\varepsilon$, поэтому можно считать, что разбиение R изначально содержит точку с. Тогда это разбиение порождает разбиения R_1 - разбиение $[a,c]$ и R_2 - разбиение $[c,b]$. Тогда $R_1\cup R_2=R$ и разность сумм Дарбу можно представить как:
$\varepsilon>\overline{S_R}-\underline{S_R}=\overline{S_{R_1}}+\overline{S_{R_2}}-\underline{S_{R_1}}-\underline{S_{R_2}}=\underbrace{\left(\overline{S_{R_1}}-\underline{S_{R_1}}\right)}_{\ge 0}+\underbrace{\left(\overline{S_{R_2}}-\underline{S_{R_2}}\right)}_{\ge 0}$. Так как каждое из этих двух слагаемых неотрицательно и в сумме они меньше ε, значит каждое из них меньше $\varepsilon\Rightarrow$ по основной теореме f интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$. Доказано.
$\Leftarrow$ Пусть f интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, тогда точно так же найдем R_1 - разбиение $[a,c]$ и R_2 - разбиение $[c,b]$, такие что $\overline{S_{R_1}}-\underline{S_{R_1}}<\frac{\varepsilon}{2}$ и $\overline{S_{R_2}}-\underline{S_{R_2}}<\frac{\varepsilon}{2}$, тогда для разбиения $R=R_1\cup R_2\ \overline{S_R}-\underline{S_R}<\varepsilon$,
где R–разбиение отрезка $[a,b]$,
значит f интегрируема на отрезке $[a,b]$. Доказано.

Доказали интегрируемость, теперь докажем равенство $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$:

<u>Замечание:</u> Мы предполагаем, что точка с участвует во всех этих разбиениях; если она в них не участвует, то по следствию из основной теоремы нам это неважно, поскольку если хотя бы для од-

ной последовательности разбиений предел стремится к числу, то и для всех остальных - тоже. И мы берем такую последовательность разбиений, что точка с в них участвует.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_R \to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda_R \to 0} \sum_{[x_i, x_{i+1}] \in [a,c]}' + \lim_{\lambda_R \to 0} \sum_{[x_i, x_{i+1}] \in [c,b]}'' = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Σ' *и* Σ'' - сумма берется по тем отрезкам, которые содержатся в $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно. Нужно учесть, что $\lambda_R \to 0 \Leftrightarrow \lambda_{R_1} \to 0$ *и* $\lambda_{R_2} \to 0$. Теорема доказана.

Замечание: Мы определили понятие определенного интеграла только для случая $a < b$; доопределим понятие определенного интеграла от a до b в случае, когда $b < a$:

Если $b < a$, то положим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, тогда равенство $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ становится верным не только для $c \in [a,b]$, но и для любых c, при условии что все вышеперечисленные интегралы существуют.

Пример: $\int_1^2 xdx = \int_1^3 xdx + \int_3^2 xdx$

Теорема2: (Однородные свойства интегралов)

Пусть функции f *и* g интегрируемы на $[a,b]$, тогда

1) f + g – интегрируема на $[a,b]$ и $\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$, если интегралы в правой части существуют, т.е. в общем случае обратное не верно.
(*Пример*:Если взять f – неинтегрируема на $[a,b]$ и –f – тоже неинтегрируема, то их сумма =0 – интегрируема).
2) $k \cdot f$ - интегрируема на $[a,b]$ и $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, обратное тоже верно, в случае если $k \neq 0$
3) $f \cdot g$ - интегрируема.
4) $|f|$ - интегрируем
5) Если f отделена от 0 на отрезке $[a,b]$, т.е. $|f| \geq d > 0$ на $[a,b]$ где $d = const$, то $\frac{1}{f}$ - интегрируема.

Доказательство:

1) $\int_a^b (f+g)dx = \lim_{\lambda_R \to 0} \sum (f+g)(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda_R \to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda_R \to 0} \sum g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2) аналогично;

Замечание: обозначим $M_f = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f$; $m_f = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f$; $K_f \geq |f(x)|,\ x \in [a,b]$ - по свойству ограниченности; соответственно введем M_g, m_g, K_g

3) $\forall \eta \in [a,b], \xi \in [a,b]$

$$|f(\eta)\cdot g(\eta) - f(\xi)\cdot g(\xi)| = |f(\eta)\cdot g(\eta) - f(\xi)\cdot g(\eta) + f(\xi)\cdot g(\eta) - f(\xi)\cdot g(\xi)| = g(\eta)\big(f(\eta) - f(\xi)\big) + f(\xi)\big(g(\eta) - g(\xi)\big) \leq$$
$$\leq K_g\big(f(\eta) - f(\xi)\big) + K_f\big(g(\eta) - g(\xi)\big)$$

Перейдем к супремумам: на произвольном промежутке $[x_i, x_{i+1}]$

$$\overline{S_{fg}} - \underline{S_{fg}} \leq K_f(\overline{S_g} - \underline{S_g}) + K_g(\overline{S_f} - \underline{S_f})$$

По основной теореме найдутся такие разбиения R_1, что $(\overline{S_g} - \underline{S_g}) < \dfrac{\varepsilon}{2K_f}$ и R_2, что $(\overline{S_f} - \underline{S_f}) < \dfrac{\varepsilon}{2K_g}$. Теперь если мы возьмем сумму разбиений R_1 и R_2, то будут выполняться оба неравенства, и тогда $\overline{S_{fg}} - \underline{S_{fg}} < \varepsilon \Rightarrow f \cdot g -$ интегрируема.

4) $|f(\xi)| - |f(\eta)| \le |f(\xi) - f(\eta)|$; переходя к супремумам и умножая на Δx_i, получим:
$\overline{S_{|f|}} - \underline{S_{|f|}} \le \overline{S_f} - \underline{S_f} < \varepsilon$

Замечание: переход к супремуму на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$: $M_{|f|} - m_{|f|} \le M_f - m_f$

Замечание: обратное неверно:

Контрпример: $f = \begin{cases} 1; x \in \mathbb{Q} \\ -1;\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ - сама по себе не интегрируема (доказано ранее), а по модулю – интегрируема.

5) $\left|\dfrac{1}{f(\xi)} - \dfrac{1}{f(\eta)}\right| = \left|\dfrac{f(\xi) - f(\eta)}{f(\xi)f(\eta)}\right| \le \dfrac{|f(\xi) - f(\eta)|}{d^2}$; переходя к супремумамсупремум в этом неравенстве, получим:

$M_{\frac{1}{f}} - m_{\frac{1}{f}} \le \dfrac{1}{d^2}\left(M_f - m_f\right)$; теперь домножая на Δx_i и суммируя, получим

$\overline{S_{\frac{1}{f}}} - \underline{S_{\frac{1}{f}}} \le \dfrac{1}{d^2}\left(\overline{S_f} - \underline{S_f}\right) < \varepsilon$

Теорема доказана.

Неравенства для определенного интеграла Римана и теорема о среднем.

Теорема 1:

Если функции f, g интегрируемы на $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Доказательство:

$\forall \xi_i$ выполняется неравенство $f(\xi_i) \le g(\xi_i)$, тогда $\sum f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum g(\xi_i)\Delta x_i$. Так как интегралы по условию существуют, по теореме о предельном переходе под знаком неравенства, $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. Теорема доказана.

Следствие:

Если f - интегрируема на $[a,b]$, то, по доказанному выше, $|f|$ - интегрируем на данном отрезке; тогда $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

Доказательство:

Известно неравенство: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$; по данной теореме

$\int_a^b -|f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$; из самого правого интеграла минус можно вынести; получим:

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$. Следствие доказано.

Теорема 2: (о среднем)

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, причем $\varphi(x) \ge 0$ на данном промежутке, тогда

$m\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx \le M\int_a^b \varphi(x)dx$, где $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$

и $\exists C\ m \le C \le M: \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx = C\int_a^b \varphi(x)dx$

*<u>Замечание:</u>*sup и inf существуют, т.к. функция на данном промежутке интегрируема, а значит ограничена.

<u>Доказательство:</u>

Запишем неравенство: $m \le f(x) \le M$ и домножим его на $\varphi(x) \ge 0$:

$m\cdot\varphi(x) \le f(x)\cdot\varphi(x) \le M\cdot\varphi(x)$; тогда по теореме о неравенствах это неравенство сохранится и в интегралах:

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx \le M\int_a^b \varphi(x)dx \quad (*)$$

Если $\int_a^b \varphi(x)dx = 0$, то и интеграл $\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx = 0$ и неравенство $(*)$ выполняется.

Если $\int_a^b \varphi(x)dx \ne 0$, тогда по теореме о неравенствах $\int_a^b \varphi(x)dx > 0$, значит можно неравенство $(*)$ на него разделить:

$m \le \dfrac{\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx} \le M$ и принимаем за $C = \dfrac{\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx}$. Теорема доказана.

<u>Следствие:</u>

Если f – непрерывна на $[a,b]$ и выполняется условие теоремы, то

$$\exists \xi \in [a,b]: \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx$$

<u>Доказательство:</u>

Т.к. f – непрерывна на $[a,b]$, то она достигает своего max и min значения, а в силу непрерывности sup=max, inf=min; значит $\exists x_1\ u\ x_2: f(x_1) = m,\ f(x_2) = M;\ \forall C \in [m,M]\ \exists \xi: f(\xi) = C$ - по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции. Следствие доказано.

<u>Следствие к следствию:</u>

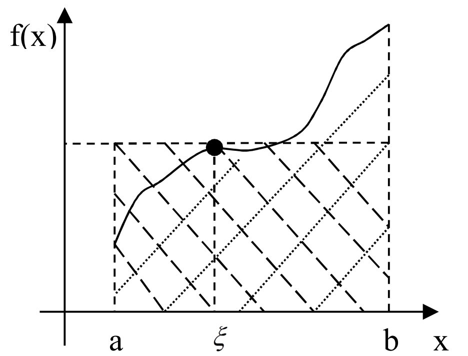
Если f – непрерывна на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

<u>Доказательство:</u>

Возьмем $g := 1$, тогда $\int_a^b f(x)\cdot 1\cdot dx =$ (по следствию) $= f(\xi)\int_a^b 1\cdot dx = f(\xi)(b-a)$. Следствие доказано.

<u>Геометрический смысл этого следствия:</u>

Если считать площадь криволинейной трапеции, то найдется такая точка ξ, что площадь этой криволинейной трапеции будет равна площади прямоугольника с высотой $f(\xi)$.



Интеграл как функция верхнего предела. Непрерывность и дифференцируемость. Теорема Ньютона-Лейбница.

Рассмотрим функцию $f(x)$, интегрируемую на отрезке $[a;b]$. По аддитивному свойству интеграла:
$\forall x \in [a;b]$, можно найти отрезок $[a;x]$ на котором представляется возможным рассмотреть функцию $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Теорема:
Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Доказательство:
Рассмотрим функцию $F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+h} f(t)dt=C\cdot h$,

$m \le C \le M$, где $M=\sup\limits_{[x;x+h]} f(t)$, $m=\inf\limits_{[x;x+h]} f(t)$, $|C|\le k$, где $|F(x+h)-F(x)|\le k\cdot h \underset{h\to 0}{\to} 0$

Теорема доказана.

Теорема:
Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, непрерывна в точке $x\in[a;b]$, тогда функция $F(x)$ дифференцируема в точке x и $F'(x)=f(x)$.

Доказательство:
$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h} f(t)dt=\begin{bmatrix} f(t)=f(x)+\varepsilon(t), \\ \varepsilon(t)\underset{t\to 0}{\to} 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(x)dt+\int_x^{x+h}\varepsilon(t)dt\right)=f(x)+\varepsilon,$$
$\varepsilon(t)\to 0$, $\forall\varepsilon\ \exists h:\varepsilon(t)<\varepsilon\ \forall t\in[x;x+h]$, т.е.
$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x).$$
Теорема доказана.

Следствие:
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то $\exists\int f(x)dx$, т.е. $\exists\Phi(x)$ - первообразная $f(x)$.
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)+\frac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h}\varepsilon(t)dt=f(x)+\varepsilon(x^*),$$
$$\varepsilon(x^*)\underset{x^*\to x}{\to} 0$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x\in[a;b]$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$; $F'(x)=f(x)$, где $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Заключаем, что $F(x):F'(x)=f(x)$.
Т.е. любая непрерывная функция имеет первообразную.
Теорема доказана.

Формула Ньютона-Лейбница:
Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, тогда она имеет первообразную. Пусть $\Phi(x)$ - её произвольная первообразная. Тогда $\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)$.

Доказательство:

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ - первообразная функции $f(x)$,

$\Phi(x)=F(x)+C$, $\Phi(b)-\Phi(a)=F(b)-F(a)$,

$$\left.\begin{array}{l}\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)\\ \int\limits_a^a f(x)dx=F(a)\end{array}\right\}\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-\underbrace{F(a)}_{=0}=\Phi(b)-\Phi(a).$$

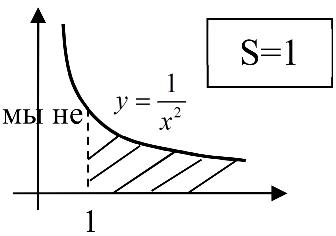
Теорема доказана.

Несобственные интегралы.
Понятие о несобственных интегралах.

Пусть задана функция $f:[a,+\infty]\to R$ и $\forall b>a$ f интегрируема на $[a,b]$. Тогда если $\exists \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ и он конечен, то говорим, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится и равен пределу $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$. Обычный интеграл Римана называется собственным интегралом, а предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом. Мы вводим это новое понятие, поскольку в смысле Римана не существует интеграла на бесконечном отрезке, однако может существовать несобственный интеграл, равный $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$. Аналогично определяется $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx$.

Пример:

Рассмотрим интеграл: $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1$



Мы получили, что площадь бесконечной фигуры = 1, где площадь мы не можем определить через вписанные и описанные фигуры, но зато площадь вписанных фигур стремится к 1. Если $F(x)$ – первообразная $f(x)$ на $[a,b]$ и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$, то допустима запись $F(x)\Big|_a^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$. Т.е. это интеграл с особенностью на бесконечности.

Рассмотрим f на конечном $[a,b)$: пусть $\forall b'$ $a<b'<b$ функция интегрируема на отрезке $[a,b]$ и неограниченна в левой окрестности точки *b*.Тогда в обычном смысле Римана интеграл не существует (по теореме об ограниченности интегрируемой функции). Однако может $\exists \lim\limits_{b'\to b}\int\limits_a^{b'} f(x)dx$. И если этот предел существует, то говорим, что несобственный интеграл сходится, и $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{b'\to b-0}\int\limits_a^{b'} f(x)dx$.

Аналогично, если все точно так же, но слева (на $(a,b]$). Если эти пределы в обоих случаях не существуют или $=\infty$, то несобственный интеграл называется расходящимся.

Пример:

Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{x}$: $\forall b>0, b<1$ функция интегрируема на отрезке $[b,1]$, и сама функция неограниченна в окрестности нуля. Тогда можно говорить о несобственном интеграле.

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to 0}\int\limits_b^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_0^1 = +\infty$, т.е. интеграл расходится.

Дадим определение особенности. Пусть *f(x)* задана на полуинтервале [*a,b*), где *b* – или конечное, или бесконечное. Будем говорить, что интеграл имеет единственную особенность в точке *b*, если $\forall b' < b \;\; f$ интегрируема на $[a,b']$, причем

- если $b' = +\infty$, то больше ничего не требуется;
- если b' – конечно, то f – неограниченна в левой окрестности точки *b*.

Аналогично определяется единственная особенность в точке *a*.

Дадим определение интеграла с несколькими особенностями:
Рассмотрим функцию *f*, заданную на отрезке $[a,b]$, *a,b* – конечны.
Будем говорить, что интеграл функции *f* имеет особенности в точках $c_1, c_2, ..., c_n \in [a,b],\; c_1 < c_2 < ... < c_n$, если $\forall h_i \;\; a < c_1 < h_1 < c_2 < h_2 < ... < c_n < b$ интегралы $\int\limits_a^{c_1} f(x)dx, \int\limits_{c_1}^{h_1} f(x)dx, ..., \int\limits_{h_{n-1}}^{c_n} f(x)dx, \int\limits_{c_n}^{b} f(x)dx$ имеют единственную особенность. Можно еще это определение переформулировать следующим образом. Зададим f на интервале (a,b) : тогда если $\forall c \in (a,b)$ $\int\limits_a^c f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$ имеют единственную особенность, первый – в точке *a*, второй – в точке *b*, и оба являются сходящимися, то считаем, что $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, и его значение: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

Нужно доказать, что это равенство выполняется для любого *c* (провести доказательство корректности).

<u>Доказательство:</u>

Пусть $\forall c_1, c_2 \in (a,b)$ $\int\limits_a^{c_1} f(x)dx, \int\limits_a^{c_2} f(x)dx, \int\limits_{c_1}^{b} f(x)dx, \int\limits_{c_2}^{b} f(x)dx$ - сходящиеся. Тогда рассмотрим сумму:

$$\int\limits_a^{c_1} f(x)dx + \int\limits_{c_1}^{b} f(x)dx = \lim_{a'\to a+0}\int\limits_{a'}^{c_1} f(x)dx + \lim_{b'\to b-0}\int\limits_{c_1}^{b'} f(x)dx = \lim_{a'\to a+0}\int\limits_{a'}^{c_2} f(x)dx + \int\limits_{c_2}^{c_1} f(x)dx + \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \lim_{b'\to b-0}\int\limits_{c_2}^{b'} f(x)dx =$$

$$= \lim_{a'\to a+0}\int\limits_{a'}^{c_2} f(x)dx + \lim_{b'\to b-0}\int\limits_{c_2}^{b'} f(x)dx$$

Корректность доказана. Какую бы точку мы не взяли из интервала, сумма интегралов будет одна и та же. Таким образом, мы определили интеграл с особенностями на обоих концах. Тогда можно по-другому определить сходимость интеграла с особенностью в нескольких точках:

Пусть *f* задана на (a,b), а точки $a < c_1 < c_2 < ... < c_n < b$ таковы, что $\int\limits_a^{c_1} f(x)dx, \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx, ..., \int\limits_{c_n}^{b} f(x)dx$ имеют не более двух особенностей, причем на концах. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx$ имеет несколько особенностей и называется сходящимся, если сходится каждый из тех интегралов, и $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{c_1} f(x)dx + ... + \int\limits_{c_n}^{b} f(x)dx$

<u>Пример:</u>

$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x}$, последний интеграл расходится, значит и первоначальный интеграл тоже расходится.

Свойства несобственных интегралов.

Теорема 1 (Условие Коши)

$\int\limits_a^b f(x)dx$ с единственной особенностью в точке b (конечной или бесконечной) сходится тогда и только тогда, когда:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists c\in(a,b):\ \forall b',b'':c<b'<b''<b\ \ \left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

Мы имеем право писать последний интеграл как раз потому, что он имеет особенность только в точке b, а в точках b' *и* b'' все в порядке.

Доказательство:

Рассмотрим $\forall x\in[a,b)$ функцию $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ сходится } \Leftrightarrow\ \exists\lim_{x\to b-0}F(x)\ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall b',b''\in(b-\delta,b)\ \underbrace{|F(b'')-F(b')|}_{F(b'')-F(b')=\int_{b'}^{b''}f(x)dx}<\varepsilon;\ c:=b-\delta$$

Т.е. из того, что интеграл сходится, следует, что существует предел функции *F(x)*, а из этого следует, что для этой функции выполняется условие Коши.
Теорема доказана.

Теорема 2 (Аддитивное свойство несобственных интегралов):

Пусть $\int_a^b f(x)dx$ имеет единственную особенность в точке b и сходится, тогда $\forall c\in(a,b)$ $\int_c^b f(x)dx$ тоже имеет единственную особенность в точке b и тоже сходится, при этом

$$\int_a^b f(x)dx=\underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{\substack{\text{обычный интеграл}\\ \text{Римана}}}+\int_c^b f(x)dx$$

Доказательство:

Условие Коши для интегралов $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ выглядит одинаково, поэтому интеграл $\int_c^b f(x)dx$ сходится.

Проверка равенства:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f(x)dx=\lim_{b'\to b}\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^{b'} f(x)dx\right)=\int_a^c f(x)dx+\lim_{b'\to b}\int_c^{b'} f(x)dx$$

Таким образом, получили аддитивное свойство и для несобственных интегралов:
$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx;\ a<c<b$. Это равенство выполняется независимо от того, собственный он или несобственный, важно только, чтобы он был сходящимся.
Теорема доказана.

Теорема 3 (Однородное свойство для несобственных интегралов):

Пусть $\int_a^b f(x)dx$ имеет единственную особенность в точке bи сходится, $\int_a^b g(x)dx$ также имеет единственную особенность в точке bи сходится. Тогда и $\int_a^b(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))dx$ имеет единственную особенность в точке b, сходится и равен $\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$.

Доказательство:

$$\int_a^b(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))dx \underset{\substack{\text{по определению}\\ \text{несобственного}\\ \text{интеграла}}}{=} \lim_{b'\to b}\int_a^{b'}(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))dx \underset{\substack{\text{т.к. интеграл } \int_a^{b'} \text{ -}\\ \text{обычный Риманов}}}{=} \lim_{b'\to b}\left(\int_a^{b'}\alpha\cdot f(x)dx+\int_a^{b'}\beta\cdot g(x)dx\right)=$$

$$\underset{\substack{\text{т.к. предел суммы =}\\ \text{сумме пределов}}}{=} \lim_{b'\to b}\int_a^{b'}\alpha\cdot f(x)dx+\lim_{b'\to b}\int_a^{b'}\beta\cdot g(x)dx \underset{\substack{\text{по однородному свойству}\\ \text{для интегралов Римана и по}\\ \text{свойству пределов}}}{=} \alpha\lim_{b'\to b}\int_a^{b'}f(x)dx+\beta\lim_{b'\to b}\int_a^{b'}g(x)dx=$$

$$\underset{\substack{\text{вернемся к несобственным}\\ \text{интегралам}}}{=} \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

Теорема доказана.

<u>Важные примеры (их результат нужно запомнить):</u>

1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$;

а) $\alpha=1$ $\quad\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty$ - интеграл расходится

б) $\alpha\neq1$ $\quad\int_1^{+\infty}x^{-\alpha}dx=\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\Big|_1^{+\infty}=\begin{cases}-\alpha+1>0 - \text{расходится}\\ -\alpha+1<0 - \text{сходится}\end{cases}$

Значит, $\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} - \begin{matrix}\text{сходится, } \alpha>1\\ \text{расходится, } \alpha\le1\end{matrix}}$

2) $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$;

а) $\alpha=1$ $\quad\int_0^1\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_0^1=+\infty$ - интеграл расходится

б) $\alpha\neq1$ $\quad\int_0^1x^{-\alpha}dx=\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\Big|_0^1=\begin{cases}-\alpha+1>0 - \text{сходится}\\ -\alpha+1<0 - \text{расходится}\end{cases}$

Значит, $\boxed{\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha} - \begin{matrix}\text{сходится, } \alpha<1\\ \text{расходится, } \alpha\ge1\end{matrix}}$

Несобственные интегралы от положительных (неотрицательных) функций.

Мы рассмотрим свойства положительных (неотрицательных) функций, но по свойству однородности мы всегда можем от отрицательной (неположительной) функции перейти кположительной (неотрицательной), исследовать ее интеграл на сходимость, а потом уже перейти к тому, что нам нужно.

Пусть задана функция *f,* такая что $\int_a^b f(x)dx$ имеет единственную особенность в точке *b* (конечной или бесконечной).

Пусть $f\ge0$ на $[a,b)$. Рассмотрим $F(b')=\int_a^{b'}f(x)dx,\ a<b'<b$. Эта функция неубывающая:

$\forall b'<b''\ \int_a^{b''}f(x)dx=\int_a^{b'}f(x)dx+\int_{b'}^{b''}f(x)dx\ge\int_a^{b'}f(x)dx$.

Т.е. $\int_a^b f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow\ \exists\lim\limits_{b'\to b-0}F(b')\Leftrightarrow F(b')$ ограничена на $[a,b)$.

<u>Теорема 1 (признак сравнения для несобственных интегралов):</u>

Пусть заданы f,g на $[a,b)$ такие, что соответствующие интегралы имеют единственную особенность в точке *b*, и при этом $\forall x\in[a,b)\ \ 0\le f(x)\le g(x)$, тогда

$\int_a^b g(x)dx$ сходится $\Rightarrow\int_a^b f(x)dx$ сходится

$\int_a^b f(x)dx$ расходится $\Rightarrow\int_a^b g(x)dx$ расходится

<u>Доказательство:</u>

Пусть $\int_a^b g(x)dx$ сходится, тогда $F(b')=\int_a^{b'}f(x)dx\le\int_a^{b'}g(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

Т.е. получили, что $F(b')$ – неубывающая, ограниченная сверху $\Rightarrow\ \exists$ предел:

$\exists \lim\limits_{b'\to b-0} F(b') = \int_a^b f(x)dx$

Кроме того, т.к. $\forall b' < b \ \int_a^{b'} f(x)dx \le \int_a^{b'} g(x)dx$ то, переходя к пределам, получим:

$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Т.е. и для несобственных интегралов верна теорема для предельного перехода под знаком интеграла.

Мы доказали, что если больший сходится, то и меньший сходится. Докажем, что, если меньший расходится, то и больший тоже расходится.

Пусть меньший расходится, тогда, если бы больший сходился, то и меньший бы сходился, $\Rightarrow$ противоречие.

(здесь мы основывались на том, что $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$).

Теорема доказана.

Признаки сравнения для несобственных интегралов.

<u>*Замечание:*</u> в признаке сравнения говорится

$\forall x \in [a;b)$ выполняется неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$. Признак остается верным, если это неравенство выполняется $\forall x \in [b';b)$ $a \le b' < b$, мы говорили о том, даже доказывали, что $\int\limits_a^b f(x)dx \ и \int\limits_{b'}^b f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно, т.к. условие Коши для них выглядит одинаково. То есть достаточно, чтобы неравенство выполнялось в какой-то окрестности точки b.

<u>*Теорема 2.*</u> Предельный признак сравнения.

Если $f(x) \ge 0$ $g(x) > 0$ и $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \ne 0$, то несобственные $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ с единственной особенностью в точке b сходятся и расходятся одновременно.

<u>*Доказательство:*</u>

По определению предела:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (b-\delta, b) \ A - \varepsilon \le \dfrac{f(x)}{g(x)} \le A + \varepsilon$

Возьмем $\varepsilon < \dfrac{A}{2}$, естественно, что A>0, тогда

$C_2 \cdot g(x) \le f(x) \le C_1 \cdot g(x), \qquad C_1 > 0, \quad C_2 > 0$.

Если $\int\limits_a^b g(x)dx$ - сходится, то $\int\limits_a^b C_1 \cdot g(x)dx$ - тоже сходится, по признаку сравнения сходится и $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Если сходится $\int\limits_a^b f(x)dx \Rightarrow \int\limits_a^b \dfrac{1}{C_2} f(x)dx$ - сходится, тогда $\int\limits_a^b g(x)dx$ - сходится. Расходимость аналогично.

Теорема доказана.

<u>*Пример 1 (на предельный признак сравнения).*</u>

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x - \ln(x+1)} = \left[x - \ln(x+1) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + \bar{\bar{o}}(x^2) \right) = \frac{x^2}{2} + \bar{\bar{o}}(x^2) \right] =$$

$= \left[\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(x+1)}{x^2} = \dfrac{1}{2} \right] \square \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^2}$ – расходится, т.к. $\alpha > 1$, тогда исходный интеграл тоже расходится.

<u>*Пример 2 (на первый признак сравнения).*</u>

$\int\limits_0^{+\infty} x \cdot e^{-x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x \cdot dx}{e^x} = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^3 \cdot dx}{x^2 e^x}$; так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^x} = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$ - ограничена, $\dfrac{x^3}{e^x} \le k$, тогда $\forall x \in [0;+\infty)$

$\int\limits_0^{+\infty} x\cdot e^{-x}dx \le k\underbrace{\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}}_{сходится}+\underbrace{\int\limits_0^1 x\cdot e^{-x}dx}_{сходится}$, то есть интеграл сходится. Если бы степень x была бы, например, 1.5, то интеграл бы не брался. Вот для такого примера было бы интересно применить этот признак сравнения.

Абсолютная сходимость интегралов.

Определение 1. Рассмотрим $\int\limits_a^b f(x)dx$ с единственной особенностью в точке b, конечной или бесконечной, тогда если $\int\limits_a^b |f(x)|dx$, у него, естественно, тоже единственная особенность в точке b, сходящийся, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся.

Теорема: если интеграл абсолютно сходится, то он сходится.
Доказательство:
Нам дано, что $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ – сходится.

По критерию Коши $\forall\varepsilon>0\ \exists\ c,\ a<c<b:\forall b',b'':\ c<b'<b''<b\ \int\limits_{b'}^{b''}|f(x)|dx<\varepsilon$ Это уже наш обычный определенный интеграл Римана. Для него есть неравенство:
$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx\right|\le\int\limits_{b'}^{b''}|f(x)|dx \Rightarrow$ критерий Коши выполняется и для $\int\limits_a^b f(x)dx$, то есть, по критерию Коши уже для нашего интеграла, он сходящийся.
Кроме того, $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\le\int\limits_a^b|f(x)|dx$, тогда $\forall b'<b$ $\left|\int\limits_a^{b'} f(x)dx\right|\le\int\limits_a^{b'}|f(x)|dx$, переходя к пределу при $b'\to b$.
Сразу мы такого сделать не могли, так как мы не знаем, существует ли этот предел слева или нет. Из того, что интеграл ограничен, существование предела еще не следует. Функция может быть не монотонна, поэтому мы и доказали сначала существование этого интеграла, а потом уже неравенство.

По признаку сравнения мы тоже так сделать не могли, так как он только для знакопостоянных функций.

Определение 2. Если $\int\limits_a^b f(x)dx$ - сходящийся, а $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ - расходящийся, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется условно сходящимся.
Когда мы исследуем интеграл от не знакопостоянной функции, мы должны сначала исследовать его сначала на абсолютную сходимость, если получится, что он абсолютно расходится, то надо исследовать на условную сходимость. Если он сразу абсолютно сходится, то все хорошо.

Пример.
Исследуем на абсолютную сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$;
$\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\cos x|}{x^2}dx\le\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ - сходящийся, значит и исходный интеграл сходящийся, то есть интеграл сходится абсолютно. Признаком сравнения мы сразу не имеем права пользоваться, потому, что косинус у нас на этом промежутке может быть как положительным, так и отрицательным, поэтому мы исследуем интеграл на абсолютную сходимость.

Интегрирование по частям и признаки условной сходимости.

Рассмотрим $\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx$, где $f(x)$ - непрерывна на $[a;b)$, $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a;b)$.

Пусть $F(x)$ – первообразная $f(x)$, тогда

$$\forall\ a<b'<b\ \int_a^{b'} f(x)\cdot\varphi(x)dx=\begin{bmatrix} f(x)\cdot dx=dV & U=\varphi(x)\\ V=F(x) & dU=\varphi'(x)\cdot dx\end{bmatrix}=\varphi(x)\cdot F(x)\Big|_a^{b'}-$$

$$-\int_a^{b'} F(x)\cdot\varphi'(x)dx=\varphi(b')\cdot F(b')-\varphi(a)\cdot F(a)-\int_a^{b'} F(x)\cdot\varphi'(x)dx.$$

Если существует $\lim\limits_{b'\to b}\varphi(b')\cdot F(b')$ - конечный и существует $\int_a^b F(x)\cdot\varphi'(x)dx$ - сходящийся, то существует $\lim\limits_{b'\to b}\int_a^{b'} f(x)\cdot\varphi(x)dx=\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx$, то есть интеграл сходящийся.

Первый признак сходимости (Абеля).

Если $F(x)$ ограничена на $[a;b)$, $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x)=0$ и $\int_a^b\varphi'(x)\cdot dx$ - сходящийся абсолютно, то $\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx$ - сходящийся.

Доказательство:

Рассмотрим $\lim\limits_{b'\to b}\underbrace{\varphi(b')}_{беск.мал.}\cdot\underbrace{F(b')}_{огр}=0$

Рассмотрим $\int_a^b\varphi'(x)\cdot F(x)\cdot dx$, он абсолютно сходящийся:

$\int_a^b|\varphi'(x)|\cdot|F(x)|dx\le k\int_a^b|\varphi'(x)|dx$ - сходящийся по условию. Значит интеграл сходится.

Признак Дирихле.

Если $F(x)$ - ограниченная на $[a;b)$, знакопостоянная $\varphi(x)$ монотонно стремится к 0 при $x\to b$, то интеграл сходящийся.

Доказательство:

Так как $\varphi(x)$ - знакопостоянная, то меняя знак, мы всегда можем добиться того, чтобы $\varphi(x)\ge 0$. Рассмотрим этот случай.

Очевидно, $\lim\limits_{b'\to b}\underbrace{\varphi(b')}_{беск.мал.}\cdot\underbrace{F(b')}_{огр}=0$

Надо доказать, что $\int_a^b|\varphi'(x)|dx$ – сходится. Рассмотрим случай $\varphi(x)\ge 0$, с учетом невозрастания $\varphi'(x)\le 0$, тогда

$\int_a^{b'}|\varphi'(x)|dx=-\int_a^{b'}\varphi'(x)dx=-\left(\underbrace{\varphi(b')}_{\to 0}-\varphi(a)\right)=\varphi(a)$ - сходится, тогда исходный интеграл сходящийся по первому признаку.

Пример. Исследуем на сходимость

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\begin{bmatrix} f(x)=\sin x & |F(x)|\le 1 \\ F(x)=-\cos x & \varphi(x)=\dfrac{1}{x}\searrow 0 \text{ } при\ x\to+\infty \end{bmatrix}\Rightarrow\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot dx$$ - сходящийся.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx\ge\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}dx$$

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$ - расходящийся, а $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$ - сходящийся по признаку Дирихле, значит и весь исходный интеграл расходится. Таким образом, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ сходится условно.

Тема 7. Функции нескольких переменных. Лекции 15-16.

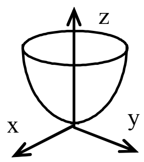
Определение. Функции двух переменных.

Если $\forall$ упорядоченной паре чисел $(x,y)\in D$ по некоторому закону f ставится в соответствие число $z\in E$, то говорят, что задана функция $z=f(x,y)$. Множество D- область определения, а E - область изменения функции.

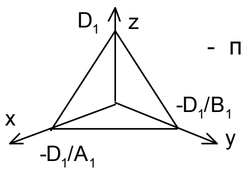
Геометрический смысл ФМП - поверхность в пространстве.

Пример.

$Z=x^2+y^2$ задает параболоид, а $Z=A_1x+B_1y+D_1$ - плоскость.



-



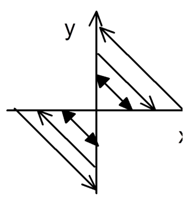
- плоскость

Определение. Функции многих переменных (ФМП.)

Если $\forall(x_1,x_2,...x_n)\overset{f}{\Rightarrow}z\in R$, то говорят, что $z=f(x_1,x_2,...x_n)$- ФМП.

Пример.

Нахождение областей определения ФМП производят с учетом свойств элементарных функций.Если $z=\ln(xy)\Rightarrow xy>0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x<0\\y<0\end{cases}$,



при $z=\ln(\sin(xy))\Rightarrow\sin(xy)>0\Rightarrow\ 0+2\pi k<xy<\pi+2\pi k$.

Пределы ФМП

Определение.

Число A называют пределом ФМП $z=f(x,y)$ в т.(x_0,y_0),если

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall$пар (x,y) из неравенства $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$ $\overset{\text{следует}}{\Rightarrow}|f(x,y)-A|<\varepsilon$, при этом пишут

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A\,.$$

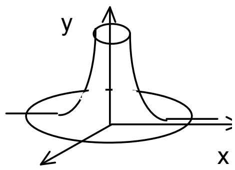
Если A=0, т. е. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$, то функцию f(x,y) называют бесконечно-малой (БМФ) при (x,y)$\to$(x_0,y_0).

Определение. Бесконечно большой функции.

Если $\forall$M>0 $\exists\delta$:$\forall$(x,y) из 0<(x- x_0)^2+(y-y_0)^2<δ^2 $\Rightarrow$ $|$f(x,y)$|$>M, при этом пишут $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \infty$ и говорят, что z=f(x,y) бесконечно-большая (ББФ), при (x,y)$\to$(x_0,y_0).

Геометрический смысл.

$z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$



Определение. Непрерывной функции.

Говорят, что функция f(x,y) непрерывна в т. (x_0,y_0), если $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

ЗАМЕЧАНИЕ

Кроме $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ существуют повторные пределы $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ и $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, причем из $\exists$ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \Rightarrow \exists$- повторных пределов, но из $\exists$-я повторных пределов не следует $\exists$ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Пример.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ -? Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-y^2}{y^2} = -1$

Но предел, если он существует, единственен, значит не существует предела z=$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, при (x,y)$\to$(0,0)

Частные производные ФМП

Пусть z=f(x,y) определена в т. M_0(x_0,y_0) и ее окрестности

Назовем разность x-x_0=Δx- приращением координаты x, а

y-y_0=Δy- приращением координаты y , тогда для функции z=f(x,y) имеем

Δ_xz=f(x_0+Δx,y_0)-f(x_0,y_0)- частное приращение по координате x

Δ_yz=f(x_0,y_0+Δx)-f(x_0,y_0)- частное приращение по координате y.

Определение 1. Частной производной по переменной x.

Если существует конечный предел отношения $\Delta_x z$ к Δx при $\Delta x \to 0$, то он называется частной производной по переменной x и обозначается

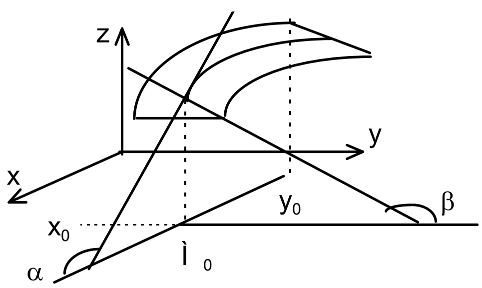
$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{sx \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \ .$$

Определение. Частной производной по переменной y.

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

При нахождении частной производной по заданной переменной фиксируются все переменные кроме заданной и частная производная находится как обычная производная функции одной переменной.

Геометрический смысл частных производных



$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = tg\alpha \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = tg\beta$$

Пример.

$z=x^y$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y \cdot \ln x$

$z=\ln xy$, $z'_x=1/xy\cdot(xy)'_x=y/xy=1/x$.

$z'_y=1/xy\cdot(xy)'_y=x/xy=1/y$.

Определение.

Функция $z=f(x,y)$, называется дифференцируемой в точке $M_0(x_0,y_0)$, если ее приращение $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)$, где $\alpha(\Delta x,\Delta y)\to 0$, при $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$. При этом A,B- константы в точке M_0, $\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ - полное приращение функции.

Определение.

Дифференциалом функции $z=f(x,y)$ называют выражение $dz=Adx+Bdy$- линейную часть приращения функции $z=f(x,y)$ в т. M_0.

Теорема. Необходимое условие дифференцируемости.

Если $z=f(x,y)$ дифференцируема в т. M_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство.

Т.к. $z=f(x,y)$ дифференцируема в т. $M_0 \Rightarrow \Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)$, тогда

$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta z = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} [A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)] = 0$ т. е.

z=f(x,y) непрерывна по определению.

Теорема. О связи дифференциала и производных.

Если z=f(x,y) дифференцируема в т. M_0 (x_0,y_0), тогда существуют $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)$.

Доказательство.

Из дифференцируемости следует, что $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)$, но тогда

при y=0 $\Delta_x z=A\Delta x+\alpha(\Delta x,0) \Rightarrow \exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A$,

при $\Delta x=0$ $\Delta_y z=B\Delta y+\alpha(0,\Delta y) \Rightarrow \exists \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta y}=B$.

Что и требовалось доказать. При этом дифференциал имеет вид

$$\boxed{dz=z'_x dx+z'_y dy}$$

Теорема. Достаточное условие дифференцируемости ФМП.

Если $\exists z'_x$ и z'_y- непрерывные в т. M_0, то функция z=f(x,y) дифференцируема в т. M_0.

Так как $dz=z-z_0=z'_x(x-x_0)+z'_y(y-y_0)$, то геометрический смысл дифференциала - приращение в т. M_0 аппликаты z- касательной плоскости к графику функции z=f(x,y).

Определение.

Если z=f(x,y) определена на $\forall(x,y)\in D$ и имеют смысл функции x=x(u,v), y=y(u,v), $\forall(u,v)\in D$, то говорят, что задана сложная ФМП z=f(x(u,v), y(u,v)).

Пример.

$z=\ln(\cos(x\cdot y)+\mathrm{tg}(x+y))=\ln(\cos u+\mathrm{tg} v), \begin{cases} xy=u \\ x+y=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases},$

При нахождении частных производных ФМП применяют следующие теоремы.

Теорема. О производной сложной функции.

Если z=f(x,y) дифференцируема для $\forall$ пар $(x,y)\in D$ и

$\exists x'_t, y'_t$ для $t\in[a,b]$, то производная может быть вычислена по формуле $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$

Доказательство. Из дифференцируемости z=f(x,y) следует $\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)$. Так как $\exists$ x'_t, y'_t ,то x(t) и y(t)- непрерывные, значит $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, при $\Delta t\to 0$, а тогда $\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{\alpha(\Delta x,\Delta y)}{\Delta t}$, $\Delta t\neq 0$.

Переходя к пределу имеем

$$\frac{dz}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}[\,f'_x\frac{\Delta x}{\Delta t}+f'_y\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{\alpha(.)}{\Delta t}]=f'_x\frac{dx}{dt}+f'_y\frac{dy}{dt}$$

Теорема. О производной z=f(x(u,v), y(u,v))

Если z=f(x,y) дифференцируема для $\forall(x,y)\in D$ и $\exists\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial v}$ для $\forall(u,v)\in D$, тогда справедливы формулы

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}}$$

Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Если существуют первые производные от частных производных найденных ранее, то они называются частными производными высших порядков и обозначаются

если $\exists\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1}z}{\partial x^{n-1}}\right)=\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Аналогично первые дифференциалы от дифференциалов, найденных ранее, если dx и dy фиксированы, называют дифференциалами высших порядков и обозначают

$$d(d^{n-1}z)\overset{def}{=}d^n z,\quad d^2z=f''_{xx}(dx)^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{yy}(dy)^2.$$

Пример.

Если $z=x^2y+xy^2$, то

$f'_x=2xy+y^2$, $f'_y=x^2+2xy \Rightarrow f''_{xx}=2y$, $f''_{yy}=2x$, $f''_{xy}=2x+2y$.

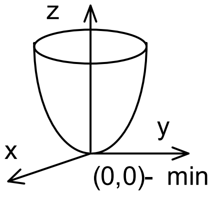
Тогда $d^2z=2ydx^2+4(x+y)2xdy+2xdy^2$.

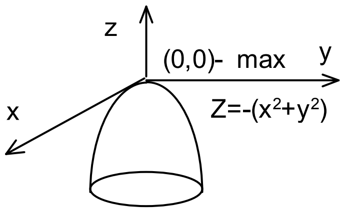
Заметим, что как и для функции одной переменной дифференциал $dz=f'_xdx+f'_ydy$- обладает свойством инвариантности, дифференциалы более высоких порядков- нет.

Экстремумы ФНП

Определение.

Точка M_0- точка максимума (минимума) функции z=f(x,y), если $\exists\delta$- окрестность т. M_0 такая, что для $\forall(x,y)$из этой окрестности $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ $(f(x,y)>f(x_0,y_0))$





Теорема. Необходимое условие экстремума.

Если т. M_0 (x_0,y_0)- точка экстремума, тогда или

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\quad\text{или}\quad \frac{\partial z}{\partial x}\ \text{и}\ \frac{\partial z}{\partial y}-\nexists\ \text{(не существуют).}$$

В дальнейшем точки в которых $z'_x=0$ и $z'_y=0$ или не $\exists$ назовем критическими.

Теорема . Достаточное условие экстремума.

Пусть т. M_0- критическая, причем

$z=f(x,y)$- непрерывна в т. M_0

существуют f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy} в т. M_0, тогда

при $\Delta(M_0)=f''_{xx}(M_0)f''_{yy}(M_0)-[f''_{xy}(M_0)]^2>0$, экстремум есть, причем при $f''_x(M_0)<0$- максимум, $f''_{yy}(M_0)>0$- минимум.

Если же $\Delta<0$, экстремума нет, при $\Delta=0$- ничего нельзя сказать о наличии экстремума.

Пример.

$$z=x^2+y^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad M_0(0,0) \quad \begin{cases} z''_{xx}=2 \\ z''_{yy}=2 \end{cases}$$

Так как $\Delta(M_0)=2\cdot2-0>0$- экстремум есть, причем $z''_{xx}>0 \Rightarrow$ в точке M_0-минимум.

Если требуется найти экстремум функции $z=f(x,y)$ при условии, что переменные x,y связаны условием $g(x,y)=0$, то задачи такого вида называют задачами на условный экстремум и решают методом множителей Лангража.

Метод множителей Лагранжа.

Пусть требуется найти условный экстремум функции

$$z=f(x,y)$$

при наличии условия

$$g(x,y)=0.$$

Идея метода Лагранжа состоит в том, что:

1. Вводится новая функция трех переменных, называемая функцией Лангража как
$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y),$$
где λ- неопределенный множитель, который рассматривается как новая переменная;
2. Ищется экстремум (уже безусловный) этой функции. Для этого вычисляются частные производные первого порядка и приравниваются к нулю:
$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda)=0, \\ F'_y(x,y,\lambda)=0, \\ F'_\lambda(x,y,\lambda)=0. \end{cases}$$

Полученные уравнения образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными. Решение этой системы представляет собой тройку чисел (x_0, y_0, λ_0), первые два из которых, т. е. (x_0,y_0), и дают координаты точки условного экстремума исходной функции $f(x,y)$.

Применим метод Лагранжа для отыскания экстремума функций [1].

Пример.

Пусть $f(x,y)=x^2-3xy+12x$ при условии $g(x,y)=6-2x-3y=0$.

Функция Лангража имеет вид $F(x,y,\lambda)=x^2-3xy+12x+\lambda(2x+3y-6)$.

Тогда $F'_x(x,y,\lambda)=2x-3y+12+2\lambda,$

$$F'_y(x,y,\lambda)=-3x+3\lambda,$$

$$F'_\lambda(x,y,\lambda)=-6+2x+3y=0.$$

Приравняв к нулю получим систему

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2\lambda = -12 \\ +3x - 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом исключения. Для этого умножим первое (сверху) уравнение на 3, а второе на -2 и складываем, третье уравнение вычитаем из первого. Этим исключается переменная x и система принимает вид:

$$\begin{cases} -9y + 12\lambda = -36, \\ -6y + 2\lambda = -18. \end{cases}$$

Теперь исключаем переменную λ, умножая второе уравнение на -6, и складывая с первым. В результате

$$-27y=72 \Rightarrow Y=8/3.$$

Подставляя это значение в уравнение, находим сначала λ, затем x:

$$\lambda=-1; \; x=-1.$$

Значит координаты точки условного экстремума (-1, 8/3). Соответствующее значение функции

$$f(-1, 8/3)=(-1)^{2\cdot}-3\cdot(-1)\cdot(8/3)+12\cdot(-1)=-3.$$

Тема 8. Кратные интегралы. Лекции 17-18.

Задача об объеме цилиндрического бруса.

Точно так же, как задача о площади криволинейной трапеции привела нас к понятию простого определенного интеграла, аналогичная задача об объеме цилиндрического бруса приведет нас к новому понятию – *двойного интеграла*.

Рассмотрим тело (V), которое сверху ограничено поверхностью

$$z = f(x, y), \tag{1.1}$$

с боков - цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, снизу – плоской фигурой (D) на плоскости xOy (рис.1.1). Требуется найти объем V тела.

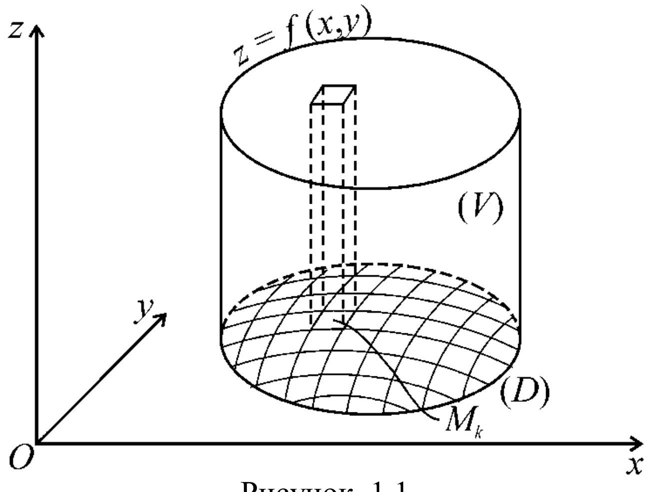


Рисунок. 1.1

Для решения этой задачи мы прибегнем к обычному в интегральном исчислении приему, состоящему в разложении искомой величины на элементарные части, приближенному подсчету каждой части, суммированию и последующему предельному переходу. С этой целью разобьем область (D) сетью кривых на части $(\Delta S_1), (\Delta S_2), \ldots, (\Delta S_n)$ и рассмотрим ряд цилиндрических столбиков, которые имеют своими основаниями эти частичные области и в совокупности составляют данное тело.

Для подсчета объема отдельных цилиндрических столбиков возьмем произвольно в каждой фигуре (ΔS_k) по точке $M_k(\xi_k,\eta_k)$. Если приближенно принять каждый столбик за цилиндр с высотой, равной аппликате $f(\xi_k,\eta_k)$, то объем отдельного столбика оказывается приближенно равным $f(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k$, где ΔS_k означает площадь фигуры (ΔS_k). В таком случае приближенное выражение объема всего тела будет

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если взять любые пары точек в области то верхняя грань множества расстояний между ними называется диаметром области, обозначается *d*.

Для повышения точности этого равенства будем уменьшать размеры площадок (ΔS_k), увеличивая их число. В пределе, при стремлении к нулю наибольшего из диаметров *d* всех областей (ΔS_k), это равенство делается точным, так что

$$V = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k , \qquad (1.2)$$

и поставленная задача решена.

Предел этого вида и есть *двойной интеграл от функции f (x,y) по области* (D); он обозначается символом $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dS$ или $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$, так что формула (1.2) для объема принимает вид

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dS . \qquad (1.2^*)$$

Таким образом, двойной интеграл является прямым обобщением понятия простого определенного интеграла на случай функции двух переменных.

1.2.Определение двойного интеграла

Возьмем произвольную фигуру (D) на плоскости, представляющую собой *ограниченную* и *замкнутую* область. Ее границу мы всегда будем представлять в виде замкнутой кривой (или нескольких таких кривых).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Область (D) называется квадрируемой, если она имеет площадь.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем будем рассматривать только квадрируемые области.

Пусть в области (D) определена функция двух переменных $f(x,y)$. Разобьем область (D) сетью кривых на *конечное* число элементарных областей $(\Delta S_1), (\Delta S_2),\ldots, (\Delta S_n)$ соответственно с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2,\ldots, \Delta S_n$. В каждой элементарной области (ΔS_k) возьмем по произвольной точке $M_k(\xi_k,\eta_k)$, значение функции в этой точке $f(\xi_k,\eta_k)$ умножим на площадь ΔS_k соответствующей области и все подобные произведения сложим. Полученную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k \qquad (1.3)$$

будем называть *интегральной суммой для функции f (x, y) по области* (*D*).

Обозначим через d наибольший из диаметров $d_1, d_2, \ldots, d_n$ элементарных областей $(\Delta S_1), (\Delta S_2),\ldots, (\Delta S_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если при стремлении к нулю наибольшего из диаметров d существует конечный предел I интегральной суммы (1.3), и он не зависит ни от способа разбиения области (D) на элементарные области $(\Delta S_1), (\Delta S_2), \ldots, (\Delta S_n)$, ни от выбора точек $M_k(\xi_k, \eta_k)$ в каждой элементарной области (ΔS_k), то этот предел называется *двойным интегралом от функции* $f(x,y)$ *по области* (D) и обозначается $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dS$.

ТЕОРЕМА 1. (*необходимое условие существования двойного интеграла*). Если функция $f(x,y)$ интегрируема в ограниченной замкнутой области (D), то она ограничена в этой области.

ТЕОРЕМА 2. (*достаточное условие существования двойного интеграла*). Если функция $f(x,y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области (D), то она интегрируема в ней.

Из пункта 1.1. следует *геометрический смысл двойного интеграла*. Если функция $f(x,y)$ неотрицательна: $f(x,y) \geq 0$ - и интегрируема в области (D), то двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области (D) равен объему тела, сверху ограниченного поверхностью $z = f(x,y)$, с боков - цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, снизу – областью (D) на плоскости xOy: $V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$.

1.3. Свойства двойного интеграла

1. $S_D = \iint\limits_{(D)} dxdy$.

2. Если функцию $f(x,y)$, интегрируемую в области (D), умножить на постоянную k, то полученная функция $k f(x,y)$ также будет интегрируема в области (D), причем

$$\iint\limits_{(D)} k\, f(x,y)dxdy = k\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy.$$

3. Если в области (D) интегрируемы функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$, то интегрируема и функция $f(x,y) \pm g(x,y)$, причем

$$\iint\limits_{(D)} [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{(D)} g(x,y)dxdy.$$

4. Если область (D), в которой задана функция $f(x,y)$, кривой (L) разделена на две области (D') и (D''), то из интегрируемости функции $f(x,y)$ во всей области (D) следует ее интегрируемость в областях (D') и (D''), и обратно – из интегрируемости функции в обеих областях (D') и (D'') вытекает ее интегрируемость в области (D). При этом

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D')} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D'')} f(x,y)dxdy.$$

5. Если для интегрируемых в области (D) функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ выполняется нера-

венство $f(x,y) \le g(x,y)$, то $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \le \iint\limits_{(D)} g(x,y)dxdy$.

6. В случае интегрируемости функции $f(x,y)$ в области (D) интегрируема и функция $|f(x,y)|$ в области (D), и имеет место неравенство $\left|\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_{(D)} |f(x,y)|dxdy$.

7. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области (D), то найдется такая точка $(\overline{x},\overline{y})$ в области (D), что $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = f(\overline{x},\overline{y}) \cdot S_D$ $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = f(\overline{x},\overline{y}) \cdot S_D$, где S_D – площадь области D.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Свойство 3 обобщается на любое конечное число функций.
Свойство 4 обобщается на любое конечное число областей.

1.4. Сведение двойного интеграла к повторному интегралу

Продолжая трактовать двойной интеграл геометрически, как объем цилиндрического бруса, дадим указания относительно его вычисления путем сведения к повторному интегралу.

Ранее рассматривалась задача вычисления объема тела (V) по его поперечным сечениям. Напомним относящуюся сюда формулу. Пусть тело ограничено плоскостями $x = a$ и $x = b$ (рис.1.2).

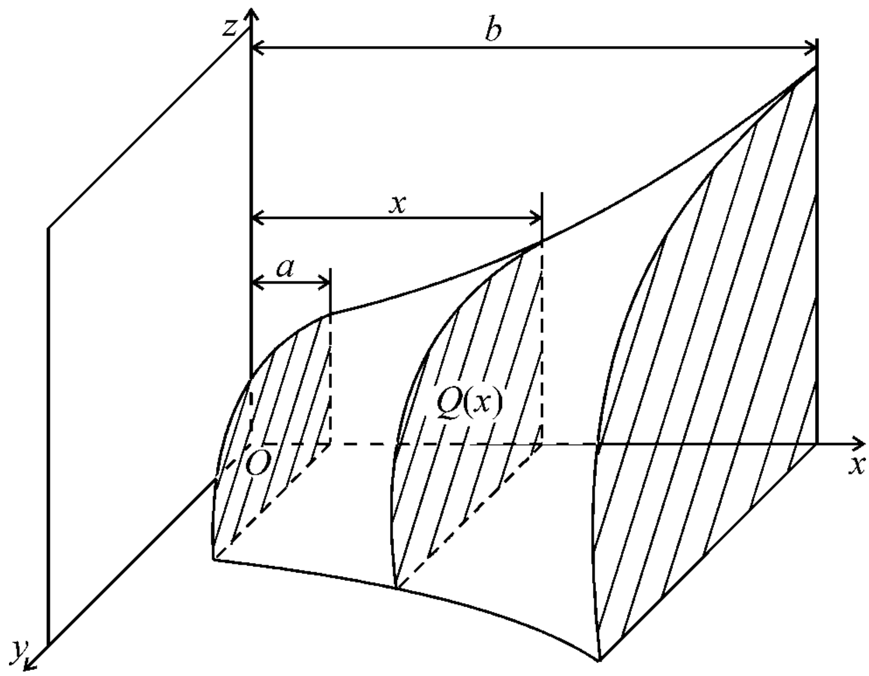


Рисунок. 1.2

Допустим, что сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс и отвечающей абсциссе $x\,(a \le x \le b)$, имеет площадь $Q(x)$. Тогда объем тела, в предположении его существования, выразится формулой

$$V = \int_a^b Q(x)dx. \qquad (1.4)$$

Применим теперь эту формулу к вычислению объема цилиндрического бруса, о котором шла речь выше. Начнем с простого случая, когда в основании бруса лежит прямоугольник [*a*, *b*; *c*, *d*] (рис.1.3).

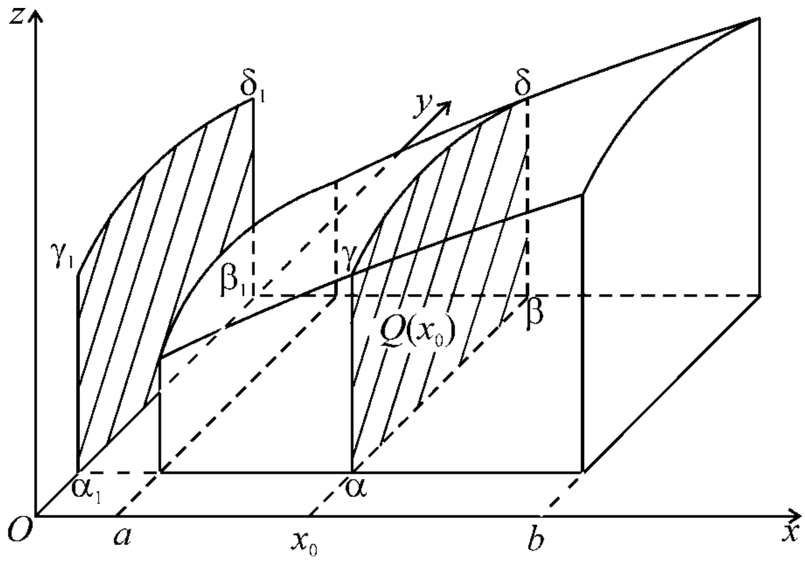


Рисунок. 1.3

Сечение бруса плоскостью $x = x_0$ $(a \le x_0 \le b)$ есть криволинейная трапеция $\alpha\beta\delta\gamma$. Для нахождения ее площади спроектируем эту фигуру на плоскость yOz. Получим конгруэнтную с ней трапецию $\alpha_1\beta_1\delta_1\gamma_1$ (ибо проектирование происходит без искажения). Но уравнение линии $\gamma_1\delta_1$ на плоскости yOz, очевидно, будет $z = f(x_0, y)\ (c \le y \le d)$.

Пользуясь известным выражением площади криволинейной трапеции в виде определенного интеграла, будем иметь $Q(x_0) = \int\limits_c^d f\left(x_0, y\right)dy$. Так как наше рассуждение относится к любому сечению, то вообще для $a \le x \le b$ $Q(x) = \int\limits_c^d f\left(x, y\right)dy$. Подставляя это значение $Q(x)$ в формулу (1.4), получим $V = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x, y)dy$. Но мы имеем для объема V и выражение (1.2*), следовательно, $\iint\limits_{(D)} f(x, y)dS = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x, y)dy$ - двойной интеграл приведен к повторному.

Аналогичный результат можно получить и для общего случая, когда область (D) на плоскости xOy представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную двумя кривыми: $y = y_0\left(x\right)$, $y = Y\left(x\right)\left(a \le x \le b\right)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1.4). Разница по сравнению с рассмотренным случаем состоит в следующем: раньше при любом фиксированным $x = x_0$ изменение y происходило в одном и том же промежутке $\left[c, d\right]$, а теперь этот промежуток $\left[y_0\left(x_0\right), Y\left(x_0\right)\right]$ сам зависит от x_0, так что

$$Q(x_0) = \int\limits_{y_0(x_0)}^{Y(x_0)} f\left(x_0, y\right)dy.$$

Окончательно получим: $V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy$.

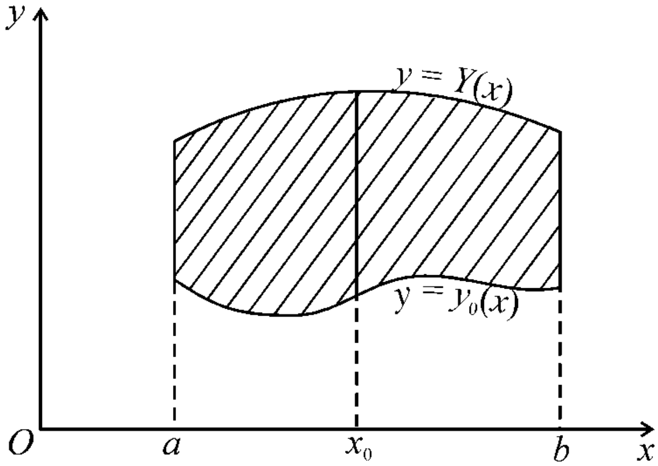


Рисунок. 1.4

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Область (D) называется правильной в направлении оси ординат, если любая прямая, проходящая через внутренние точки области (D) параллельно оси ординат, пересекает границу этой области в двух точках.

Аналогично дается определение области, правильной в направлении оси абсцисс.

Следующие две теоремы позволяют вычислять двойные интегралы в декартовых координатах.

ТЕОРЕМА 3. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области (D), область (D) - правильная в направлении оси ординат (рис. 1.4), то

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy.$$

ТЕОРЕМА 4. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области (D), область (D) - правильная в направлении оси абсцисс (рис. 1.5), то

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_0(y)}^{X(y)} f(x,y)dx.$$

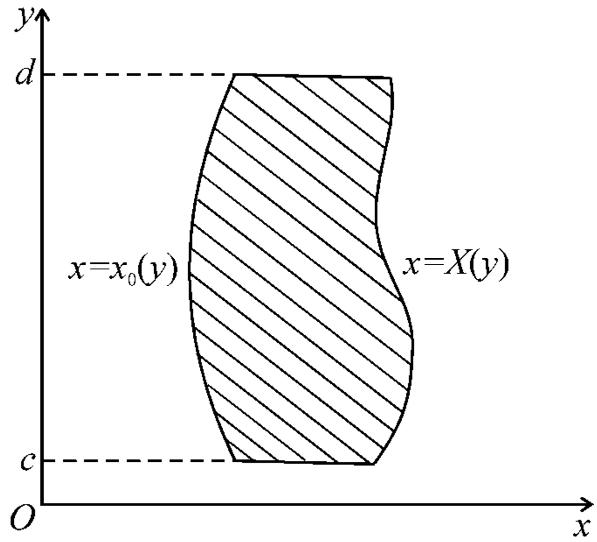


Рисунок. 1.5

ПРИМЕР 1. Записать двойной интеграл $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ в виде повторных интегралов (двумя способами), если:

а) область (D) ограничена прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$.

Решение

Построив на чертеже прямые, ограничивающие область интегрирования, видим, что (D) представляет собой прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям (рис.1.6). В этом случае обе переменные x и y изменяются в постоянных пределах $1 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$, а формулы для вычисления двойного интеграла принимают соответственно вид:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^4 f(x,y)dy; \qquad \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_1^2 f(x,y)dx.$$

б) область (D) ограниченна линиями $x = 0$, $x^2 + y^2 = r^2$, причем $x \ge 0$, $r > 0$.

Решение

Изобразим область интегрирования (D) на чертеже (рис.1.7). Возьмем сначала постоянные пределы по переменной x. Ими будут числа 0 и r. Для каждого значения x из отрезка $[0,r]$ y принимает значения от $-\sqrt{r^2-x^2}$ до $\sqrt{r^2-x^2}$.

Получим: $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^r dx \int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x,y)dy$.

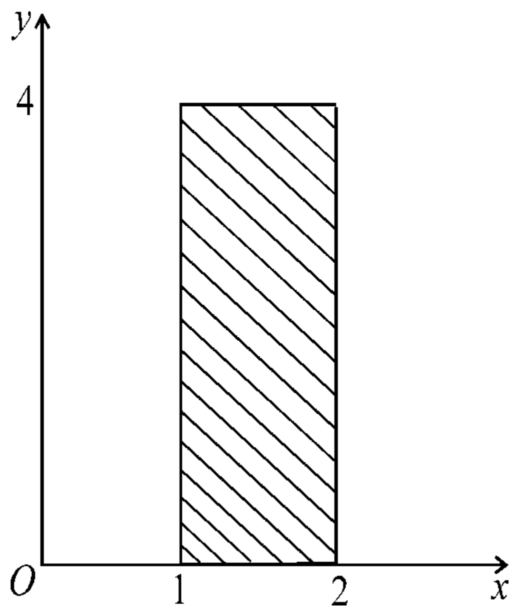


Рисунок. 1.6

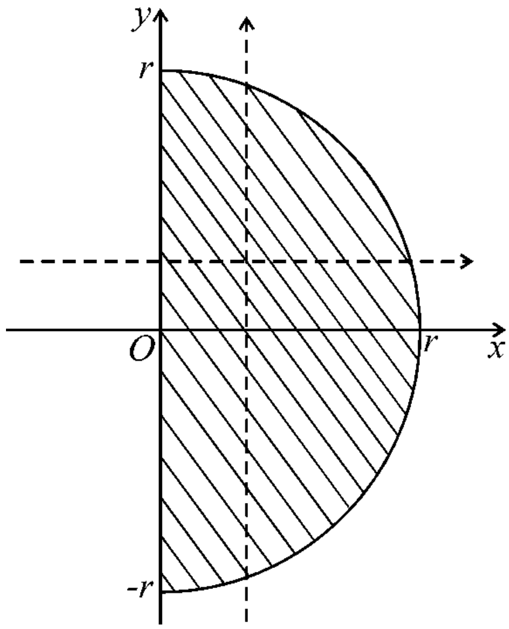


Рисунок. 1.7

Если постоянные пределы взять по y $\left(-r \le y \le r\right)$, то x принимает значения от 0 до $\sqrt{r^2 - y^2}$. Получим:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_{-r}^{r} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)dx\,.$$

Вообще при определении переменных пределов интегрирования полезно пользоваться следующим правилом: пусть x изменяется в постоянных пределах $a \le x \le b$ (рис.1.8). Чтобы получить пределы интегрирования по y, пересечем область (D) лучом, параллельным и одинаково направленным с осью ординат. Граница области, которую луч пересечет при входе в область, будет нижней границей этой области, а ее уравнение, решенное относительно y, служит для установления нижнего предела интегрирования по y $\left[y = y_1(x)\right]$.

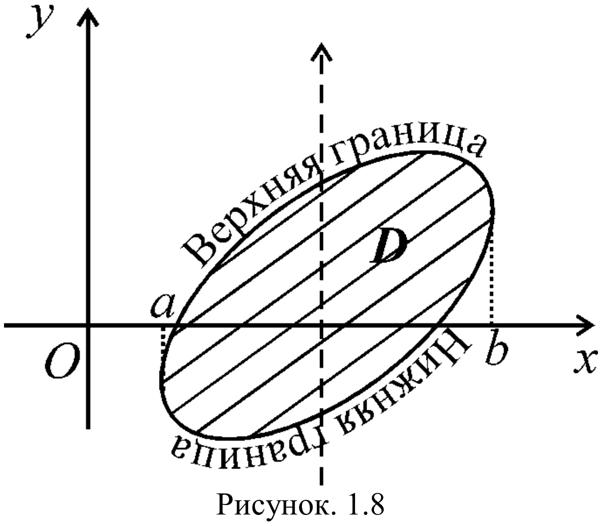


Рисунок. 1.8

Граница области, которую луч пересекает, выходя из области, будет верхней границей этой области, а ее уравнение, решенное относительно y, служит для установления верхнего предела интегрирования по y $\left[y = y_2(x)\right]$.

Аналогичным образом при постоянных пределах по y определяются переменные пределы по x.

2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Предположим, что даны две декартовы плоскости с осями x,y и u,v. Рассмотрим в этих плоскостях две замкнутые области: область (D) на плоскости xOy и область (D') на плоскости uOv. Каждая из этих областей может быть и неограниченной, в частности может охватывать и всю плоскость. Границу области (если область не охватывает всей плоскости) будем предполагать кусочно-гладкой кривой.

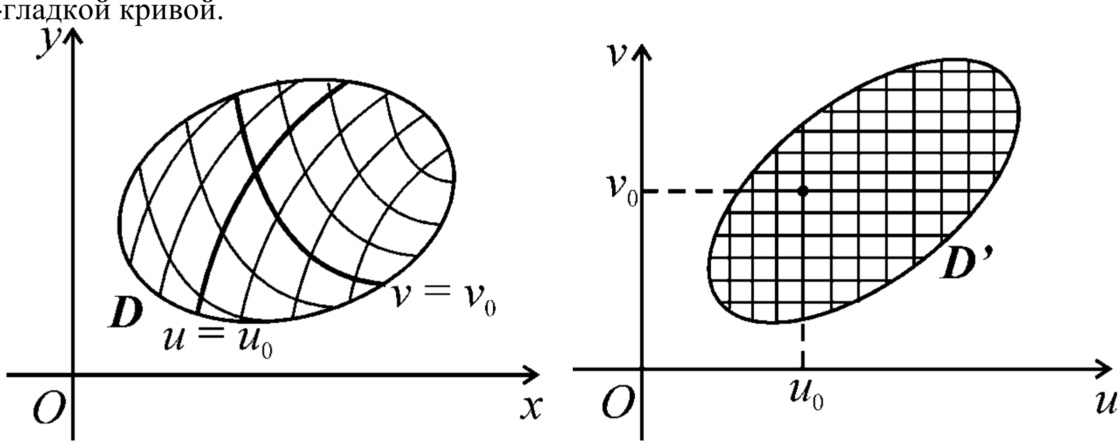


Рисунок.1.13

Допустим, что в области (D') дана система непрерывных функций

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v), \end{cases} \tag{1.5}$$

которая устанавливает между областями (D) и (D') взаимно однозначное соответствие. Задание пары значений переменных u и v из области (D') однозначно определяет некоторую точку в области (D) на плоскости xOy (и обратно). Это дает основание и числа u,v называть координатами точек области (D).

Кривую, составленную из точек области (D), у которых одна из координат сохраняет постоянное значение, называют *координатной линией*. В связи с тем, что координатные линии, вообще говоря, будут кривыми, числа u,v, характеризующие положение точки на плоскости xOy, и в этом случае (как и в случае кривой поверхности) называют *криволинейными координатами точки.*

Придавая координате u различные (возможные для нее) постоянные значения, получим семейство координатных линий на плоскости xOy. Фиксируя значение координаты v, получим другое семейство координатных линий. При наличии взаимно однозначного соответствия между рассматриваемыми областями различные линии одного и того же семейства не пересекаются между собой, и через любую точку области (D) проходит по одной линии из каждого семейства.

Вся сетка координатных линий на плоскости xOy является изображением сетки прямых u = const и v = const на плоскости uOv (рис.1.13).

Далее будем предполагать, что функции (1.5) не только непрерывны, но и имеют непрерывные частные производные первого порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Определитель второго порядка следующего вида

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad (1.6)$$

называют якобианом перехода от декартовых координат к криволинейным и обозначают $J(u,v)$.

Тогда формула перехода от декартовых координат к криволинейным координатам имеет следующий вид:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D')} f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)\left|J(u,v)\right|dudv, \qquad (1.7)$$

$\left|J(u,v)\right| \neq 0$, за исключением конечного числа точек.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На практике декартовые координаты точки и ее криволинейные координаты рассматривают не на разных координатных плоскостях, а на одной совмещенной.

Простейшим и важнейшим примером криволинейных координат являются *полярные координаты* ρ,φ. Они имеют наглядное геометрическое истолкование, как полярный радиус-вектор и полярный угол, но могут быть введены и формально, с помощью соотношений:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}, (\rho \geq 0). \qquad (1.8)$$

Если значения ρ и φ откладывать по двум взаимно перпендикулярным осям, считая, скажем, ρ - абсциссой, а φ - ординатой (при правой ориентации осей), то каждой точке полуплоскости $\rho \geq 0$ по указанным формулам отвечает одна определенная точка на плоскости xOy.

Прямым $\rho = const$ отвечают круги радиуса ρ с центром в начале (полюсе), а прямым $\varphi = const$ отвечают лучи, исходящие из начала (полюса) под углом φ к оси Ox (рис. 1.14).

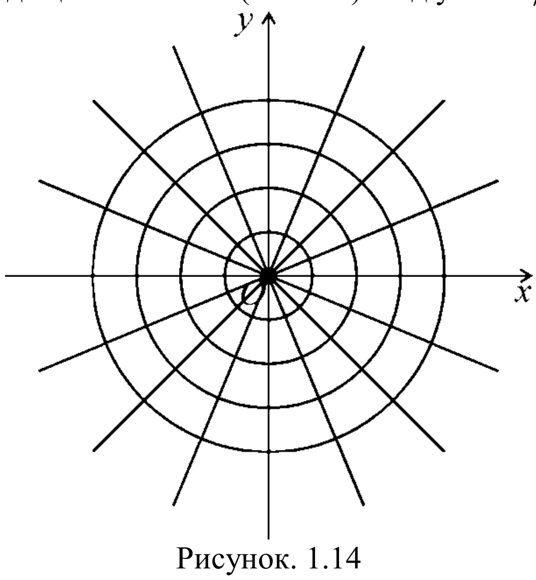


Рисунок. 1.14

Однако в данном случае формулы преобразования не будут однозначно разрешимы: изменения величины угла φ *на* $2\pi k$ (где k – целое) не отразится на значениях x и y. Для того чтобы получить все точки плоскости xOy, достаточно ограничиться значениями $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Каждой точке (x,y), отличной от начала, отвечает одно значение $\rho > 0$ и одно значение φ *в* указанных пределах. Но неустранимое нарушение однозначности соответствия связано с началом координат: точке $x = y = 0$ отвечает на плоскости $\rho O\varphi$ вся ось φ (или, если угодно, отрезок ее от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$).

Формулы (1.8) называют формулами связи между декартовыми и полярными координатами.

Используя формулу (1.6), вычисляем якобиан перехода от декартовых координат к полярным:

$$J(\varphi,\rho)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial\rho}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\rho}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\rho\sin\varphi & \cos\varphi\\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi\end{vmatrix}=-\rho\,.$$

Тогда, используя формулу (1.7), формула перехода от декартовых координат к полярным принимает следующий вид:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{(D')} f\left(\rho cos\varphi,\rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi d\rho\,. \qquad (1.9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Область (D) называется правильной в направлении полярной оси ρ, если луч, проходящий через внутренние точки области (D), пересекает границу области в двух точках (рис.1.15).

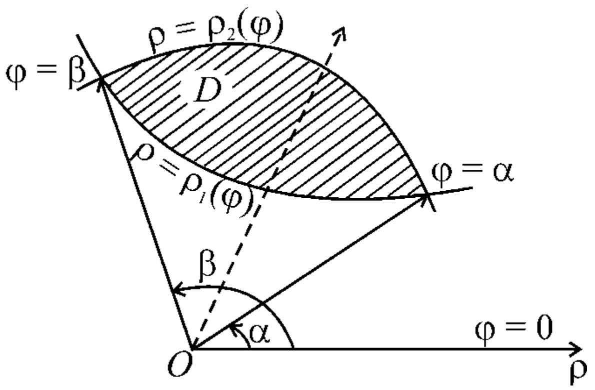


Рисунок. 1.15

Следующая теорема позволяет вычислять двойной интеграл в полярных координатах (см. замечание 3).

ТЕОРЕМА 5. Если функция $f\left(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi\right)$ непрерывна в области (D), область (D) - правильная в направлении полярной оси ρ (рис. 1.15), то

$$\iint\limits_{(D)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho\,.$$

Тогда по формуле (1.9) получаем:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$$

Вычисление площадей плоских фигур

ПРИМЕР 1. Вычислить площадь фигуры, лежащей в первом квадранте, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$, параболой $y^2 = 2ax$ и прямой $x = 2a$.

Решение

Прежде всего, необходимо данную фигуру изобразить на рисунке (рис.1.22).

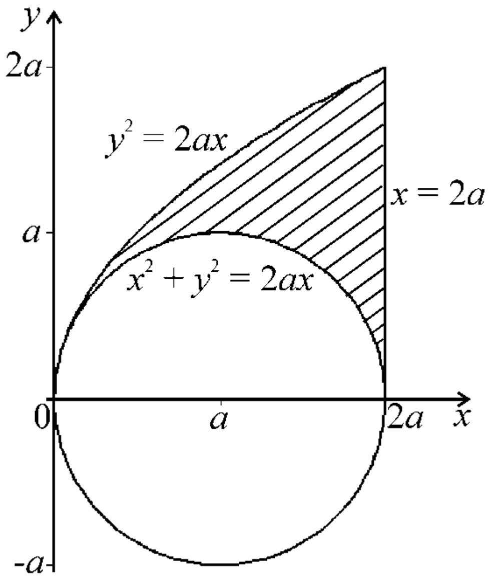


Рисунок. 1.22

Для вычисления площади воспользуемся формулой: $S = \iint\limits_{(D)} dxdy$.

Из рисунка видно, что внешние пределы интегрирования удобнее выбрать по *x*, так как в противном случае фигуру пришлось бы разбивать на три части и соответственно вычислять три интеграла.

Постоянными пределами будут 0 и 2*a*. Снизу фигура ограничена верхней полуокружностью, уравнение которой $y = \sqrt{2ax - x^2}$. Следовательно, $\sqrt{2ax - x^2}$ - нижний предел интегрирования. Сверху фигура ограничена верхней ветвью параболы, уравнение которой $y = \sqrt{2ax}$. Следовательно, $\sqrt{2ax}$ - верхний предел интегрирования. Таким образом, получим:

$$S = \iint\limits_{(D)} dxdy = \int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} dy = \int\limits_0^{2a} \left(\sqrt{2ax} - \sqrt{2ax - x^2} \right) dx = \frac{8a^2}{3} - \frac{\pi a^2}{2}$$

3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ К МЕХАНИКЕ

ПРИМЕР 1. Найти массу квадратной пластинки со стороной 2*a*, если плотность материала пластинки пропорциональна квадрату расстояния от точки пересечения диагоналей и на углах квадрата равна единице.

Решение

Пластинку естественно расположить в прямоугольной системе координат таким образом, чтобы точка пересечения диагоналей совпадала с началом координат, а стороны были параллельны координатным осям (рис. 1.31).

Масса плоской фигуры вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_{(D)} \rho(x, y) dxdy,$$

где $\rho(x, y)$ - плотности распределения массы по плоской фигуре.

Если плоская фигура однородная, то $\rho(x, y)$ есть величина постоянная.

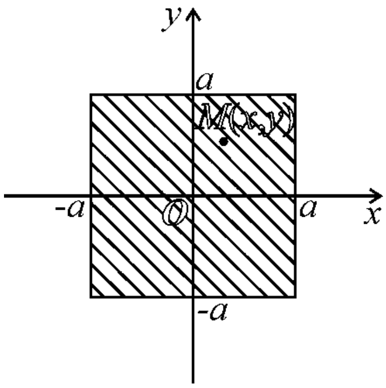


Рисунок. 1.31

После этого можно составить функцию плотности $\rho(x,y)$ материала пластинки по условиям задачи. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка квадрата $\left(|x|\le a, |y|\le a\right)$. Тогда квадрат расстояния от точки пересечения диагоналей (начало координат) будет равен x^2+y^2. Следовательно, плотность в точке М представится в виде $\rho(M)=\rho(x,y)=k(x^2+y^2)$, где k – коэффициент пропорциональности. Чтобы найти числовое значение этого коэффициента, используем известное значение плотности на углах квадрата. Возьмем, например, вершину угла (a, a). Тогда получим: $1 = k\,(a^2 + a^2)$, откуда $k=\dfrac{1}{2a^2}$.

Подставляя найденное значение k в выражение функции плотности, окончательно получим: $\rho(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2a^2}$. Теперь остается только вычислить двойной интеграл $m=\dfrac{1}{2a^2}\iint\limits_{(D)}\left(x^2+y^2\right)dxdy$.

Учитывая, что подынтегральная функция четная относительно x и y (т.е. плотность симметрична относительно начала координат), можем ограничиться вычислением интеграла только по одной четвертой части области (D), расположенной в первой четверти

$$m=\frac{2}{a^2}\int_0^a dx\int_0^a\left(x^2+y^2\right)dy=\frac{2}{a^2}\int_0^a\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^a dx=$$

$$=\frac{2}{a^2}\int_0^a\left(ax^2+\frac{a^3}{3}\right)dx=\frac{2}{a^2}\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{a^3x}{3}\right]_0^a=\frac{2}{a^2}\cdot\frac{2a^4}{3}=\frac{4}{3}a^2.$$

Тройные интегралы

Задача о вычислении массы тела

Рассмотрим тело (V), плотность ρ которого известна, но переменна, т.е. в разных точках различна, и предположим, что нам требуется подсчитать массу m этого тела. Для этого разобьем тело (V) произвольным образом на элементарные тела $(\Delta V_1),(\Delta V_2),\dots,(\Delta V_n)$ соответственно с объемами $\Delta V_1,\Delta V_2,\dots,\Delta V_n$ и выберем в каждом из них по точке $M_k\left(\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)$ $\left(k=1,2,\dots,n\right)$. Примем приближенно, что в пределах элементарного тела (ΔV_k) плотность постоянна и равна плотности $\rho\left(\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)$ в выбранной точке. Тогда масса m_k каждого элементарного тела приближенно выразится следующим образом:

$$m_k \approx \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k,$$

масса же всего тела будет

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k .$$

В пределе, при стремлении к нулю наибольшего из диаметров d всех областей (ΔV_k), это равенство делается точным, так что

$$m = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k, \qquad (2.1)$$

и задача решена.

Предел этого вида и есть *тройной интеграл от функции* $\rho\left(x,y,z\right)$ *по области* (V). В принятых нами для них обозначениях полученный выше результат запишется так:

$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho\left(x,y,z\right)dV .$$

2.2. Определение тройного интеграла

Возьмем произвольную фигуру (V) в пространстве, представляющую собой *ограниченную* и *замкнутую* область. Условие существования объема для данной области в пространстве заключается в том, чтобы область (V) была ограничена одной или несколькими гладкими поверхностями. В этом случае область (V) называют кубируемой. В дальнейшем будем рассматривать только кубируемые области пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ограниченная замкнутая область пространства называется *телом*.

Пусть в некотором теле (V) задана функция $f\left(x,y,z\right)$. Разобьем это тело с помощью сети поверхностей на конечное число элементарных тел $(\Delta V_1),(\Delta V_2),\ldots,(\Delta V_n)$ соответственно с объемами $\Delta V_1,\Delta V_2,\ldots,\Delta V_n$. Выберем в каждом из них произвольным образом по точке $M_k\left(\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)$ $\left(k=1,2,\ldots,n\right)$. Значение функции в этой точке $f\left(\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)$ умножим на объем ΔV_k и составим *интегральную сумму для функции* $f\left(x,y,z\right)$ *по телу* (V)

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k . \qquad (2.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Конечный предел I интегральной суммы (2.2) при стремлении к нулю наибольшего из диаметров d всех элементарных тел (ΔV_k) называется *тройным интегралом функции* $f\left(x,y,z\right)$ *в области* (V), если он не зависит ни от способа разбиения тела (V) на элементарные тела, ни от выбора точек M_k в каждом из них:

$$I = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k .$$

Он обозначается символом $I=\iiint\limits_{(V)} f\left(x,y,z\right)dV=\iiint\limits_{(V)} f\left(x,y,z\right)dxdydz$.

ТЕОРЕМА 1. (*необходимое условие существования тройного интеграла*). Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема в ограниченной замкнутой области пространства (V), то она ограничена в этой области.

ТЕОРЕМА 2. (*достаточное условие существования тройного интеграла*). Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области пространства (V), то она интегрируема в ней.

Из пункта 2.1. следует *физический смысл тройного интеграла*. Если функция $f(x,y,z)$ есть плотность распределения массы по телу (V), то тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ в области (V) равен массе этого тела: $m=\iiint\limits_{(V)} f\left(x,y,z\right)dxdydz$.

Свойства тройного интеграла

1. $V=\iiint\limits_{(V)} dxdydz$.

2. Если умножить интегрируемую функцию в области (V) $f(x,y,z)$ на постоянную k, то полученная функция также будет интегрируема, и при этом

$$\iiint\limits_{(V)} k f\left(x,y,z\right)dxdydz=k\iiint\limits_{(V)} f\left(x,y,z\right)dxdydz.$$

3. Если в области (V) интегрируемы функции $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$, то интегрируема и функция $f(x,y,z)\pm g(x,y,z)$, причем

$$\iiint\limits_{(V)}\left[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)\right]dxdydz=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz\pm\iiint\limits_{(V)} g(x,y,z)dxdydz.$$

4. Если в области (V) задана функция $f(x,y,z)$ и область $(V)=(V')+(V'')$, то из интегрируемости функции $f(x,y,z)$ во всей области (V) следует ее интегрируемость в областях (V') и (V''), и обратно – из интегрируемости функции в обеих областях (V') и (V'') вытекает интегрируемость в области (V). При этом

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{(V')} f(x,y,z)dxdydz+\iiint\limits_{(V'')} f(x,y,z)dxdydz.$$

5. Если для интегрируемых в области (V) функций $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ выполняется неравенство $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$, то $\iiint\limits_{(V)} f\left(x,y,z\right)dxdydz\le\iiint\limits_{(V)} g\left(x,y,z\right)dxdydz$.

6. В случае интегрируемости функции $f(x,y,z)$ интегрируема и функция $\left|f(x,y,z)\right|$, и имеет место неравенство $\left|\iiint\limits_{(V)} f\left(x,y,z\right)dxdydz\right|\le\iiint\limits_{(V)}\left|f\left(x,y,z\right)\right|dxdydz$.

7. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области (V), то найдется такая точка $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ в области (V), что $\iiint\limits_{(V)} f\left(x,y,z\right)dxdydz=f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\cdot V$, где V – объем области (V).

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Тело (V) называется правильным в направлении оси *Oz*, если выполняются два условия:

1) Любая прямая, проходящая через внутренние точки тела (V) параллельно оси *Oz*, пересекает границу тела в двух точках;
2) Область (D), являющаяся проекцией тела (V) на плоскость xOy, является правильной в направлении хотя бы одной из осей координат.

Пусть тело (V) представляет собой «цилиндрический брус», ограниченный снизу и сверху, соответственно, поверхностями $z = z_0(x, y)$ и $z = Z(x, y)$, проектирующимися на плоскость xOy в некоторую область (D), ограниченную кривой (K); с боков тело (V) ограничено цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси *Oz*, и с кривой (K) в роли направляющей (рис.2.1).

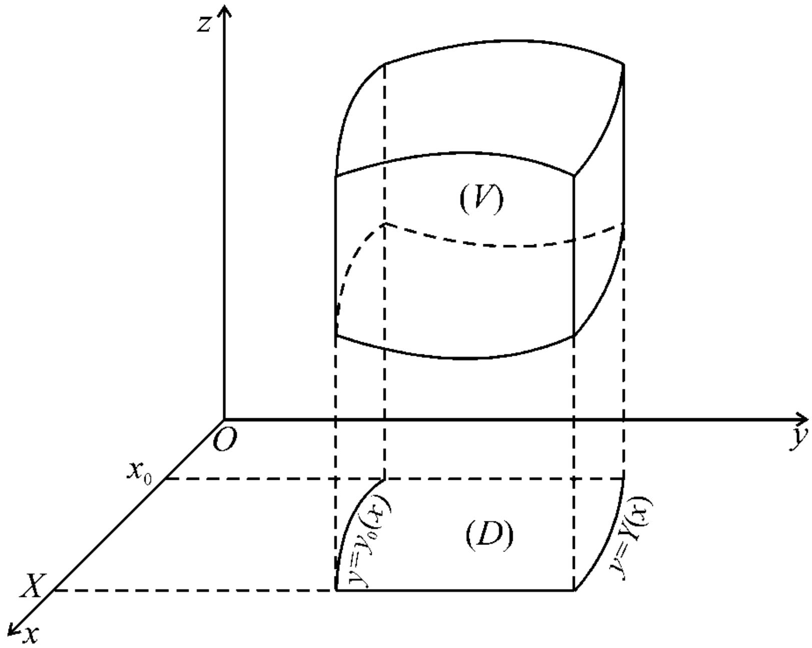


Рисунок. 2.1

ТЕОРЕМА 3. Если дано тело (V), правильное в направлении оси *Oz*; функция трех переменных $f(x, y, z)$ непрерывна в области (V), то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x, y, z)dz .$$

Если область (D) представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную двумя кривыми (рис.2.2) $y = y_0(x)$ и $y = Y(x)$ $(x_0 \le x \le X)$ и прямыми $x = x_0, x = X$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} dy \int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x, y, z)dz .$$

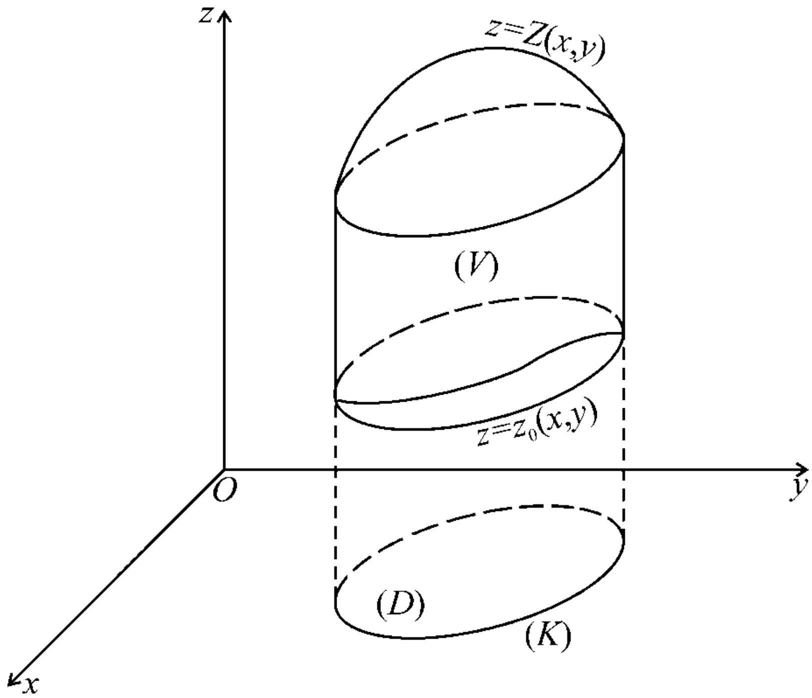


Рисунок. 2.2

Пример 1. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, где область (V) ограничена поверхностями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение

Уравнение $x+y+z=1$ представляет собой плоскость, отсекающую на осях отрезки, равные 1; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ - координатные плоскости. Область (V) есть пирамида (рис. 2.3).

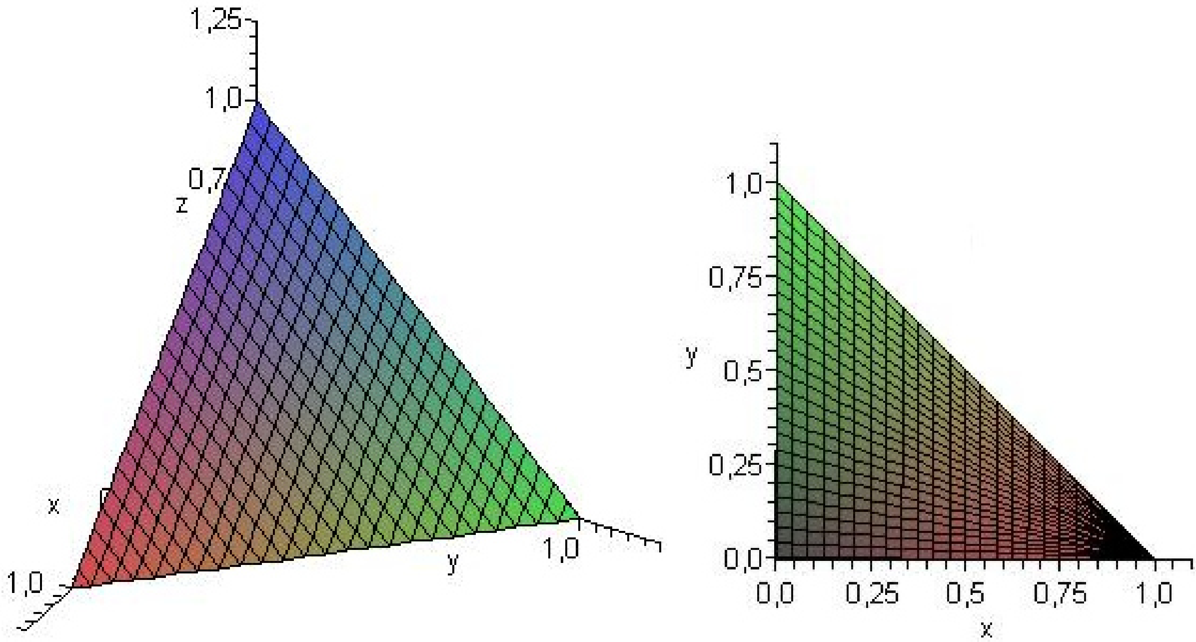


Рисунок. 2.3

Из чертежа сразу видно, что по любой из переменных можно с одинаковым успехом брать постоянные пределы, и они равны 0 и 1. Возьмем, например, постоянные пределы по x $(0 \le x \le 1)$. Проекцией пирамиды на плоскость xOy является треугольник, ограниченный прямыми

$x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$. Отсюда определяем пределы интегрирования по y $(0 \le y \le 1 - x)$. Для переменной z нижним пределом интегрирования будет, очевидно, $z = 0$ (плоскость xOy), а верхним – значение z, полученное из уравнения плоскости $x + y + z = 1$, т.е. $z = 1 - x - y$. Определив пределы интегрирования по каждой из переменных, можем представить данный тройной интеграл через повторный и выполнить вычисления, последовательно вычисляя соответствующие определенные интегралы. Получим:

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\right]_0^{1-x-y} dy = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right) dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[\frac{y}{4} + \frac{1}{1+x+y}\right]_0^{1-x} dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}x - \frac{x^2}{8} - \ln(1+x)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \ln 2\right) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}.$$

5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Идеи, развитые в пункте 1.5.2. в связи с преобразованием плоских областей, естественно переносятся и на случай пространственных областей.

Предположим, что даны два трехмерных пространства с системами координат *xyz*, и *uvw*. Рассмотрим в этих пространствах две замкнутые области: область (*V*) в пространстве *xyz* и область (V') в пространстве *uvw*, ограниченные соответственно поверхностями (σ) и (σ'), которые мы всегда будем предполагать кусочно-гладкими. Допустим, что эти области связаны между собой *взаимно однозначным* непрерывным соответствием, которое осуществляется формулами:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = h(u,v,w) \end{cases}, \qquad (2.3)$$

При этом необходимо, чтобы точкам поверхности (σ) отвечали именно точки поверхности (σ') и наоборот.

Пусть функции (2.3) имеют в области (V') непрерывные частные производные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Определитель третьего порядка следующего вида

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \qquad (2.4)$$

называют якобианом перехода от декартовых координат к криволинейным и обозначают $J(u,v,w)$

.

Числа u, v, w, однозначно характеризующие положение точки в пространстве *xyz*, называются *криволинейными координатами* этой точки. Точки пространства *xyz*, для которых одна из этих координат сохраняет постоянное значение, образуют *координатную поверхность*. Всегда будет существовать три семейства таких координатных поверхностей; через каждую точку области (*V*) проходит по одной поверхности каждого семейства.

Тогда формула перехода от декартовых координат к криволинейным координатам будет иметь следующий вид:

$$\iiint\limits_{(V)} f\left(x, y, z\right)dxdydz = \iiint\limits_{(V')} f\left(\varphi\left(u, v, w\right), \psi\left(u, v, w\right), h\left(u, v, w\right)\right)\left|J\left(u, v, w\right)\right|dudvdw. \quad (2.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На практике рассматривают не два координатных пространствах, а одно совмещенное.

а) *Цилиндрические координаты* представляют соединение полярных координат в плоскости xOy с обычной декартовой аппликатой *z* (рис. 2.8).

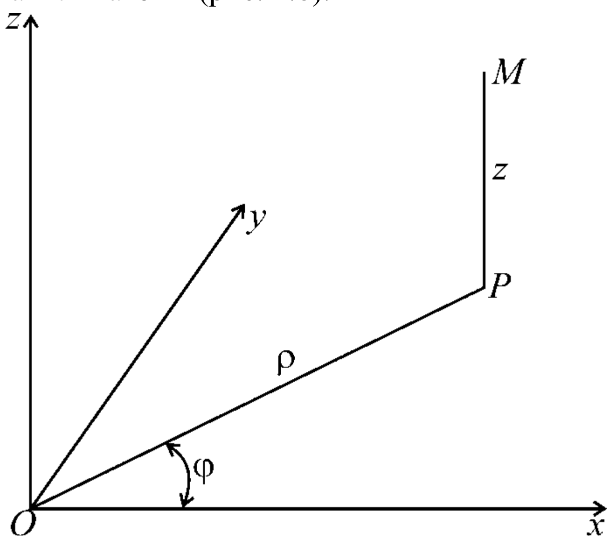


Рисунок. 2.8

Формулы, связывающие их с декартовыми координатами, имеют вид

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z.$$

Эти формулы отображают область $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$ на все пространство *xyz*. Отметим, однако, что прямая $\rho = 0, z = z$ отображается в одну точку (0,0,*z*); этим нарушается взаимная однозначность соответствия. Координатные поверхности в рассматриваемом случае будут:

а) $\rho = const$ - цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси Oz; направляющими для них служат окружности на плоскости xOy с центром в начале;

б) $\varphi = const$ - плоскости, проходящие через ось Oz;

в) $z = const$ - плоскости, параллельные плоскости xOy.

По формуле (2.4) получаем якобиан преобразования:

$$J(\varphi,\rho,z)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & 0\\ \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho\begin{vmatrix}-\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\varphi & \sin\varphi\end{vmatrix}=-\rho, \qquad (2.6)$$

а формула перехода (2.5) принимает вид

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{(V')} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\varphi d\rho dz. \qquad (2.7)$$

б) *Сферические координаты* связаны с декартовыми формулами:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ x=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta, \qquad (2.8)$$

где $r\ge 0, 0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi<2\pi$.

Геометрический смысл величин φ,θ,r ясен из рисунка 2.9: r есть радиус-вектор *OM*, соединяющий начало с данной точкой *M*; θ - угол, составляемый этим радиус-вектором с осью *Oz*; φ - угол, составляемый с осью *Ox* проекцией $OP=r\sin\theta$ радиус-вектора *OM* на плоскость *xOy*.

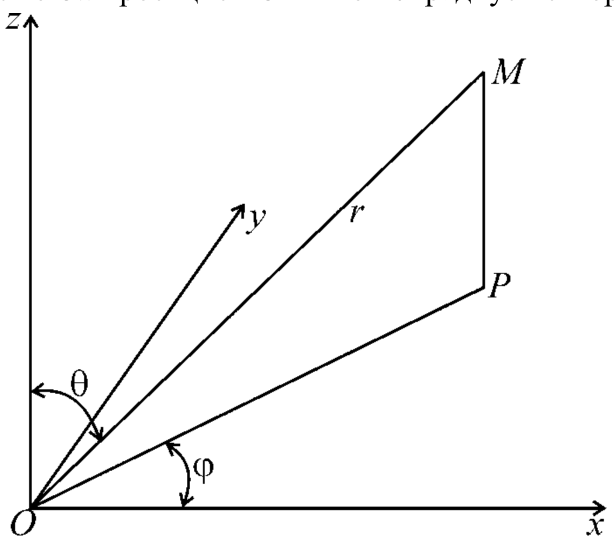


Рисунок. 2.9

Координатные поверхности составляют три семейства:

а) $r=const$ - концентрические сферы с центром в начале координат;

б) $\theta=const$ - круговые конусы, осью которых служит ось *Oz*;

в) $\varphi=const$ - плоскости, проходящие через ось *Oz*.

По формуле (2.4) получаем якобиан преобразования:

$$J(\varphi,\theta,r)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial x}{\partial r}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial r}\\ \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta} & \dfrac{\partial z}{\partial r}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi\\ r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi\\ 0 & -r\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=-r^2\sin\theta ,(2.9)$$

а формула перехода (2.5) принимает вид

$$\iiint\limits_{(V)} f\left(x,y,z\right)dxdydz = \iiint\limits_{(V')} f\left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, rcos\theta\right)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr. \qquad (2.10)$$

2.5. Приложения тройных интегралов

1. Вычисление объема

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz.$$

2. Масса тела

$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho\left(x,y,z\right)dxdydz,$$

где $\rho(x,y,z)$ – плотность распределения масс в произвольной точке тела (V).

3. Статические моменты

$$M_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z\rho\left(x,y,z\right)dxdydz,$$

$$M_{zx} = \iiint\limits_{(V)} y\rho\left(x,y,z\right)dxdydz,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x\rho\left(x,y,z\right)dxdydz,$$

$$M_{z} = \iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2}\,\rho\left(x,y,z\right)dxdydz.$$

4. Моменты инерции тела относительно осей координат

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} \left(y^2+z^2\right)\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz,$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} \left(x^2+z^2\right)\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} \left(x^2+y^2\right)\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz.$$

5. Координаты центра тяжести тела

$$X_c = \frac{\iiint\limits_{(V)} x\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz}{\iiint\limits_{(V)} \rho\left(x,y,z\right)dxdydz},$$

$$Y_c = \frac{\iiint\limits_{(V)} y\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz}{\iiint\limits_{(V)} \rho\left(x,y,z\right)dxdydz},$$

$$Z_c = \frac{\iiint\limits_{(V)} z\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz}{\iiint\limits_{(V)} \rho\left(x,y,z\right)dxdydz}.$$

Тема 9. Дифференциальные уравнения. Лекции 19-25.

Основные понятия.
Обыкновенным дифференциальным уравнением 1 порядка называется уравнение вида $F(x,y,y')=0,$
где x – независимая переменная, $y=y(x)$ – искомая функция, F – заданная непрерывная функция трех переменных, обязательно зависящая от y'.
Если уравнение можно разрешить относительно y', оно принимает вид
$y'=f(x,y)$
и называется *уравнением, разрешенным относительно производной*. В некоторых случаях уравнение удобно записать в виде
$dy=f(x,y)dx$
или в симметричном виде (дифференциальной форме):
$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$.

Дифференциальные уравнения, как правило, имеют бесконечное множество решений. Поэтому на практике часто требуется найти решение, удовлетворяющее дополнительным условиям.

Рассматривается **задача Коши**:
Найти решение дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$, *определенное в некоторой окрестности точки* x_0 *и удовлетворяющее начальному условию* $y(x_0)=y_0$.

С геометрической точки зрения решить задачу Коши – значит найти ту интегральную кривую, которая проходит через заданную точку (x_0,y_0).

Общим решением ДУ 1 порядка называется функция $y=\varphi(x,C)$ (где C – произвольная постоянная), удовлетворяющая двум условиям:
1. При любом C *функция* $\varphi(x,C)$ *является решением уравнения:*
2. Для любого начального условия найдется значение $C=C_0$, *при котором функция удовлетворяет начальному условию.*

Частным решением называется решение, полученное из общего подстановкой конкретного значения C.
Таким образом, задача Коши состоит в нахождении частного решения, удовлетворяющего начальному условию.
Приведем без доказательства теорему Коши (о существовании и единственности решения задачи Коши).

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную* $f_y'(x,y)$, *то какова бы не была точка* (x_0, y_0) *в области D, существует единственное решение* $y=\varphi(x)$ *уравнения* $y'=f(x,y)$, *определенное в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *принимающее при* $x = x_0$ *значение* $\varphi(x_0) = y_0$.

При невыполнении условий теоремы Коши для решений может нарушаться условие единственности (через одну точку проходит более одной интегральной кривой). Такие решения называются *особыми*.

Уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения вида $f(x)dx = g(y)dy$ называются уравнениями с *разделёнными переменными*. Функции $f(x)$ и $g(y)$ будем считать непрерывными. Общее решение этого уравнения может быть получено интегрированием $\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$, где C – произвольная постоянная.

Вполне возможно, что в некоторых задачах неопределенные интегралы $\int f(x)dx$ или $\int g(y)dy$ нельзя выразить в элементарных функциях, тем не менее, мы и в этом случае будем считать задачу интегрирования дифференциального уравнения выполненной в том смысле, что свели ее к более простой и уже изученной в курсе интегрального исчисления задаче вычисления неопределенных интегралов – квадратур.

Если надо выделить частное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, то оно, очевидно, определяется из уравнения $\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx = \int\limits_{y_0}^{y} g(y)dy$

Пример 1.1.1. $xdx + ydy = 0$ Переменные разделены, так как коэффициент при dx является функцией только *x*, а коэффициент при dy является функцией только от *y*. Интегрируя, получим $\int xdx = -\int ydy + c$, или $x^2 + y^2 = C_1$ - семейство окружностей с центром в начале координат.

Пример 1.1.2. $e^{x^2}dx = \frac{dy}{\ln y}$. Интегрируя, получаем $\int e^{x^2}dx = \int \frac{dy}{\ln y} + C$. Интегралы $\int e^{x^2}dx$ и $\int \frac{dy}{\ln y}$ не берутся в элементарных функциях, тем не менее, исходное уравнение считается проинтегрированным, так как задача доведена до квадратур.

Уравнения вида $f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(y)dy$, в которых коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от *x* и только от *y*, называются дифференциальными *уравнениями с разделяющимися переменными*, так как путём деления на $f_2(x)g_1(y)$ они приводятся к уравнению с разделёнными переменными $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy$.

Заметим, что деление на $f_2(x)g_1(y)$ может привести к потере частных решений, обращающих в нуль произведение $f_2(x)g_1(y)$.

Пример 1.1.3. Найти общее решение уравнения $4(xy^2 - x)dx + \sqrt{5 + x^2}dy = 0$

Решение. $4x(y^2 - 1)dx = -\sqrt{5 + x^2}dy$, $2\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2 + 5}} = -\int \frac{dy}{y^2 - 1}$,

$$2\int \left(x^2+5\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(x^2+5\right) = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C,$$

$$8\sqrt{x^2+5} = \ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| + C_1.$$

К полученному общему решению следует добавить потерянные (особые) решения $y=1$ и $y=-1$.

Однородные дифференциальные уравнения и уравнения приводящиеся к ним.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется *однородным*, если оно приводится к виду $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$. Это уравнение введением новой переменной $z = \frac{y}{x}$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными. А именно $y = zx$, $y' = z'x + z$, $\frac{dz}{dx}x + z = g(z)$, $\frac{dz}{z+g(z)} = \frac{dx}{x}$

Иногда бывает уместной замена $z = \frac{x}{y}$.

Пример 1.2.1. Найти общий интеграл уравнения: $y' = \frac{2y^3 + 3x^2 y}{xy^2 + 2x^3}$

Поделив на x^3 числитель и знаменатель дроби, получим однородное уравнение: $y' = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 3\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2}$, положим $z = \frac{y}{x}$. Тогда исходное уравнение сведётся к уравнению: $z'x + z = \frac{2z^3 + 3z}{z^2 + 2}$ с разделяющимися переменными. Откуда: $\frac{dz}{dx}x = \frac{z^3 + z}{z^2 + 2}$ или $\frac{z^2+2}{z(z^2+2)}dz = \frac{dx}{x}$ получаем уравнение с разделенными переменными, при условии $z \neq 0$. Но $z = 0$ при $y = 0$ - а это есть решение исходного уравнения (убеждаемся проверкой).

Для интегрирования левой части разложим дробь на простейшие:
$\frac{z^2+2}{z(z^2+1)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{z^2+1} = \ldots = \frac{2}{z} - \frac{z}{z^2+1}$, (здесь коэффициенты A, B, C определяются методом неопределённых коэффициентов).

После интегрирования $\int\left(\frac{2}{z} - \frac{z}{z^2+1}\right)dz = \int\frac{dx}{x} + C$, получим

$$2\ln|z| - \frac{1}{2}\ln\left|1+z^2\right| = \ln|x| + \ln|C_1|\ ,\quad \frac{z^2}{x\sqrt{1+z^2}} = C_1$$

или, полагая, что $z = \frac{y}{x}$, имеем $\frac{y^2}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} = C$. В этот общий интеграл входит и найденное ранее особое решение $y=0$ при $C=0$.

Уравнение вида $y' = g\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$, где $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in R$, сводится к однородному по одному из трёх вариантов:

1) $c = c_1 = 0$, тогда $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right) = g\left(\frac{a+b\frac{y}{x}}{a_1+b_1\frac{y}{x}}\right) = f(z)$, где $z = \frac{y}{x}$;

2) $c \neq 0$ или $c_1 \neq 0$ и $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) = \begin{bmatrix} a = \lambda a_1 \\ b = \lambda b_1 \end{bmatrix} = g\left(\frac{\lambda a_1x+\lambda b_1y+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) = g\left(\frac{\lambda(a_1x+b_1y)+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$$

Введём обозначения $\left[a_1x+b_1y=u,\quad y=\frac{u-a_1x}{b_1},\quad y'=\frac{1}{b_1}\frac{du}{dx}-\frac{a_1}{b_1}\right]$,

и уравнение перепишется в виде: $\frac{1}{b_1}\frac{du}{dx} - \frac{a_1}{b_1} = g\left(\frac{\lambda u+c}{u+c_1}\right) \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = f(u)$ - то есть это однородное уравнение;

3) $c \neq 0$ или $c_1 \neq 0$ и $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$, тогда система $\begin{cases} ax+by+c=0, \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ имеет единственное решение $\begin{cases} x=h \\ y=k \end{cases}$.

Введём новые переменные $\begin{cases} x_1 = x-h \\ y_1 = y-k \end{cases}$, получим $\frac{dy_1}{dx_1} = g\left(\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}\right)$ - то есть свели к варианту 1)

Пример 1.2.2. Найти общий интеграл уравнения $y' = \frac{2y-2}{2x+y-3}$

Здесь $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$ поэтому решаем систему $\begin{cases} 2y-2=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Вводим новые переменные $x_1 = x-1,\quad y_1 = y-1$, в которых исходное уравнение имеет вид $y_1' = \dfrac{2y_1}{2x_1 + y_1}$. Разделив числитель и знаменатель дроби на x_1, получим однородное уравнение

$y_1' = \dfrac{2\dfrac{y_1}{x_1}}{2+\dfrac{y_1}{x_1}}$. Вводим переменную $z = \dfrac{y_1}{x_1}$

и получаем уравнение с разделяющимися переменными $z'x_1 + z = \dfrac{2z}{2+z}$, $x_1\dfrac{dz}{dx_1} = -\dfrac{z^2}{z+2}$. Разделяя переменные $\dfrac{2+z}{z^2}dz = -\dfrac{dx_1}{x_1}$, учитываем, что $z=0$ есть решение.

Интегрируя $-\dfrac{2}{z} + \ln|z| = -\ln|x_1| + \ln|C|$, получаем $\dfrac{2}{z} = \ln\left|\dfrac{zx_1}{C}\right|$ или $zx_1 = Ce^{\frac{2}{z}}$. Заметим, что здесь $C \neq 0$, но, допуская и $C=0$, включаем в конечную формулу потерянное решение $z=0$. Переходя от z к x_1 и y_1, получим $y_1 = Ce^{\frac{2x_1}{y_1}}$. Подставим $x_1 = x-1,\quad y_1 = y-1$ и найдём искомый общий интеграл: $(y-1)e^{-2\frac{x-1}{y-1}} = C$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида: $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ - непрерывные функции от переменной x.

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*. Заметим, что линейное однородное $y' + p(x)y = 0$ является с разделяющимися переменными $\dfrac{dy}{dx} = -p(x)y$, $\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$.

Будем искать решение линейного неоднородного уравнения в виде $y = U\cdot V$, где $U = U(x)$ и $V = V(x)$ некоторые (пока неизвестные) функции от x. Тогда $y' = U'V + UV'$. С учётом сделанных подстановок уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ перепишется в виде $U'V + UV' + p(x)UV = q(x)$ или $[U' + p(x)U]V + UV' = q(x)$.
Возьмём в качестве $U(x)$ некоторое ненулевое частное решение линейного однородного уравнения $U' + p(x)U = 0$, тогда для отыскания $V(x)$ получаем уравнение с разделяющимися переменными $UV' = q(x)$, $\dfrac{dV}{dx} = \dfrac{q(x)}{U(x)}$.

Пример 1.3.1. Найти решение задачи Коши: $y' - y \cdot ctgx = \cos x$ при $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.

Полагая $y = UV$, приходим к уравнению $U'V + UV' - UVctgx = \cos x$, $[U' - Uctgx]V + UV' = \cos x$ $\langle * \rangle$. Решаем уравнение $U' - Uctgx = 0$:

$\dfrac{dU}{dx} = Uctgx$, $\dfrac{dU}{U} = ctgxdx$, $\ln|U| = \ln|\sin x|$, $U = \sin x$ (так как достаточно найти частное решение, то полагаем $C = 0$). Подставляя найденную функцию U в уравнение $\langle * \rangle$, получаем $\sin xV' = \cos x$, $\dfrac{dV}{dx} = tgx$, $\int dV = \int ctgxdx$, $V = \ln|\sin x| + C$.

Общее решение: $y = UV = \sin x(\ln|\sin x| + C)$.

Для нахождения решения задачи Коши с заданным начальным условием $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$ подставим в найденное общее решение $x = \dfrac{\pi}{2}$ и $y = 2$: $2 = 1 \cdot (\ln 1 + C)$, откуда C = 2. Итак, искомое решение задачи Коши $y = \sin x(\ln|\sin x| + 2)$.

Замечание. Некоторые уравнения, не являющиеся линейными относительно y' и y, становятся линейными относительно x' и x, если рассматривать x как функцию от y, то есть приводятся к виду $x' + p(y)x = q(y)$. Решение таких уравнений можно искать в виде $x = UV$, где $U = U(y)$ и $V = V(y)$ некоторые функции от y.

Пример 1.3.2. Решить задачу Коши: $(x + \ln^2 y - \ln y)y' = \dfrac{y}{2}$, при $y(3) = 1$

Перепишем уравнение в виде: $x + \ln^2 y - \ln y = \dfrac{y}{2}\dfrac{dx}{dy}$ или $x' - \dfrac{2}{y}x = 2\dfrac{\ln^2 y - \ln y}{y}$ - это уравнение линейно относительно x' и x.

Положим $x = UV$, тогда

$$U'V + UV' - \frac{2}{y}UV = 2\frac{\ln^2 y - \ln y}{y},$$

$$\left[U' - \frac{2}{y}U\right]V + UV' = 2\frac{\ln^2 y - \ln y}{y}.$$

Решаем отдельно уравнение $U' - \dfrac{2}{y}U = 0$:

$$\frac{dU}{dy} = \frac{2U}{y}, \quad \int\frac{dU}{U} = 2\int\frac{dy}{y}, \quad \ln U = 2\ln y, \ U = y^2.$$

Получаем $y^2V' = 2\dfrac{\ln^2 y - \ln y}{y}$

и решаем $\dfrac{dV}{dy}=\dfrac{2\ln^2 y-2\ln y}{y^3}$, $\int dV=\int d\left(-\dfrac{\ln^2 y}{y^2}\right)$, $V=-\dfrac{\ln^2 y}{y^2}+C$.

Тогда $x=y^2\left(-\dfrac{\ln^2 y}{y^2}+C\right)=Cy^2-\ln^2 y$.

Используя начальное условие $3=C\cdot 1^2-\ln^2 1$, найдём $C=3$, то есть решение задачи Коши: $x=3y^2-\ln^2 y$

Уравнение Бернулли.

Уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$*, где* $\alpha\in R$ *и* $\alpha\neq 1,2$ *называется уравнением Бернулли. Решение уравнения Бернулли можно искать так же, как решение линейного дифференциального уравнения, то есть в виде* $y=UV$*.*

Пример 1.4.1. Решить уравнение $x^2y^2y'+xy^3=1$.

Разделим обе части уравнения на x^2y^2 ($y=0$, очевидно, решение): $y'+\dfrac{1}{x}y=x^{-2}y^{-2}$. Это уравнение Бернулли с $\alpha=-2$. Положим $y=UV$, получим $U'V+UV'+\dfrac{1}{x}UV=\dfrac{1}{x^2U^2V^2}$,

$$\left[U'+\frac{1}{x}U\right]V+UV'=\frac{1}{x^2U^2V^2}$$

как и выше сначала находим $U(x)$ из условия $U'+\dfrac{1}{x}U=0$,

$$\frac{dU}{dx}=-\frac{U}{x},\ \int\frac{dU}{U}=-\int\frac{dx}{x},\ \ln|U|=-\ln|x|,\ U=\frac{1}{x},$$

затем находим $V(x)$, решив уравнение $\dfrac{1}{x}\dfrac{dV}{dx}=\dfrac{1}{V^2}$,

$$\int V^2dV=\int xdx,\ \frac{V^3}{3}=\frac{x^2}{2}+C,\ V=\sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2+C}.$$

Искомое общее решение $y=\dfrac{1}{x}\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}x^2+C}$.

Уравнения в полных дифференциалах.

Уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется уравнением *в полных дифференциалах*, если выполняется равенство $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. При выполнении этого равенства существует такая функция $U(x,y)$, что $dU=Pdx+Qdy$, и исходное уравнение примет вид $dU=0$, то есть $U(x,y)=C$. Значит, решение уравнения в полных дифференциалах сводится к отысканию функции $U(x,y)$, которая может быть найдена как решение системы $\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)$ и $\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)$. Покажем на примере способ нахождения этой функции.

Пример 1.5.1. Решить уравнение $(x+\ln y)dx+\left(1+\frac{x}{y}+\sin y\right)dy=0$

Здесь $P(x,y)=x+\ln y$, $Q(x,y)=1+\frac{x}{y}+\sin y$, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ - значит, имеем уравнение в полных дифференциалах.

Для нахождения функции $U(x,y)$ воспользуемся равенствами:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)=x+\ln y \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)=1+\frac{x}{y}+\sin y$$

Считая в первом равенстве постоянной y, а во втором x, находим интегрированием первого равенства по x, а второго по y функцию $U(x,y)$ с точностью до произвольных слагаемых, зависящих от y в первом случае и от x во втором:

$$U=\int(x+\ln y)dx=\frac{x^2}{2}+x\ln y+C_1(y)$$

$$U=\int\left(1+\frac{y}{x}+\sin y\right)dy=y+x\ln y-\cos y+C_2(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(y)=y-\cos y \\ C_2(x)=\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Поэтому $U(x,y)=\frac{x^2}{2}+x\ln y+y-\cos y$, а общий интеграл исходного уравнения имеет вид: $\frac{x^2}{2}+x\ln y+y-\cos y=C$

НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИХ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА.

Пусть уравнение n- ого порядка не содержит явно искомой функции $y(x)$ и её производных до порядка $k-1$ включительно: $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ \dots\ ,y^{(n)})=0$

Замена $y^{(k)}(x)=t(x)$ понижает порядок уравнения на k единиц.

Пример 2.1. Найти общее решение $y'''=2ctgx\, y''$.

Положим $y''=t$, тогда $y'''=t'$, сведём это уравнение к виду $t'=2ctgx\, t$. Полученное уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dt}{dx}=2ctgx\, t$, $\frac{dt}{t}=2ctgxdx$, $\ln t=2\ln|\sin x|+\ln C_1$, $t=C_1\sin^2 x$. Заменим t на y'': $y''=C_1\sin^2 x$,

$$y'=\int C_1\sin^2 xdx+C_2=C_1\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx+C_2=C_1\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)+C_2,$$

$$y=\int\left[C_1\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)+C_2\right]dx=C_1\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{8}\cos 2x\right)+C_2x+C_3\ .$$

Пусть уравнение не содержит явно независимой переменной x, но содержит явно y: $F(y,y',y'',\ \ldots\ ,y^{(n)})=0$. В этом случае удобно взять y за независимую переменную, сделав подстановку $y'=p(y)$, где $p(y)$ - некоторая функция от y. Тогда $\dfrac{dy}{dx}=p$,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$ и т.д.

Таким образом, мы понизим порядок уравнения на единицу.

Пример 2.2. Найти решение задачи Коши: $y^2y''=\left(y^2-1\right)y'$, $y(0)=1,\quad y'(0)=2$

Уравнение не содержит явно переменной x. Делаем замену $p=y'$, тогда $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ и уравнение принимает вид $y^2p\dfrac{dp}{dy}=\left(y^2-1\right)p$. Сокращая на p и разделяя переменные, получим $dp=\dfrac{y^2-1}{y^2}dy$, интегрируем: $p=y+\dfrac{1}{y}+C_1$ то есть $y'=y+\dfrac{1}{y}+C_1$. Целесообразно сразу найти C_1, используя начальные условия $y(0)=1,\quad y'(0)=2$: $2=1+1+C_1\ \Rightarrow C_1=0$.

Итак $y'=y+\dfrac{1}{y}$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+1}{y}$, $\displaystyle\int\frac{ydy}{y^2+1}=\int dx$,

$\dfrac{1}{2}\ln(1+y^2)=x+C_2$. Используя начальное условие $y(0)=1$, находим C_2: $\dfrac{1}{2}\ln 2=C_2$. Итак, искомое решение задачи Коши: $x=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y^2}{2}\right)$.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ \ldots\ +a_ny=f(x)\qquad(3.1)$$

где $a_1,a_2,\ldots,a_n$ - действительные числа, называется *линейным дифференциальным уравнением* (ЛДУ) с постоянными коэффициентами. Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (3.1) называется *однородным* (ОЛДУ), в противном случае – *неоднородным* (НЛДУ).

Нахождение общего решения ОЛДУ сводится к нахождению корней алгебраического уравнения

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\ldots+a_n=0,\ (3.2)$$

называемого *характеристическим* уравнением для ЛДУ (3.1).

Каждому действительному корню и каждой паре мнимых сопряжённых корней характеристического уравнения в общем решении ОЛДУ соответствует слагаемое, определяемое таблицей 3.1.

Таблица 3.1.

Вид корней характеристического уравнения	**Вид слагаемого в общем решении ОЛДУ**
λ - действительный корень кратности 1	$Ce^{\lambda x}$
λ - действительный корень кратности K	$(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{K-1} x^{K-1}) e^{\lambda x}$
$\alpha \pm \beta i$ - пара мнимых корней кратности 1	$e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$
$\alpha \pm \beta i$ - пара мнимых корней кратности K	$e^{\alpha x}\left[\left(A_0 + A_1 x + \ldots + A_{K-1} x^{K-1}\right)\cos\beta x + \right.$ $\left. + \left(B_0 + B_1 x + \ldots + B_{K-1} x^{K-1}\right)\sin\beta x\right]$

Здесь $C, C_0, C_1, \ldots, C_{K-1}, A, A_0, A_1, \ldots, A_{K-1}, B, B_0, B_1, \ldots, B_{K-1}$ - произвольные постоянные. Напомним что общее решение дифференциального уравнения n-ого порядка содержит n произвольных констант.

Пример 3.1. Найти решение ОЛДУ

а) $y''' - 6y'' + 9y = 0$ (3.3)

Записываем характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot (\lambda - 3)^2 = 0$. Его корни: $\lambda_1 = 0$ - кратности 1, $\lambda_2 = 3$- кратности 2. Первому корню в общем решении соответствует слагаемое $C_1 e^{\lambda_1 x}$, то есть C_1, второму - $(C_2 + C_3 x)e^{\lambda_2 x}$, то есть $(C_2 + C_3 x)e^{3x}$. Общее решение ОЛДУ: $y_{о.о.} = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{3x}$.

б) $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$ (3.4)

Характеристическое уравнение :

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$

Его корни: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$ - все кратности 1. Им соответствуют в общем решении ОЛДУ слагаемые: Ce^x и $e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$.

Итак $y_{о.о.} = C_1 e^x + e^{2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения (3.1) используем теорему о структуре общего решения НЛДУ: $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$, где $y_{о.н.}$ - общее решение НЛДУ, $y_{о.о.}$ - общее решение соответствующего ОЛДУ, $y_{ч.н.}$ - какое-нибудь частное решение НЛДУ. Нахождение $y_{о.о.}$ описано выше.

Для нахождения $y_{ч.н.}$ будем использовать метод подбора. Этот метод применим в случае, когда правая часть $f(x)$ уравнения (3.1) имеет специальный вид. В таблице 3.2. для некоторых случаев указано, в каком виде следует искать частное решение НЛДУ.

Таблица 3.2.

Вид правой части	Связь с корнями характеристического уравнения	Вид частного решения

$f(x)=P_m(x)e^{ax}$	a - не корень характ. уравнения	$y_{ч.н.}=\widetilde{P}_m(x)e^{ax}$
	a - корень характ. уравнения кратности K	$y_{ч.н.}=x^K\widetilde{P}_m(x)e^{ax}$
$f(x)=e^{\sigma x}\left[P_m(x)\cos\tau x+ +Q_s(x)\sin\tau x\right]$	$\sigma\pm\tau i$ - не корни характ. уравнения	$y_{ч.н.}=e^{ax}\left[\widetilde{P}_r(x)\cos\tau x+ +\widetilde{Q}_r(x)\sin\tau x\right]$
	$\sigma\pm\tau i$ - корни характ. уравнения кратности K	$y_{ч.н.}=x^Ke^{ax}\left[\widetilde{P}_r(x)\cos\tau x+ +\widetilde{Q}_r(x)\sin\tau x\right]$

Здесь $P_m(x), Q_s(x)$ - конкретные многочлены, $\widetilde{P}_m(x), \widetilde{P}_r(x), \widetilde{Q}_r(x)$ - многочлены с неопределёнными коэффициентами; индекс указывает степень многочлена, $r=\max\{m,s\}$.

Пример 3.2. Найти общее решение НЛДУ.
а) $y'''-6y''+9y'=(4x+8)e^x$ (3.5)

Общее решение соответствующего ОЛДУ найдено в примере 3.1.: $y_{о.о.}=C_1+(C_2+C_3x)e^{3x}$. Правая часть данного уравнения имеет вид $P_m(x)e^{ax}$, *m*=1, *a*=1. Так как *a*=1 не корень характеристического уравнения, то $y_{ч.н.}$ ищем в виде: $y_{ч.н.}=(A+Bx)e^x$. Для нахождения неопределённых коэффициентов *A* и *B* подставим эту функцию в уравнение (3.5).

В результате подстановки получим верное тождество относительно *x*:
$y'''_{ч.н.}-6y''_{ч.н.}+9y'_{ч.н.}=(4x+8)e^x$,
то есть, $(Ax+3A+B)e^x-6(Ax+2A+B)e^x+9(Ax+A+B)e^x=(4x+8)e^x$. Сокращаем обе части равенства на e^x и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях *x* в левой и правой частях: 4*A*=4, 4*B*=8 $\Rightarrow$ *A*=1, *B*=2.
Итак: $y_{ч.н.}=(2+x)e^x$, а $y_{о.н.}=C_1+(C_2+C_3x)e^{3x}+(x+2)e^x$.

Замечание. Для проверки правильности нахождения частного решения рекомендуется подставить найденное $y_{ч.н.}$ в исходное уравнение: решение найдено верно, если в результате такой подстановки получим тождество.

б) $y'''-6y''+9y'=3x^2+5x+\dfrac{2}{3}$ (3.6)

Правая часть имеет вид $P_m(x)e^{ax}$, причём *m*=2, *a*=0. Нуль является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому $y_{ч.н.}$ ищем в виде: $y_{ч.н.}=x\widetilde{P}_m(x)$, то есть $y_{ч.н.}=x(Ax^2+Bx+C)=Ax^3+Bx^2+Cx$. Подставляем в исходное уравнение и приводим подобные:

$27Ax^2+(18B-36A)x+(6A-12B+9C)=3x^2+5x+\dfrac{2}{3}$, отсюда

$$\begin{cases} 27A = 3 \\ 18B - 36A = 5 \\ 6A - 12B + 9C = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{9} \\ B = \dfrac{1}{2} \\ C = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Следовательно $y_{ч.н.} = \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x$.

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{3x} + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x.$$

в) $y'' + 2y' + 5y = 15e^{2y}\sin x$.

Находим общее решение соответствующего ОЛДУ, для чего решаем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Его кони $\alpha \pm \beta i = -1 \pm 2i$ кратности 1, поэтому $y_{о.о.} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ (см. таблицу 3.1).

Правая часть НЛДУ имеет вид $e^{\sigma x}[P_m(x)\cos\tau x + Q_s(x)\sin\tau x]$, причём $P_m(x) = 0$, $Q_s(x) = 15$, $m = s = 0$, $\sigma = 2$, $\tau = 1$. Так как $\sigma \pm \tau i = 2 \pm i$ не корни характеристического уравнения, то, согласно таблице 3.2, $y_{ч.н.}$ ищем в виде: $y_{ч.н.} = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$, $\widetilde{P}_r(x), \widetilde{Q}_r(x)$ - многочлены нулевой степени с неопределёнными коэффициентами.

Находим $y'_{ч.н.}$, $y''_{ч.н.}$ и подставляем в исходное уравнение и приводим подобные.

$y'_{ч.н.} = e^{2x}([2A + B]\cos x + [2B - A]\sin x)$, $y''_{ч.н.} = e^{2x}([3A + 4B]\cos x + [3B - 4A]\sin x)$

$e^{2x}([12A + 6B]\cos x + [12B - 6A]\sin x) \equiv 15e^{2x}\sin x$

Сокращаем обе части равенства на выражение e^{2x} и приравниваем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в левой и правой частях:

$$\begin{cases} 12A + 6B = 0 \\ 12B - 6A = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = 1 \end{cases}$$, значит $y_{ч.н.} = e^{2x}(-\frac{1}{2}\cos x + \sin x)$,

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{2x}(-\frac{1}{2}\cos x + \sin x).$$

Метод подбора применим и в том случае, когда правая часть уравнения (3.1) не имеет вида, представленного в таблице 3.2, но является суммой функций такого вида. Согласно теореме суперпозиции, если $y_1(x)$ есть решение ЛНДУ $L[y] = f_1(x)$, а $y_2(x)$ - решение ЛНДУ $L[y] = f_2(x)$, то $y_1(x) + y_2(x)$ есть решение ЛНДУ $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$.

Поэтому для нахождения частного решения последнего уравнения достаточно найти какие-нибудь частные решения двух предыдущих уравнений и сложить их.

Пример 3.3. Найти общее решение НЛДУ $y'' + 2y' + 5y = 15e^{2y}\sin x + 16e^{x}$.

Здесь $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) = 15e^{2y}\sin x$, $f_2(x) = 16e^{x}$.
Для уравнения $L[y] = 15e^{2y}\sin x$ частное решение найдено в примере 3.2(в):
$y_1 = e^{2x}(-\frac{1}{2}\cos x + \sin x)$. Найдём $y_2(x)$ - частное решение уравнения $L[y] = f_2(x)$, то есть
$y'' + 2y' + 5y = 16e^{x}$ (3.7)

Правая часть этого уравнения имеет вид $P_m(x)e^{ax}$, причём *m*=0, *a*=1. Так как *a*=1 не является корнем характеристического уравнения, то $y_2(x)$ ищем в виде: $y_2 = Ae^{x}$. Подставляя $y_2(x)$ в (3.7), легко найдём *A*=2.

Итак $y_2 = 2e^{x}$ и $y_{ч.н.} = y_1 + y_2 = e^{2x}(-\frac{1}{2}\cos x + \sin x) + 2e^{x}$,

$$y_{о.н.} = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right) + e^{2x}(-\frac{1}{2}\cos x + \sin x) + 2e^{x}.$$

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ.

Пусть имеем дифференциальное уравнение второго порядка $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$ (4.1)
$p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ - непрерывные функции. И пусть известна фундаментальная система решений $\{y_1(x), y_2(x)\}$ соответствующего однородного уравнения $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ (4.2)
тогда $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ - есть общее решение уравнения (4.2).

Будем искать решение уравнения (4.1) в виде $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ (4.3), где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - неизвестные функции от *x*.
$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x)$.
На $C_1(x)$ и $C_2(x)$ наложим следующее условие $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$ (4.4),

Тогда $y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$ (4.5)
$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x)$ (4.6)

Подставляя (4.3), (4.5), (4.6) в (4.1) получим:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) + p_1(x)C_1(x)y_1'(x) +$$
$$+ p_1(x)C_2(x)y_2'(x) + p_2(x)C_1(x)y_1(x) + p_2(x)C_2(x)y_2(x) = f(x) \qquad \Leftrightarrow$$
$$C_1(x)\left[y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1\right] + C_2(x)\left[y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2\right] + C_1'(x)y_1'(x) +$$
$$+ C_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ есть решение однородного уравнения (4.2), получаем: $C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)$ (4.7)

Значит, функция $y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ будет решением уравнения (4.1), если функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ будут удовлетворять одновременно уравнениям (4.4) и (4.7), то есть системе:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases} \qquad (4.8)$$

определитель которой – есть определитель Вронского линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (4.2), следовательно, отличен от нуля. Поэтому система (4.8) имеет единственное решение:

$$\begin{cases} C_1'(x)=\varphi_1(x) \\ C_2'(x)=\varphi_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x)=\int\varphi_1(x)dx+C_1 \\ C_2(x)=\int\varphi_2(x)dx+C_2 \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (4.3), найдём частное решение (при $C_1=0$, $C_2=0$) уравнения (4.1)

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)=y_1(x)\int\varphi_1(x)dx+y_2(x)\int\varphi_2(x)dx.$$

Общее решение дифференциального уравнения (4.1) будет:

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y_1(x)\int\varphi_1(x)dx+y_2(x)\int\varphi_2(x)dx$$

Пример 4.1. Решить уравнение $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

Найдём решение характеристического уравнения $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$, запишем $y_{о.о.}=e^{0x}(C_1\cos x+C_2\sin x)=C_1\cos x+C_2\sin x$

$y_{ч.н.}$ будем искать в виде $y_{ч.н.}=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$, для этого рассмотрим и решим систему (4.8) для данного уравнения

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0 \\ C_1'(x)\cos' x+C_2'(x)\sin' x=\dfrac{1}{\sin x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0 \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\sin x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} C_1'(x)=-\dfrac{\sin x}{\cos x}C_2'(x) \\ C_2'(x)\dfrac{\sin x}{\cos x}+C_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\sin x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)=-\dfrac{\sin x}{\cos x}C_2'(x) \\ C_2'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)=-1 \\ C_2'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} C_1(x) = -\int dx \\ C_2(x) = \int \dfrac{d(\sin x)}{\sin x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = -x \\ C_2(x) = \ln|\sin x| \end{cases},$$ получим $y_{ч.н.} = -x\cos x + \ln|\sin x|\sin x$.

Итак $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \ln|\sin x|\sin x$.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Нормальной системой n линейных однородных дифференциальных уравнений (первого порядка) с постоянными коэффициентами называется система вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \ldots + a_{1n}y_n(x) \\ y_2' = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \ldots + a_{2n}y_n(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \ldots + a_{nn}y_n(x) \end{cases},$$

где $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ – неизвестные функции; $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nn}$ – постоянные коэффициенты; при этом число n называют порядком системы. Подобные системы часто возникают в теории электрических цепей, при изучении переходных процессов.

Заметим, что ОЛДУ порядка n может быть легко сведено к нормальной системе того же порядка.

Пример 5.1. Рассмотрим уравнение $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$. Возьмем $y_1(x) = y'(x)$, $y_2(x) = y_1' = y''$; тогда $y''' = y_2'$, и получается система из трех уравнений:

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = 5y_2 - 17y_1 + 13y \end{cases}.$$

Методы решения нормальных систем с ОЛДУ обобщают решения (отдельных) ОЛДУ. Для простоты будем рассматривать системы 2 порядка.

Метод исключения.

С помощью исключения неизвестных функций система из n уравнений сводится к ОЛДУ порядка n.

Пример 5.2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 4y_2 - y_1 \end{cases}.$$

Решение. Из первого уравнения выразим $y_2 = y_1' - 2y_1$ и подставим y_2 во второе уравнение: $(y_1' - 2y_1)' = 4(y_1' - 2y_1) - y_1$, $y_1'' - 2y_1' = 4y_1' - 8y_1 - y_1$, $y_1'' - 6y_1' + 9y_1 = 0$.

Получили ОЛДУ-2 с характеристическим уравнением $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0;\ \lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

Общее решение: $y_1(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$. Подставив $y_2 = y_1' - 2y_1$, получим:

$y_2(x) = 3C_1e^{3x} + C_2e^{3x} + 3C_2xe^{3x} - 2C_1e^{3x} - 2C_2xe^{3x} = (C_1 + C_2)e^{3x} + C_2xe^{3x}$.

Ответ: $y_1(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$, $y_2(x) = (C_1 + C_2)e^{3x} + C_2xe^{3x}$.

Метод Эйлера.

Этот метод (так же, как и в случае отдельного ОЛДУ) позволяет свести решение системы уравнений к характеристическому (алгебраическому) уравнению.

Рассмотрим систему $\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$.

Будем искать решение в виде $y_1(x) = A_1e^{\lambda x}$, $y_2(x) = A_2e^{\lambda x}$, где A_1, A_2 - пока неизвестные коэффициенты, между которыми нужно будет установить связь. Подставив в уравнения исходной системы $y_1'(x) = A_1\lambda e^{\lambda x}$; $y_2'(x) = A_2\lambda e^{\lambda x}$ и сократив на $e^{\lambda x} \neq 0$, получим:

$$\begin{cases} A_1\lambda = a_{11}A_1 + a_{12}A_2 \\ A_2\lambda = a_{21}A_1 + a_{22}A_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)A_1 + a_{12}A_2 = 0 \\ a_{21}A_1 + (a_{22} - \lambda)A_2 = 0 \end{cases}.$$

Для того, чтобы система однородных линейных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получено квадратное уравнение относительно переменной λ, которое называется характеристическим уравнением.

Возможны 3 случая:

1. Оба корня характеристического уравнения действительны и различны: $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
2. Характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня: $\lambda_{1,2} = a \pm bi$.
3. Корни характеристического уравнения действительные и равные: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Случай 1. Подставляя λ_1 в одно из уравнений СЛУ, например, в первое:

$$(a_{11} - \lambda_1)A_1^{(1)} + a_{12}A_2^{(1)} = 0,$$

определим $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(1)}$ (с точностью до постоянного множителя), откуда получим первое решение исходной системы: $y_1^{(1)}(x) = A_1^{(1)}e^{\lambda_1 x}; y_2^{(1)}(x) = A_2^{(1)}e^{\lambda_1 x}$,

Аналогично, подставляя λ_2, получим второе решение, линейно независимое с первым:

$$y_1^{(2)}(x) = A_1^{(2)} e^{\lambda_2 x}; y_2^{(2)}(x) = A_2^{(2)} e^{\lambda_2 x}.$$

В итоге получим общее решение исходной системы:

$$y_1(x) = C_1 A_1^{(1)} e^{\lambda_1 x} + C_2 A_1^{(2)} e^{\lambda_2 x},\ y_2(x) = C_1 A_2^{(1)} e^{\lambda_1 x} + C_2 A_2^{(2)} e^{\lambda_2 x}.$$

Пример 5.3. Найти общее решение: $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 3y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}.$

Возьмем

$$\begin{matrix} y_1(x) = A_1 \cdot e^{\lambda x} \\ y_2(x) = A_2 \cdot e^{\lambda x} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1'(x) = A_1 \cdot \lambda e^{\lambda x} \\ y_2'(x) = A_2 \cdot \lambda e^{\lambda x} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (4-\lambda)A_1 + 3A_2 = 0 \\ A_1 + (2-\lambda)A_2 = 0 \end{cases}$$

Составим и решим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$

$(4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = 0$, $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$. Корни: $\lambda_1 = 5; \lambda_2 = 1$.
В случае $\lambda_1 = 5$ получим из первого уравнения СЛУ: $-A_1 + 3A_2 = 0,\ A_1 = 3A_2$, где можем взять $A_2 = 1,\ A_1 = 3$.
В случае $\lambda_1 = 1$, аналогично: $A_1 + A_2 = 0,\ A_1 = -A_2$, возьмем $A_2 = 1,\ A_1 = -1$.

Общее решение: $y_1(x) = 3C_1 e^{5x} - C_2 e^x;\ y_2(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^x$.

Случай 2. В силу формулы Эйлера: $e^{(a \pm bi)x} = e^{ax}(\cos bx \pm i \sin bx)$ общее решение системы представляется в виде:

$$y_1(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx), \quad y_2(x) = e^{\alpha x}(A_1 \cos bx + A_2 \sin bx),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные; постоянные A_1 и A_2 выражаются через них с помощью подстановки функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в одно из уравнений исходной системы.

Пример 5.4. Найти общее решение: $\begin{cases} y_1' = -4y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 - 6y_2 \end{cases}.$

Составим и решим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 \\ -2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0,$

$$(-4-\lambda)(-6-\lambda) + 2 = 0, \quad \lambda^2 + 10\lambda + 26 = 0,\ \lambda_{1,2} = \frac{-10 \pm 2i}{2} = -5 \pm i;\ a = -5, b = 1.$$

Таким образом, $y_1(x)=e^{-5x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. Подставив $y_1(x)$ в первое уравнение системы, получим:

$$y_2(x)=y_1'(x)+4y_1(x)==-5C_1\cdot e^{-5x}\cos x-C_1\cdot e^{-5x}\sin x-5C_2\cdot e^{-5x}\sin x+C_2\cdot e^{-5x}\cos x+$$
$$+4C_1e^{-5x}\cos x+4e^{-5x}C_2\sin x=(C_2-C_1)e^{-5x}\cos x-(C_1+C_2)e^{-5x}\sin x.$$

Случай 3. В случае равенства корней $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ общее решение системы имеет вид:

$$y_1(x)=e^{\lambda x}(C_1+C_2x),\quad y_2(x)=e^{\lambda x}(A_1+A_2x),$$

далее поступаем так же, как и в случае 2.

Решим методом Эйлера систему из примера 5.2: $\begin{cases} y_1'=2y_1+y_2 \\ y_2'=-y_1+4y_2 \end{cases}$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0$,

$$(2-\lambda)(4-\lambda)+1=0,\quad \lambda^2-6\lambda+9=0,\ (\lambda-3)^2=0,\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda=3.$$

Таким образом, $y_1(x)=e^{3x}(C_1+C_2x)$, $y_2(x)=y_1'(x)-2y_1(x)=$

$$=(3C_1+C_2)e^{3x}+3C_2xe^{3x}-2C_1e^{3x}-2C_2xe^{3x}=(C_1+C_2)e^{3x}+C_2xe^{3x}.$$

Тема 10. Ряды. Лекции 26-31.

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1,u_2,...,u_n,...$ называется **числовым рядом**.

$$u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

При этом числа $u_1,u_2,...$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n=u_1+u_2+...+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$, n = 1, 2, ... называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда S_1, S_2, ...,S_n, ...

Определение. Ряд $u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n=S,\qquad S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

<u>Определение.</u> Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Свойства рядов.

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum Cu_n$, где С – постоянное число.

<u>Теорема.</u> *Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum Cu_n$ тоже сходится, и его сумма равна CS. ($C\neq 0$)*

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$. **Суммой** или **разностью** этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

<u>Теорема.</u> *Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна $S + \sigma$.*

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.

Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.

О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

Критерий Коши.

Для того, чтобы последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что при n>N и любом p> 0, где p – целое число, выполнялось бы неравенство:

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon .$$

<u>Доказательство.</u> (необходимость)

Пусть $a_n \to a$, тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что неравенство $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполняется при n>N. При n>N и любом целом p>0 выполняется также неравенство $|a - a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Учитывая оба неравенства, получаем:

$$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a) + (a - a_n)| \le |a_{n+p} - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Необходимость доказана. Доказательство достаточности рассматривать не будем.

Сформулируем критерий Коши для ряда.

Для того, чтобы ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ был сходящимся необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер N такой, что при n>N и любом p>0 выполнялось бы неравенство

$$\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}\right| < \varepsilon .$$

Однако, на практике использовать непосредственно критерий Коши не очень удобно. Поэтому как правило используются более простые признаки сходимости:

1) Если ряд $\sum u_n$ сходится, то необходимо, чтобы общий член u_n стремился к нулю. Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{3n-1} + \ldots$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0$ - необходимый признак сходимости не выполняется, значит ряд расходится.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.
Однако, этот признак также не является достаточным.

Например, ряд 1-1+1-1+1-1+ … $+(-1)^{n+1}+\ldots$ расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при четных } n \\ 1, & \text{при нечетных } n \end{cases}$$

Однако, при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к. $|S_n| < 2$ при любом n.

Ряды с неотрицательными членами.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Теорема. *Для сходимости ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.*

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема. Если $u_n \leq v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n частные суммы рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$. Т.к. по условию теоремы ряд $\sum v_n$ сходится, то его частные суммы ограничены, т.е. при всех n $\sigma_n<M$, где

М – некоторое число. Но т.к. $u_n \le v_n$, то $S_n \le \sigma_n$ то частные суммы ряда $\sum u_n$ тоже ограничены, а этого достаточно для сходимости.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+...+\frac{1}{\ln n}+...$

Т.к. $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum\frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\frac{1}{\ln n}$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n}<\frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема. *Если $u_n > 0$, $v_n > 0$ и существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.*

Признак Даламбера.

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q,$$

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ расходится.

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, то при $\rho< 1$ ряд сходится, а при $\rho> 1$ – расходится. Если $\rho = 1$, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

$$u_n=\frac{n}{2^n};\quad u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}<1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+...$

$$u_n=\frac{1}{n!};\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

Вывод: ряд сходится.

Признак Коши (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ *с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n}\le q,$$

то ряд $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n}\ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ *расходится.*

<u>Следствие.</u> Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, то при ρ<1 ряд сходится, а при ρ>1 ряд расходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1$$

Вывод: ряд сходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\ne 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Если φ(x) – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке [1;∞), *то ряд φ(1) + φ(2) + …+ φ(n) + … =* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ *и несобственный интеграл* $\int\limits_1^{\infty}\varphi(x)dx$ *одинаковы в смысле сходимости.*

Пример. Ряд $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$ сходится при α>1 и расходится α≤1 т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при α>1 и расходится α≤1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ называется **общегармоническим** рядом.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.

Сходимость функциональных рядов.

Рассмотрим функциональный ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (2.1)$$

где $f_n(x)$, n = 1,2,... – функции, определенные на некотором множестве G .

Областью сходимости ряда (2.1) называется множество всех $x=x_0 \in$G, при которых числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится (хотя бы условно). Отыскание области сходимости можно производить по схеме:

1) находим, при каких фиксированных $x \in$G сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, составленный из модулей членов ряда (2.1) (это точки абсолютной сходимости), используя достаточные признаки сходимости числовых знакоположительных рядов;

2) для тех *x*, при которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ *расходится*, исследуем на условную сходимость исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Пример 2.1. Найти область сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{(n+1)^{2x}\left(n^2+a^x\right)} \qquad (2.2)$$

Так как $(n+1)^{2x}>0$, $\left(n^2+a^x\right)>0$ при любых действительных x и $n \in N$, то исследуем ряд (2.2) как числовой знакоположительный ряд. Видим, что при $n \to \infty$

$$\frac{\sqrt{n+2}}{(n+1)^{2x}(n^2+a^x)}=\frac{n^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{n^{2x}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x}n^2\left(1+\frac{a^x}{n^2}\right)}\approx\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{2x+2}}=\frac{1}{n^{2x+\frac{3}{2}}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-(2x+\frac{3}{2})}$ сходятся как обобщённый гармонический при $2x+\frac{3}{2}>1$, т.е. $x>-\frac{1}{4}$, и расходится при $x\le-\frac{1}{4}$. Значит, по II признаку сравнения, в силу соотношения эквивалентности, исходный ряд сходится при $x>-\frac{1}{4}$ и расходится при $x\le-\frac{1}{4}$.

Таким образом, область сходимости ряда (2.2) – множество x, удовлетворяющих неравенству $x>-\frac{1}{4}$.

Пример 2.2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(x^2-5x+4)^n}\cdot\frac{n}{n+1}$$

Очевидно, область определения ряда $x\in R\setminus\{1;4\}$.

Применив признак Коши к ряду из абсолютных величин, получим, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{|x^2-5x+4|^n}\cdot\frac{n}{n+1}}=\frac{2}{|x^2-5x+4|}$$

ряд будет сходится если $\frac{2}{|x^2-5x+4|}<1$, то есть

$$|x^2-5x+4|>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-5x+4>2\\x^2-5x+4<-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\frac{5+\sqrt{17}}{2}\\x<\frac{5-\sqrt{17}}{2}\\2<x<3.\end{array}\right.$$

При $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$; 2; 3 признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Дополнительно исследуем исходный ряд в этих точках.

При x=2; 3 имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$, при $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ - ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$, полученные ряды расходятся , т.к. не выполняется необходимый признак сходимости ($\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$).

Значит, область сходимости исходного ряда есть множество $D=$ $\left(-\infty,\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)\cup(2;3)\cup\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$, причем сходимость абсолютная.

Пример 2.3. Найти область сходимости ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt[5]{n}}x^{2n}\sin(x+\pi n).$$

При $x=\pi\kappa,\kappa\in Z,\sin x=0$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt[5]{n}}\left[x^{2n}\sin(x+\pi n)\right]=0$, т.е. ряд сходится. Пусть $x\neq\pi\kappa,\kappa\in Z$. Применим признак Коши:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt[5]{n}}x^{2n}\left|\sin(x+\pi n)\right|}=2x^2<1$, если $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, то есть : $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$, ряд сходится .

При $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ признак Коши не решает вопроса о сходимости ряда. Исследуем исходный ряд в этих точках. Так как $\sin(x+\pi n)=(-1)^n\sin x$ то для $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt[5]{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}\sin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{5}}}\sin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Это ряды типа Лейбница, сходящиеся условно. Таким образом, область сходимости исходного ряда – множество

$D=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\{x=\pi\kappa;\kappa=0,\pm1,\pm2...\}$, при $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ сходимость условная.

Пример 2.4. Найти область сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n\sqrt{x}}}{\ln(e-x)}arctg\frac{x}{3^{n\sqrt{x}}}$$

Область определения ряда: $0\le x<e,\quad x\ne e-1$. Применив признак Коши, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{n\sqrt{x}}}{\ln(e-x)}\left|arctg\frac{x}{3^{n\sqrt{x}}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{n\sqrt{x}}}{|\ln(e-x)|}*\frac{|x|}{3^{n\sqrt{x}}}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{3^{n\sqrt{x}}}=\left(\frac{e}{3}\right)^{\sqrt{x}}$$

т.к. $arctg\frac{x}{3^{n\sqrt{x}}}\approx\frac{x}{3^{n\sqrt{x}}}, n\to\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\ln(e-x)|}=1$. Очевидно, что $\left(\frac{e}{3}\right)^{\sqrt{x}}<1$, при $x>0$.

При $x=0\quad f_n(x)=0,\quad n=1,2,\ldots$, т.е. ряд сходится. Значит, с учетом области определения, имеем область сходимости $D=\{x:0\le x<e, x\ne e-1\}$.

Пример 2.5. Найти область сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(n+2)\ln(n+2)}.$$

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+5|^{n+1}(n+2)\ln(n+2)}{(n+3)\ln(n+3)|x+5|^n}=\lim_{n\to\infty}|x+5|\frac{(n+2)}{(n+3)}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)}=|x+5|,$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)}=\lim_{t\to\infty}\frac{[\ln(t+2)]'}{[\ln(t+3)]'}=\lim_{t\to\infty}\frac{t+3}{t+2}=1.\right)$$

Значит, при $|x+5|<1$, т.е. при $-6<x<-4$ ряд сходится абсолютно. При $x=-4$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$, который расходится по интегральному признаку. При $x=-6$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}$, который сходится по признаку Лейбница (условно). Значит , область сходимости – множество $D=\{x:-6\le x<-4\}$; при $x=-6$ сходимость условная.

2.2 Равномерная сходимость функциональных рядов.

Пусть функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\qquad(2.3)$$

имеет область сходимости *G*. Ряд (2.3) называется равномерно сходящимся на $D \subset G$ к своей сумме $S(x)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малого) найдется номер $N(\varepsilon)$(не зависящий от $x \in D$), такой, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ и сразу для всех $x \in D$ выполняется неравенство $\left|S(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon$. Для исследования на равномерную сходимость можно использовать *признак Вейерштрасса*: если для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ найдется такой числовой знакоположительный сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что сразу для всех *x* из некоторого множества *D* выполняются неравенства $\left|f_n(x)\right| \le a_n$, $n = 1,2,3,...$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно и абсолютно сходится на *D*.

Пример 2.6. Доказать, исходя из определения, равномерную сходимость на отрезке [0,1] функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+2}. \qquad (2.4)$$

При каких *n* абсолютная величина остаточного члена ряда не превосходит 0,01 для всех $x \in [0;1]$.

Воспользуемся определением равномерной сходимости. Заметим, что для всех $x \in [0;1]$. и $n \in N$ выражение $\frac{x^n}{n+2} \ge 0$.Функция $y = x^n$ на [0;1] монотонно возрастает от 0 до 1 и ряд (2.4) при каждом фиксированном $x \in (0;1]$ - знакочередующийся.

Для $\forall x \in (0;1]$ выполнены условия признака Лейбница:

1) из неравенства $0 < \frac{x^n}{n+2} \le \frac{1}{n+2}$ и теоремы о пределе промежуточной функции следует , что $\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n+2} = 0;$

2) $\frac{x^n}{n+2} \ge \frac{x^{n+1}}{(n+1)+2}$. Значит, ряд (2.4) сходится в любой точке промежутка $(0,1]$.

Очевидно, он сходится при $x=0$. На интервале $(0,1]$ – это ряд типа Лейбница, поэтому можно применить оценку (1.11): $\left|S(x)-S_n(x)\right| \le \dfrac{|x|^{n+1}}{n+3} \le \dfrac{1}{n+3}$.

Эта оценка справедлива и при $x=0$.

Пусть $\varepsilon>0$. Тогда $\dfrac{1}{n+3}<\varepsilon$ при $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-3$. Возьмем номер $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. Очевидно, для всех $n>N(\varepsilon)$ и сразу для всех $x\in[0;1]$.

$\left|S(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon$, т.е. по определению ряд (2.4) сходится равномерно на [0;1].

Положим $\varepsilon=0{,}01$, тогда из $\dfrac{1}{n+3}<0{,}01$.

Имеем $n+3>100$. Значит, для $\forall n>97$ абсолютная величина остаточного члена ряда не превосходит $0{,}01$.

Пример 2.7. Доказать равномерную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)\cdot x^n}{\sqrt{3n^7+1}\cdot 2^{n!}} \text{ на отрезке [-2;2].}$$

Воспользуемся признаком Вейерштрасса. Заметим, что $|\sin nx|\le 1$ для любых *x*, функция $y=|x|$ на отрезке [-2;2] принимает наибольшее значение на концах отрезка.

$$\left|\frac{\sin(nx)x^n}{\sqrt{3n^7+1}2^{n!}}\right|<\frac{2^n}{n^{\frac{7}{5}}2^n}=\frac{1}{n^{\frac{7}{5}}}$$

т.е. $|f_n(x)|$ не превосходит *n*-го члена сходящегося числового знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[5]{n^7}}$.

Значит, по признаку Вейерштрасса исходный ряд на [-2;2] равномерно и абсолютно сходится.

2.3 Нахождение сумм степенных рядов.

Функциональный ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (2.5)$$

называется степенным.

Если ряд (2.5) расходится хотя бы в одной точке, то существует такое число *R*,

$0 \le R < +\infty$, что

1) для $x \in (-R, R)$ ряд (2.5) сходится;

2) для $x \notin (-R, R)$ ряд (2.5) расходится.

Это число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а интервал $(-R, R)$ - *интервалом сходимости*. Радиус сходимости ряда (2.5) удобно находить:

1) по формулам $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $R = \left[\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right]^{-1}$, если пределы существуют;

2) При помощи признаков Даламбера и Коши.

Полезно запомнить следующие свойства степенных рядов:

- на любом отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости, степенной ряд сходится абсолютно и равномерно;

- на любом отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости, степенной ряд можно почленно интегрировать любое число раз;

- в любой точке интервала сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз.

Напомним, что на интервале $|x| < 1$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

(сумма геометрической прогрессии).

Пример 2.7. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}$$

Легко убедиться, что интервал сходимости ряда - $(-1;1)$. На этом интервале

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+6}}{(2n+3)(2n+4)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4}\right]x^{2n+6} =$$

$$= x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{2n+3} - x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+4}}{2n+4} \tag{2.6}$$

Ряды, стоящие в правой части (2.6), можно получить интегрированием рядов

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n+2}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n+3}$; при этом

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n+2}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n+2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{2n+3},\qquad \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n+3}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n+3}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+4}}{2n+4}.$$

Заметим, что $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+2}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^2\right)^n=\frac{x^2}{1-x^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+3}=\frac{x^3}{1-x^2}, |x|<1$. Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{2n+3}=\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}dt=\int_0^x\left[\frac{1}{1-t^2}-1\right]dt=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-x, |x|<1.$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+4}}{2n+4}=\int_0^x\frac{t^3}{1-t^2}dt=\int_0^x\left[\frac{t}{1-t^2}-t\right]dt=-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)-\frac{x^2}{2}, |x|<1. \tag{2.7}$$

Поэтому, с учетом (2.6), (2.7),имеем

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}=x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{2n+3}-x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+4}}{2n+4}=$$
$$=x^3\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-x\right]-x^2\left[-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)-\frac{x^2}{2}\right]=$$
$$=-\frac{x^4}{2}+\frac{x^2\cdot\left[(x+1)\ln(x+1)+(1-x)\ln(1-x)\right]}{2},\quad |x|<1$$

Пример 2.8. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(6n^2-3n+7)x^n$$

При последовательном дифференцирование ряда $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ на интервале сходимости |x|<1

получим:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n.$$

Значит, $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n=\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Представим многочлен $6n^2-3n+7$ в виде: $6n^2-3n+7=A(n+2)(n+1)+B(n+1)+C$,

где A, B, C – неопределённые коэффициенты, которые найдём, решив систему:

$$\begin{cases} A=6 \\ 3A+B=-3 \\ 2A+B+C=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=6 \\ B=-21. \\ C=16 \end{cases}$$

Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}(6n^2-3n+7)x^n = 6\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n - 21\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + 16\sum_{n=0}^{\infty}x^n =$$

$$= \frac{12}{(1-x)^3} - \frac{21}{(1-x)^2} + \frac{16}{1-x} = \frac{16x^2-11x+7}{(1-x)^3}, \quad |x|<1.$$

2.4 Разложение функций в ряды.

Если функция $f(x)$ определена вместе со своими производными в некоторой окрестности точки $x=a$, то она разложима в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \quad (2.8)$$

при условии, что остаток ряда

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}\cdot(x-a)^{n+2} + \ldots + \frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!}\cdot(x-a)^{n+k} + \ldots =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1} \to 0$$

(стремится к нулю) при $n\to\infty$. Здесь $0<\theta<1$, а остаток записан в форме Лагранжа.

Разложение (2.8), в частности, имеет место в промежутке $-R+a<x<R+a$, если функция $f(x)$ имеет в нём ограниченные производные всех порядков, то есть если $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ при всех n.

При $a=0$ ряд Тейлора имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

и называется рядом Маклорена.

Основными табличными разложениями являются:

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $\quad (-\infty<x<\infty)$,

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(-\infty < x < \infty)$,

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$, $(-\infty < x < \infty)$,

4) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $(-1 < x < 1)$,

5) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n +$
$+ ... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n$, $(-1 < x < 1)$,

6) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{n+1}$, $(-1 < x \le 1)$,

7) $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{2n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{2n-1}$,

$(-1 \le x \le 1)$.

Используя эти разложения, можно довольно просто находить разложения многих других функций.

Пример 2.9. Разложить в функцию $f(x) = \sin\frac{x^2}{3}$ в ряд Маклорена.

Решение. Полагаем $\frac{x^2}{3} = y$. Тогда

$$\sin\frac{x^2}{3} = \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + ... = \frac{x^2}{3} - \frac{x^6}{3!\cdot 3^3} + \frac{x^{10}}{5!\cdot 3^5} - \frac{x^{14}}{7!\cdot 3^7} + ...$$

Разложение имеет место при всех *x*.

Иногда разложение функции в ряд получается суммированием табличных рядов.

Пример 2.10. Разложить в ряд функцию $f(x) = \ln\left(6 + x - x^2\right)$

Решение:

Так как $6 + x - x^2 = (3-x)(2+x)$, то

$$\ln(6 + x - x^2) = \ln(3-x)(2+x) = \ln(3-x) + \ln(2-x) =$$

$$= \ln 3 + \ln(1 - \frac{x}{3}) + \ln 2 + \ln(1 + \frac{x}{2}),$$ при $x \in (-2;3)$

Учитывая, что $\ln(1+y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{n+1}}{n+1}$, $(-1<y\le 1)$, получим:

$$f(x)=\ln 3+\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(-\frac{x}{3}\right)^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{n+1}=$$

$$=\ln 3+\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}=\ln 3+\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{n+1}-2^{n+1}}{(n+1)6^{n+1}}x^{n+1}.$$

Разложение имеет место при

$$\begin{cases}-1<-\frac{x}{3}\le 1\\ -1<\frac{x}{2}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x<3\\ -2<x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-2;2]$$

Для разложения функции в ряд Тейлора в окрестности точки a (то есть, по степеням $(x\text{-}a)$), находят коэффициенты непосредственно, т.е. вычисляют значения производных, либо преобразуют функцию.

Пример 2.11. Разложить в ряд функцию $f(x)=\frac{1}{4+3x}$ по степеням $(x+2)$ и указать интервал сходимости полученного разложения.

Решение.

$$\frac{1}{4+3x}=\frac{1}{-2+3(x+2)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3(x+2)}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\left[\frac{3(x+2)}{2}\right]+\left[\frac{3(x+2)}{2}\right]^2+\ldots+\left[\frac{3(x+2)}{2}\right]^n+\ldots\right)=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n(x+2)^n.$$

Полученное разложение верно для всех x, удовлетворяющих неравенству:

$$-1<\frac{3(x+2)}{2}<1 \quad\text{или}\quad -\frac{2}{3}<(x+2)<\frac{2}{3}.$$

Вычитая из каждой части неравенства по 2, получаем:

$$-\frac{8}{3}<x<-\frac{4}{3}\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{8}{3};-\frac{4}{3}\right)$$

область сходимости ряда к своей функции.

Тема 11. Криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля. Лекции 32-36.

Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент.

Говорят, что в области D (пространственной или плоской) задано ***скалярное поле***, если каждой точке M из D поставлено в соответствие некоторое число. Тем самым в области D определена скалярная функция $u(M)$. Если ввести некоторую систему координат, например, трехмерную декартову, то точка M будет определяться тройкой чисел x, y, z, а задание поля $u(M)$ сведется к заданию функции от трех переменных, которую будем обозначать той же буквой u: $u(x,y,z)$.

Термином «поле» подчеркивается тот факт, что значение функции u зависит только от точек M и не зависит от того, в каких координатах задаются эти точки.

Пусть $u(M)$ – некоторое скалярное поле в области D и M_0 – внутренняя точка из D. Возьмем вектор (луч) $\vec{\ell}$ с началом в точке M_0 и произвольную точку $M \neq M_0$ на $\vec{\ell}$ (так, чтобы отрезок M_0M целиком принадлежал области D).

Определение. *Производной* скалярного поля ***u*** *в точке* M_0 *по направлению* $\vec{\ell}$ называется предел отношения разности $u(M)-u(M_0)$ к длине отрезка M_0M, когда M стремится к M_0 по лучу $\vec{\ell}$:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = \lim_{M \to M_0} \frac{u(M)-u(M_0)}{|M_0M|}.$$

Пусть поле ***u*** задано в декартовой системе координат, т.е. $u = u(x,y,z)$.

Теорема 1. *Если функция* $u = u(x,y,z)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, *то в этой точке существует производная поля* ***u*** *по любому направлению, причем*

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma, \tag{1}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *- направляющие косинусы вектора* $\vec{\ell}$.

Пример 1. Найти производную скалярного поля $u = x^2y + 2y + yz$ в точке $M_0(-1, 2, 0)$ в направлении вектора $\overrightarrow{M_0M}$, M $(3,1,1)$.

Решение. Находим частные производные функции $u(x,y,z)$ и вычисляем их значения в точке $M_0(-1, 2, 0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 2 + z\,,\ \frac{\partial u}{\partial z} = y\,;$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = -4\,,\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = 3\,,\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 2\,.$$

Вектор $\vec{\ell} = \overrightarrow{M_0M}$ имеет вид: $\vec{\ell} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, а единичный вектор того же направления представим в виде:

$$\vec{\ell}^0 = \frac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|} = \frac{4}{\sqrt{18}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{18}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{18}}\vec{k}\,.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{18}}\,,\ \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{18}}\,,\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{18}}\,.$$

По формуле (1) получим:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = -4\cdot\frac{4}{\sqrt{18}} + 3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{18}}\right) + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{18}} = -\frac{17}{\sqrt{18}}\,.$$

<u>Определение</u>. *Градиентом* скалярного поля $u = u(x,y,z)$ в точке M_0 называется вектор $grad\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, где частные производные вычисляются в точке M_0 (предполагается, что они существуют).

Это определение использует декартову систему координат. Можно дать другое, инвариантное определение градиента. Действительно, из формулы (1) следует, что $\frac{\partial u}{\partial \ell} = (grad\,u, \vec{\ell}^0) = Пр_{\vec{\ell}}\,grad\,u$, где $(grad\,u, \vec{\ell}^0)$ - скалярное произведение.

Таким образом, градиент скалярного поля *u* в точке M_0 - это вектор, проекция которого на любое направление $\vec{\ell}$ равна производной поля u в точке M_0 в направлении $\vec{\ell}$.

Отсюда, в частности, можно сделать следующий вывод: если поверхность *S* задана уравнением $V(x,y,z) = 0$, то единичная нормаль к этой поверхности в точке M_0 может быть найдена через градиент скалярного поля *V* по формуле

$$\vec{n}^{0}(M_0)=\pm\frac{grad\,V(M_0)}{|grad\,V(M_0)|}\quad. \tag{2}$$

Знак «+» берется в случае, когда направление искомой нормали и градиента совпадают, а «-» - в противном случае.

Пример 2. Найти производную скалярного поля $u=-x^2y+z^2$ в точке $M_0(2,2,8)$ в направлении нормали к поверхности $z=x^2+y^2$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

Решение. Воспользуемся формулой $\frac{\partial u}{\partial l}=(grad\,u,\vec{\ell}^{0})$, где $\vec{\ell}^{0}=\vec{n}^{0}$ - указанная единичная нормаль к поверхности S в точке M_0.

Найдем градиент поля u в т. M_0 (в координатной форме):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2xy,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-x^2,\ \frac{\partial u}{\partial z}=2z;$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}=-8,\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}=-4,\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}=16;$$

$$grad\,u(M_0)=-8\vec{i}-4\vec{j}+16\vec{k}.$$

Для нахождения нормали $\vec{n}^{0}$ воспользуемся формулой (2). В нашем случае поверхность S задана уравнением $z=x^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-z=0$. Поэтому возьмем $V=x^2+y^2-z$.

$$\frac{\partial V}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial V}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial V}{\partial z}=-1;$$

$$\frac{\partial V(M_0)}{\partial x}=4,\ \frac{\partial V(M_0)}{\partial y}=4,\ \frac{\partial V(M_0)}{\partial z}=-1;$$

$$grad\,V(M_0)=4\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k},$$

$$|\ grad\,V(M_0)\ |=\sqrt{4^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{33}.$$

$\frac{grad\,V(M_0)}{|grad\,V(M_0)|}=\frac{4}{\sqrt{33}}\vec{i}+\frac{4}{\sqrt{33}}\vec{j}-\frac{1}{\sqrt{33}}\vec{k}$ - это одна из двух противоположных по направлению единичных нормалей к S.

По условию нормаль образует с осью OZ острый угол и, значит, ее проекция на ось OZ положительна; у последнего вектора она отрицательна. Следовательно, в формуле (2) нужно взять знак минус:

$$\vec{n}^0 = -\frac{4}{\sqrt{33}}\vec{i} - \frac{4}{\sqrt{33}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{33}}\vec{k}\,.$$

Окончательно находим:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = (\,grad\,u, \vec{n}^0\,) = (-8)\cdot(-\frac{4}{\sqrt{33}}) + (-4)\cdot(-\frac{4}{\sqrt{33}}) + 16\cdot\frac{1}{\sqrt{33}} = \frac{64}{\sqrt{33}}\,.$$

Пример 3. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \dfrac{x^2 z}{y^2}$ и $V = -\dfrac{x^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}y^2 + 3\sqrt{2}z^2$ в точке $M_0(2, \sqrt{\dfrac{2}{3}}, \dfrac{1}{3})$.

Решение. Известно, что угол φ между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится из формулы

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\,.$$

Воспользуемся этой формулой для $\vec{a} = grad\,u$ и $\vec{b} = grad\,V$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xz}{y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x^2 z}{y^3},\quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x^2}{y^2};$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 2,\quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = -4\sqrt{\frac{3}{2}},\quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 6;$$

$$grad\,u(M_0) = 2\vec{i} - 4\sqrt{\frac{3}{2}}\vec{j} + 6\vec{k}\,,$$

$$\left|\ grad\,u(M_0)\ \right| = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{\frac{3}{2}})^2 + 6^2} = 8\,.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\sqrt{2}x\,,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = -6\sqrt{2}y\,,\quad \frac{\partial V}{\partial z} = 6\sqrt{2}z\,;$$

$$\frac{\partial V(M_0)}{\partial x}=-2\sqrt{2}\,,\ \frac{\partial V(M_0)}{\partial y}=-4\sqrt{3}\,,\ \frac{\partial V(M_0)}{\partial z}=2\sqrt{2}\,;$$

$$grad\,V(M_0)=-2\sqrt{2}\vec{i}-4\sqrt{3}\vec{j}+2\sqrt{2}\vec{k}\,,$$

$$\left|\ grad\,V(M_0)\ \right|=\sqrt{(-2\sqrt{2})^2+(-4\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2})^2}=8\,.$$

$$\cos\varphi=\frac{(grad\,u,grad\,V)}{|grad\,u|\cdot|grad\,V|}=\frac{-4\sqrt{2}+24\sqrt{2}+12\sqrt{2}}{8\cdot 8}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Следовательно, $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

Векторное поле. Векторные линии

Говорят, что в области D (пространственной или плоской) задано векторное поле, если каждой точке M из D поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{a}=\vec{a}(M)$. Если введена прямоугольная декартова система координат, то векторное поле определит в D некоторую векторную функцию от координат точки M: $\vec{a}\,(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ - для пространственной области или $\vec{a}\,(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ - для плоской области. В дальнейшем будем предполагать, что скалярные функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ имеют непрерывные частные производные в D, т.е. поле $\vec{a}\,(x,y,z)$ непрерывно дифференцируемое. Для геометрической характеристики векторного поля вводят понятие векторной линии.

Определение. *Векторной линией* поля $\vec{a}$ называется гладкая кривая, в каждой точке M которой касательная имеет то же направление, что и вектор $\vec{a}(M)$.

Векторные линии поля $\vec{a}\,(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}\,. \qquad (3)$$

Аналогично, если поле имеет вид $\vec{a}\,(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$, то уравнение векторных линий имеет вид:

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}. \tag{4}$$

Пример 4. Найти векторные линии поля $\vec{a}\,(x,y,z) = (y+z)\vec{i} - x\vec{j} - x\vec{k}$.

Решение. В данном случае $P(x,y,z) = y+z$, $Q(x,y,z) = -x = R(x,y,z)$ и система (3) принимает вид:

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y+z}{-x} \\ \dfrac{dz}{dy} = 1, \end{cases},$$

где $x = x(y)$, $z = z(y)$ - неизвестные функции. Из второго уравнения получаем: $dz = dy \Leftrightarrow z = y + c_1$. Подставим в первое уравнение: $\frac{dx}{dy} = \frac{2y+c_1}{-x}$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Решаем его:

$$-xdx = (2y + c_1)dy \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} = y^2 + c_1 y + c_2 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 2c_1 y + 2c_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + y^2) + (y^2 + 2c_1 y + c_1^2) = c_1^2 - 2c_2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2) + (y + c_1)^2 = c_1^2 - 2c_2.$$

Но $y + c_1 = z$, следовательно, $x^2 + y^2 + z^2 = c_1^2 - 2c_2$. Обозначив $c_1^2 - 2c_2 = c$, получим $x^2 + y^2 + z^2 = c$.

Итак, векторные линии поля $\vec{a}$ определяются системой алгебраических уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c \\ z = y + c_1 \end{cases}$.

Это семейство пространственных кривых, которые получаются пересечением сфер $x^2 + y^2 + z^2 = c$ и плоскостей $z = y + c_1$, параллельных оси *OX*.

Пример 5. Найти векторные линии поля $\vec{a} = (y-1)\vec{i} - (x-2)\vec{j}$.

Решение. Воспользуемся уравнением (4), которое в данном случае принимает вид: $\frac{dx}{y-1} = \frac{dy}{2-x}$.

Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получим:

$$(2-x)dx=(y-1)dy \Leftrightarrow -\frac{(x-2)^2}{2}=\frac{(y-1)^2}{2}+c_1 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=c\,.$$

Таким образом, векторные линии представляют собой окружности в плоскости XOY с центром в точке (2; 1).

Поток векторного поля

Определение. *Потоком векторного поля* $\vec{a}$ через поверхность S в направлении нормали $\vec{n}^0$ к поверхности S называется поверхностный интеграл первого рода

$$\Pi=\iint_S(\vec{a},\vec{n}^0)ds, \tag{5}$$

Решение. Поверхность S представляет собой круговой конус, ось которого совпадает с осью OY (рис. 1).

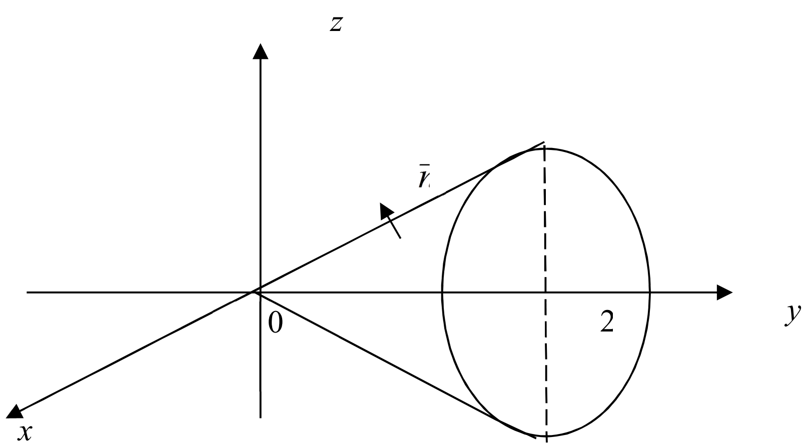


Рис. 1

Найдем единичную нормаль к поверхности S по формуле (2), для чего рассмотрим скалярное поле $V=x^2+z^2-y^2$:

$$grad\,V=2x\vec{i}-2y\vec{j}+2z\vec{k}\,,$$

$$\left|grad\,V\right|=\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Так как интеграл (5) берется по поверхности *S*, а на ней $x^2+z^2=y^2$, то $|grad\, V|=2\sqrt{2y^2}=2\sqrt{2}y$.

$$\vec{n}^0=\pm\frac{grad\, V}{|grad\, V|}=\pm\frac{2x\vec{i}-2y\vec{j}+2z\vec{k}}{2\sqrt{2}y}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}\vec{i}-\vec{j}+\frac{z}{y}\vec{k}\right).$$

Нормаль к внешней стороне конуса *S* образует с осью *OY* тупой угол, т.е. ее проекция на ось *OY* отрицательна. Следовательно, в последней формуле нужно взять знак «+»:

$$\vec{n}^0=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}\vec{i}-\vec{j}+\frac{z}{y}\vec{k}\right).$$

$$(\vec{a},\vec{n}^0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x+z)\frac{x}{y}-(y-2)+(z-x)\frac{z}{y}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^2}{y}+\frac{xz}{y}+2-y+\frac{z^2}{y}-\frac{xz}{y}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^2+z^2}{y}-y+2\right)=\sqrt{2}\ (\text{на } S\ \ x^2+z^2=y^2).$$

Итак, $\Pi=\iint\limits_S\sqrt{2}ds=\sqrt{2}\iint\limits_S ds$. Последний интеграл равен площади $S_б$ боковой поверхности конуса *S*. Так как $S_б=\pi R\ell=\pi\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$, то $\Pi=8\pi$.

В последнем примере вычисление поверхностного интеграла свелось к вычислению площади поверхности *S*. В более общем случае приходится использовать ту или иную формулу вычисления поверхностных интегралов.

Пусть, например, поверхность *S* однозначно проектируется на плоскость *XOY*. Тогда ее можно задать уравнением $z=z(x,y)$, а поверхностный интеграл (5) можно свести к двойному интегралу по формуле:

$$\Pi=\iint\limits_S(\vec{a},\vec{n}^0)ds=\iint\limits_{D_{x,y}}\frac{(\vec{a},\vec{n}^0)dxdy}{|\cos\gamma|},\qquad(6)$$

где $D_{x,y}$ - проекция поверхности *S* на плоскость *XOY*, а γ - угол единичной нормали к S с осью *OZ*. Заметим, что $\vec{n}^0=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$, поэтому $\cos\gamma$ получаем при нахождении нормали $\vec{n}^0$.

Если поверхность S не проектируется однозначно ни на одну из координатных плоскостей, то ее разбивают на части, каждая из которых однозначно проектируется на ту или иную координатную плоскость.

Пример 7. Найти поток поля $\vec{a} = (x - 6z)\vec{i} + (2y + x)\vec{j} + z\vec{k}$ через часть плоскости $x - 2y + 3z - 6 = 0$, вырезаемую координатными плоскостями (нормаль образует острый угол с осью *OZ*).

Решение. Нормаль к поверхности S можно найти по формуле (2), но проще учесть, что в уравнении плоскости коэффициенты при *x, y, z* являются координатами некоторого перпендикулярного к плоскости вектора, т.е. вектор $\vec{n}^0 = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ является нормалью к S. Тогда $\vec{n}^0 = \pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm\frac{\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{14}}$. Отсюда, в частности, получаем: $|\cos\gamma| = \frac{3}{\sqrt{14}}$, а так как по условию нормаль образует острый угол с осью *OZ*, то нужно взять знак «+», т.е.

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k};$$

$$(\vec{a}, \vec{n}^0) = \frac{1}{\sqrt{14}}(x - 6z - 2(2y + x) + 3z) = -\frac{x + 4y + 3z}{\sqrt{14}}.$$

В данном примере поверхность S (треугольник) однозначно проектируется на каждую из координатных плоскостей. Возьмем для определенности проекцию на плоскость *XOY* (см. рис. 2).

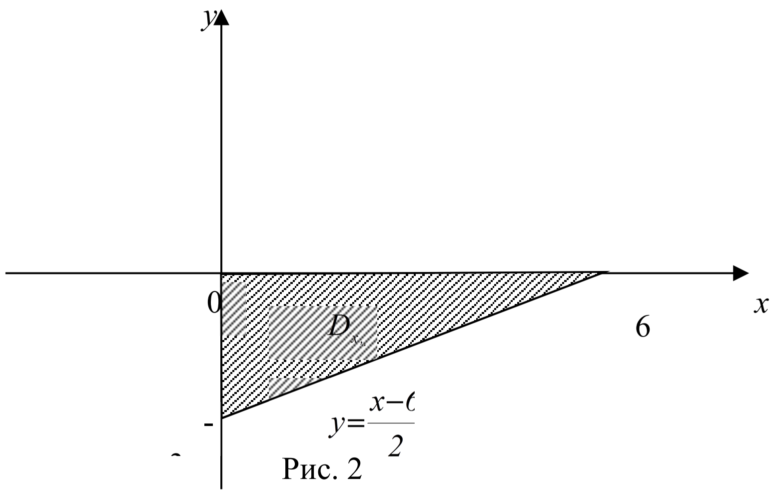


Рис. 2

Уравнение плоскости запишем в виде $z = \frac{6 - x + 2y}{3}$ и подставим правую часть вместо z в $(\vec{a}, \vec{n}^0)$:

$$(\vec{a},\vec{n}^{0}) = -\frac{1}{\sqrt{14}}(x+4y+6-x+2y) = -\frac{6}{\sqrt{14}}(y+1).$$

По формуле (6) получим:

$$\iint_{D_{x,y}} \frac{(\vec{a},\vec{n}^{0})dxdy}{|\cos\gamma|}dxdy = -2\iint_{D_{xy}}(y+1)dxdy = -2\int_0^6 dx \int_{\frac{x-6}{2}}^{0}(y+1)dy = -2\int_0^6 dx\,\frac{(y+1)^2}{2}\Bigg|_{\frac{x-6}{2}}^{0} =$$

$$\int_0^6\left[\frac{(x-6)^2}{4}+(x-6)\right]dx = \left[\frac{(x-6)^3}{12}+\frac{(x-6)^2}{2}\right]\Bigg|_0^6 = 0.$$

<u>Пример 8</u>. Найти поток поля $\vec{a} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ через замкнутую поверхность $S:\begin{cases} x^2+y^2=9-z \\ z=0 \end{cases}$ (нормаль внешняя).

<u>Решение</u>. Поверхность $x^2+y^2=9-z$ представляет собой параболоид вращения (рис. 3), т.е. поверхность S состоит из части S_1 параболоида и части S_2 плоскости $z=0$.

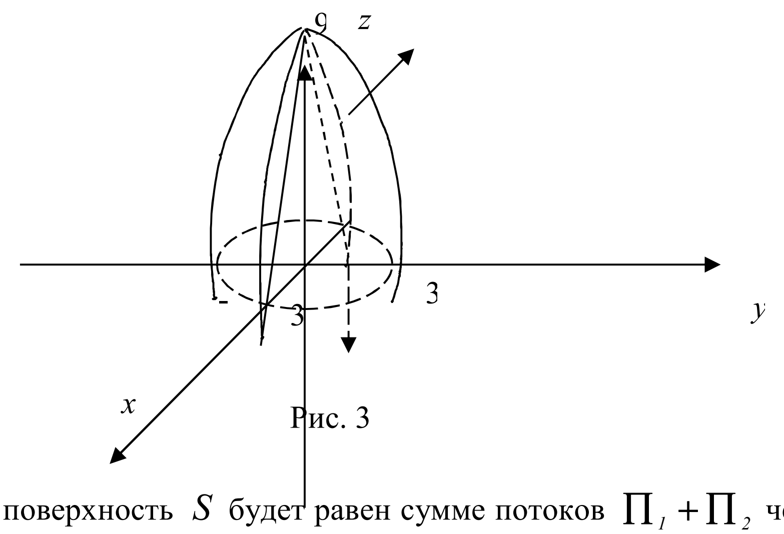


Рис. 3

Поток через поверхность S будет равен сумме потоков $\Pi_1+\Pi_2$ через S_1 и S_2 соответственно. Для нахождения нормали $\vec{n}_1^{\,0}$ к S_1 рассмотрим скалярное поле $V = x^2+y^2+z-9$ и воспользуемся формулой (2).

$$grad\,V = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k},\ \ |grad\,V| = \sqrt{4x^2+4y^2+1};$$

$\vec{n}_1^{\,0} = \dfrac{grad\,V}{|grad\,V|} = \dfrac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$ (при выборе знака нормали учли, что ее проекция на ось *OZ* положительна для внешней стороны S_1).

Заметим, что поверхность S_1 однозначно проектируется на плоскость *XOY*, поэтому воспользуемся формулой (6):

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} \frac{(\vec{a}, \vec{n}_1{}^0)}{|\cos\gamma|} dxdy .$$

$$(\vec{a}, \vec{n}_1{}^0) = \frac{4x^2 - 2y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \frac{3x^2 - 3y^2 + 9}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}},\ |\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Следовательно, $\Pi_1 = \iint\limits_{D_1} (3x^2 - 3y^2 + 9) dxdy$,

где D_1 – проекция S_1 на плоскость *XOY* – круг $x^2 + y^2 \le 9$. Очевидно, последний интеграл удобнее вычислить в полярных координатах: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

$$\Pi_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 [3\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 9]\rho d\rho = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (\rho^3\cos 2\varphi + 3\rho)d\rho =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4}\cos 2\varphi + \frac{3}{2}\rho^2\right)\Big|_0^3 d\varphi = 3\int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{4}\cos 2\varphi + \frac{27}{2}\right)d\varphi = \frac{81}{2}\left(\frac{3}{4}\sin 2\varphi + \varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = 81\pi .$$

На поверхности S_2 $\vec{n}_2^0 = -\vec{k}$ и $z = 0$, поэтому $(\vec{a}, \vec{n}_2{}^0) = -z = 0$ и $\Pi_2 = 0$.

Таким образом, суммарный поток равен 81π.

1. Дивергенция. Формула Остроградского-Гаусса

Пусть $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ - непрерывно дифференцируемое векторное поле.

Определение. *Дивергенцией* векторного поля $\vec{a}$ называется скалярное поле $div\vec{a}$, определяемое формулой

$$div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Теорема 2. *Пусть* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *- непрерывно дифференцируемые функции в некоторой пространственной замкнутой области D, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью* S. *Тогда справедлива формула*

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz, \tag{6}$$

или, в векторной форме,

$$\iint\limits_S (\vec{a}, \vec{n}^0) ds = \iiint\limits_D div\vec{a} dv, \tag{6.1}$$

где $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, $\vec{n}^0$ *- внешняя нормаль к поверхности* S.

Формулу (6) – (6.1) называют *формулой* ***Остроградского-Гаусса***. Эта формула

часто существенно упрощает нахождение потока через замкнутую поверхность.

Пример 9. Найти поток поля $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ через замкнутую поверхность S: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 4 \quad (z \geq 0) \end{cases}$ (нормаль внешняя).

Решение. Можно применить метод, использованный при решении примера 8. Но значительно проще воспользоваться формулой Остроградского-Гаусса. Заметим, что левая часть формулы (6) – (6.1) представляет собой поток поля $\vec{a}$ через поверхность S изнутри.

Следовательно, $\Pi = \iiint\limits_D div\vec{a} dv = \iiint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$. В данном случае $div\vec{a} = 1 + 2 + 1 = 4$ и $\Pi = \iiint\limits_D div\vec{a} dv = 4 \cdot V_D$, где V_D - объем пространственной области D.

Так как D представляет собой круговой конус с радиусом основания $R = 4$ и высотой $h = 4$, то $V_D = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{64}{3}\pi$ и поток $\Pi = \frac{256}{3}\pi$.

Заметим, что в примере 8 также применима формула Остроградского-Гаусса, но она не дает столь ощутимых преимуществ, как в предыдущем примере.

Так, в примере 8 $div\vec{a} = 2 - 1 + 1 = 2$. $\Pi = \iiint\limits_D div\vec{a} dv = 2\iiint\limits_D dxdvdz = 2V_D$. Но в данном случае область D ограничена параболоидом вращения $z = 9 - x^2 - y^2$ и плоскостью $z = 0$, а формулу объема для такого тела мы не знаем. Поэтому приходится вычислять тройной интеграл:

$$\iiint\limits_D dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \cdot \int\limits_0^{9-x^2-y^2} dz = \iint\limits_{D_{xy}} (9 - x^2 - y^2) = \left\{ \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (9-\rho^2)\rho d\rho = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (9\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4})\Big|_0^3 = \frac{81}{2}\pi .$$

Тогда $\prod = 2V_D = 81\pi$.

Формулу Остроградского-Гаусса иногда целесообразно применять и для нахождения потока через незамкнутую поверхность.

Пример 10. Найти поток поля $\vec{a} = (2z+1)\vec{i} + y\vec{j}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенную в 4-ом октанте (нормаль – внешняя к сфере).

Решение. Рассмотрим *замкнутую* поверхность S, ограничивающую часть *шара* $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, лежащую в 4-ом октанте. Она состоит из четырех частей S_1, S_2, S_3, S_4, где S_1 - указанная в задаче часть сферы, S_2, S_3, S_4 - четверти кругов, расположенные соответственно в плоскостях *XOZ, XOY,* *YOZ* (рис. 4).

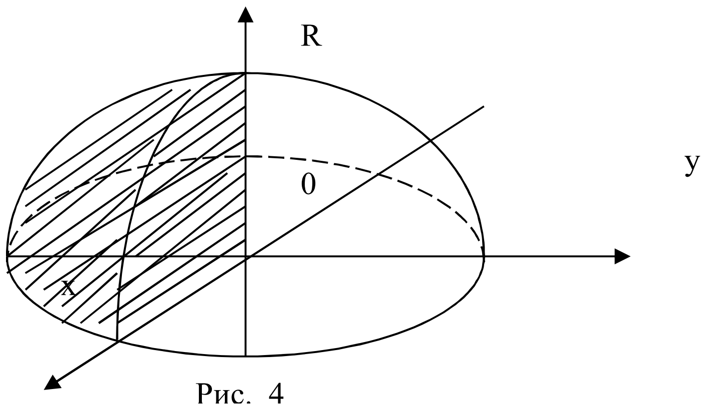


Рис. 4

Поток $\prod$ через поверхность S будет равен сумме потоков $\prod_1$, $\prod_2$, $\prod_3$, $\prod_4$ через соответствующие части: $\prod = \prod_1 + \prod_2 + \prod_3 + \prod_4$. Отсюда

$$\prod_1 = \prod - \prod_2 - \prod_3 - \prod_4 \qquad (7)$$

Поток $\prod$ через замкнутую поверхность S найдем по формуле Остроградского-Гаусса:

$$div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1, \quad \prod = \iiint\limits_D dxdydz = \frac{1}{8} \cdot V_{шара} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi R^3}{6}.$$

На поверхности S_2 нормаль $\vec{n}_2^0$ равна $\vec{j}$, поэтому $(\vec{a}, \vec{n}_2^{\,0}) = y = 0$ (на S_2 $y = 0$) и $\prod_2$ =0.

На поверхности S_3 нормаль $\vec{n}_3^0$ равна $(-\vec{k})$, поэтому $(\vec{a}, \vec{n}_3^{\,0}) = 0$ (у вектора $\vec{a}$

$R(x,y,z)=0$) и $\prod_3=0$.

Найдем поток $\prod_4$. Нормаль к S_4 равна $(-\vec{i}\,)$, поэтому $(\vec{a},\vec{n}_4^{\,0})=-(2z+1)$;

$$\prod_4=\iint_{S_4}(\vec{a},\vec{n}_4^0)ds=-\iint_{S_4}(2z+1)dydz\,.$$

Здесь поверхность S_4 совпадает со своей проекцией на плоскость *YOZ* и $ds=dy\cdot dz$.

Так как S_4 - четверть круга радиуса *R*, то перейдем к полярным координатам:

$$\prod_4=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R(2\rho\sin\varphi+1)\rho d\rho=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi(\frac{2}{3}\rho^3\sin\varphi+\frac{\rho^2}{2})_0^R=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{2}{3}R^3\sin\varphi+\frac{R^2}{2})d\varphi=(\frac{2}{3}R^3\cos\varphi-\frac{1}{2}R^2\varphi)_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi R^2}{4}-\frac{2R^3}{3}.$$

Окончательно по (7) получаем: $\prod_1=\frac{\pi R^3}{6}+\frac{\pi R^2}{4}+\frac{2R^3}{3}$.

Линейный интеграл и циркуляция

<u>Определение</u>. *Линейным интегралом* векторного поля $\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ *вдоль кривой AB* называется криволинейный интеграл второго рода:

$$\int\limits_{AB}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\,. \qquad (8)$$

Если ввести обозначение $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$ ($d\vec{r}$ - дифференциал радиус-вектора точек кривой *AB*), то интеграл (8) можно записать в виде $\int\limits_{AB}(\vec{a},d\vec{r})$, где $(\vec{a},d\vec{r}\,)$ - скалярное произведение. Если кривая *AB* задана параметрически: $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ или в векторной форме: $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ ($\vec{r}(t)$ - параметрическое задание радиус-вектора точек кривой *AB*), то линейный интеграл примет вид:

$$\int\limits_{AB}(\vec{a},d\vec{r})=\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\vec{a},\frac{d\vec{r}}{dt})dt\,, \qquad (9)$$

где α и β - значения параметра, соответствующие начальной и конечной точкам кривой *AB*.

В случае, когда $\vec{a}$ - силовое поле, линейный интеграл выражает работу, совершаемую полем $\vec{a}$ при перемещении материальной точки по кривой *AB*.

Пример 11. Найти работу W силы $\vec{a} = x\vec{i} + x\vec{j} - \vec{k}$ вдоль одного витка *AB* винтовой линии: $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$ ($0 \le t \le 2\pi$).

Решение. Кривая *AB* задана параметрически: $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}$. Воспользуемся формулой (9).

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = -a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k};$$

$$\vec{a} = x\vec{i} + x\vec{j} - \vec{k} = a\cos t\vec{i} + a\cos t\vec{j} - \vec{k};$$

$$(\vec{a}, \frac{d\vec{r}}{dt}) = -a^2 \sin t\cos t + a^2 \cos^2 t - b, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2\pi;$$

$$W = \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin t\cos t + a^2 \cos^2 t - b)dt = (-a^2 \frac{\sin^2 t}{2} + \frac{1}{2}a^2 t + \frac{a^2}{4}\sin 2t - bt)_0^{2\pi} =$$

$$= \pi(a^2 - 2b).$$

Определение. *Циркуляцией* поля $\vec{a}$ по *замкнутой* ориентированной кривой (контуру) L называется линейный интеграл поля $\vec{a}$ вдоль L.

Пример 12. Вычислить циркуляцию поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j}$ вдоль контура L: $x = \cos t,\ y = \sin t$, $z = 1 - \cos t - \sin t$ в направлении возрастания параметра.

Решение. Контур L задан параметрически, но не указаны пределы изменения параметра *t*. Найдем их. Если точка $M(x, y)$ пробегает контур L, то точка $M'(x, y)$ - проекция точки M на плоскость *XOY* – пробегает единичную окружность: $x = \cos t,\ y = \sin t$. Таким образом, можно считать, что параметр *t* меняется от 0 до 2π (циркуляция ищется в направлении возрастания параметра!). Заметим, что при $t = 0$ и $t = 2\pi$ соответствующие точки на контуре L совпадают, т.е. контур L обходится полностью (L есть линия пересечения кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ с плоскостью $z = 1 - x - y$).

Воспользуемся формулой (9):

$$\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} = \sin t\vec{i} - \cos t\vec{j},$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + (1 - \cos t - \sin t)\vec{k},$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin\vec{i} + \cos t\vec{j} + (\sin t - \cos t)\vec{k};$$

$$(\vec{a}, \frac{d\vec{r}}{dt}) = -\sin^2 t - \cos^2 t = -1;$$

$$Ц = \int_{\alpha}^{\beta} (\vec{a}, \frac{d\vec{r}}{dt})dt = \int_{0}^{2\pi} (-1)dt = -t\Big|_0^{2\pi} = -2\pi.$$

Пример 13. Найти модуль циркуляции поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + (x + y)\vec{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} z = x^2 + (y+1)^2 \\ 4y - z + 4 = 0 \end{cases}$.

Решение: В данном примере контур L задан как линия пересечения параболоида $z = x^2 + (y+1)^2$ и плоскости $4y - z + 4 = 0$.

Зададим контур L параметрически (такое задание неоднозначно, но выберем одно из простейших).

Найдем проекцию контура L на плоскость XOY, для чего исключим переменную z из системы, задающей L:

$$\begin{cases} z = x^2 + (y+1)^2 \\ 4y - z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + (y+1)^2 \\ z = 4y + 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 4y + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Очевидно, что проекция представляет собой окружность радиуса 2 с центром в точке (0;1), поэтому естественно взять $x = 2\cos t$, $y - 1 = 2\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Тогда $z = 4y + 4 = 4(1 + 2\sin t) + 4$, т.е. $x = 2\cos t$, $y = 1 + 2\sin t$, $z = 8 + 8\sin t$.

Применим формулу (9):

$$\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + (x+y)\vec{k} = (1 + 2sint)\vec{i} - 2cost\vec{j} + (2cost + 2sint + 1)\vec{k},$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = 2\cos t\vec{i} + (1 + 2\sin t)\vec{j} + (8 + 8\sin t)\vec{k},$$

$$\frac{dr}{dt} = -2\sin t\vec{i} + 2\cos t\vec{j} + 8\cos t\vec{k},$$

$$(\vec{a}, \frac{d\vec{r}}{dt}) = -2\sin t - 4\sin^2 t - 4\cos^2 t + 16\cos^2 t + 16\sin t\cos t + 8\cos t =$$

$$= -2\sin t + 8\cos t + 16\cos^2 t + 16\sin t\cos t - 4;$$

$$Ц=\int\limits_0^{2\pi}[-2\sin t+8\cos t+16\cos^2 t+16\sin t\cos t-4]dt=$$

$$=(2\cos t+8\sin t+8t+4\sin 2t+8\sin^2 t-4t)\Big|_0^{2\pi}=8\pi.$$

6. Ротор. Формула Стокса

Определение. *Ротором* (вихрем) векторного поля $\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ называется векторное поле $rot\vec{a}$, определяемое равенством:

$$rot\vec{a}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}.$$

Для нахождения ротора поля $\vec{a}$ удобно использовать формальный определитель:

$$rot\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix},$$

причем под произведениями вида $\frac{\partial}{\partial x}\cdot Q,\ldots,$ понимаются частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x},\ldots$.

Например, $rot\vec{a}$, где $\vec{a}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$, равен:

$$rot\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy & yz & xz\end{vmatrix}=(\frac{\partial}{\partial y}xz-\frac{\partial}{\partial z}yz)\vec{i}-(\frac{\partial}{\partial x}xz-\frac{\partial}{\partial z}xy)\vec{j}+(\frac{\partial}{\partial x}yz-\frac{\partial}{\partial y}xy)\vec{k}=$$

$$=-y\vec{i}-z\vec{j}-x\vec{k}.$$

Теорема 3. *Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой пространственной области и S - некоторая кусочно-гладкая поверхность в этой области, ограниченная кусочно-гладким контуром L. Тогда имеет место равенство:*

$$\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S[(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta+ +(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma]ds,$$

(10)

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - *направляющие косинусы нормали $\vec{n}^0$ к поверхности S, причем направление нормали выбирается так, чтобы из ее конца обход контура наблюдался против ча-*

совой стрелки.

Если $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, а $\vec{r}$ - радиус-вектор точек контура L, то формулу (10) можно записать в векторной форме:

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S (rot\vec{a}, \vec{n}^0) ds. \qquad (10.1)$$

Формулу (10) – (10.1) называют *формулой Стокса.*

Формулу Стокса можно использовать для вычисления циркуляции:

$$Ц = \iint_S (rot\vec{a}, \vec{n}^0) ds.$$

Пример 13. (См. условие выше). Найдем циркуляцию с использованием формулы (10.1). В качестве поверхности S, ограниченной контуром L, возьмем часть плоскости $4y - z + 4 = 0$. Нормаль $\vec{n}$ к этой поверхности имеет проекции (0, 4, -1), а единичная нормаль $\vec{n}^0$ имеет вид

$$\vec{n}^0 = \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{k}.$$

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & x+y \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k},$$

$$(rot\vec{a}, \vec{n}^0) = -\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{2}{\sqrt{17}} = -\frac{2}{\sqrt{17}}.$$

$Ц = \iint_S (rot\vec{a}, \vec{n}^0) ds = \iint_{D_{xy}} (rot\vec{a}, \vec{n}^0) \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$, $|\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{17}}$, D_{xy} - проекция S на плоскость ХОУ – круг радиуса 2.

Следовательно,

$$Ц = \iint_{D_{xy}} \left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right) \frac{dxdy}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = -2\iint_{D_{xy}} dxdy = -2 \cdot S_{круга} = -8\pi; \ |Ц| = 8\pi.$$

Пример 14. Найти модуль циркуляции вектора $\vec{a} = z^2\vec{i}$ по границе L части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, расположенной в 1-ом октанте.

Решение. В качестве поверхности S, ограниченной контуром L, возьмем соответствующую часть сферы (часть плоскости брать нельзя, так как контур L не лежит в одной плоскости).

Единичную нормаль $\vec{n}^0$ к S найдем по формуле (2), $V = x^2 + y^2 + z^2 - 16$:

$$grad\,V = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k},$$

$$|\,grad\,V\,| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{16} = 8 \text{ на } S;$$

$\vec{n}^0 = \frac{1}{4}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ (здесь направление нормали не существенно, так как ищется модуль циркуляции).

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2z\vec{j},\ (rot\vec{a}, \vec{n}^0) = \frac{yz}{2},\ Ц = \iint_S \frac{yz}{2} ds.$$

Последний интеграл сведем к двойному, спроектировав, например, поверхность S на плоскость ХОУ; проекция D_{xy} - четверть круга $x^2 + y^2 \le 16$.

Так как $\vec{n}^0 = \frac{x}{4}\vec{i} + \frac{y}{4}\vec{j} + \frac{z}{4}\vec{k}$, то $|\cos\gamma| = \frac{z}{4}$ $(z > 0 \text{ на } S)$ и

$$Ц = \iint_S (rot\vec{a}, \vec{n}^0) ds = \iint_{D_{xy}} \frac{yz}{2\cdot\frac{z}{4}} dxdy = 2\iint_D y\,dxdy.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$Ц = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^4 2\rho\sin\varphi\cdot\rho d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^4 \rho^2 d\rho = -2\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{128}{3}.$$

Тема 12. Теория функций комплексного переменного. Лекции 37-47.

Комплексные числа и действия над ними.

Комплексным числом z называется выражение $z = a + iy$, где x, y-действительные числа, i - мнимая единица $(i^2 = -1)$. При этом число x называется *действительной* частью, а y - *мнимой* частью числа z и обозначаются: $x = Rez,\quad y = \operatorname{Im} z$.

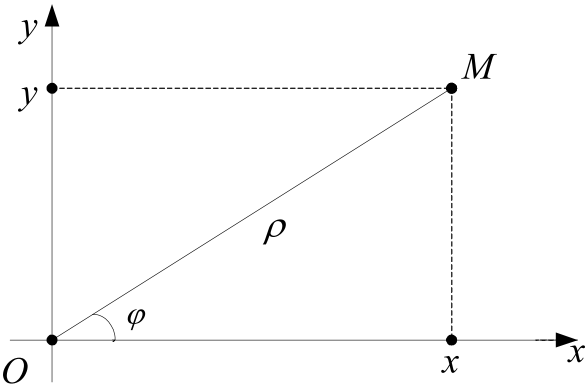
Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* числу $z = x + iy$.

Действия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяются следующими формулами:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq 0).$$

Комплексное число $z=x+iy$ изображается на плоскости точкой *M* с координатами (x,y) или вектором $\overrightarrow{OM}$. Длина ρ этого вектора называется модулем комплексного числа *z*, обозначается $|z|$ и вычисляется $\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Угол φ между положительным направлением оси Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$ называется аргументом комплексного числа *z* и обозначается $Argz$; он определен с точностью до слагаемого, кратного 2π. Значение аргумента φ, удовлетворяющего условию $-\pi<\varphi\le\pi$ (или $0\le\varphi<2\pi$), называется главным и обозначается $\arg z$. Таким образом,



$$Argz=\arg z+2k\pi,\quad k\in Z.$$

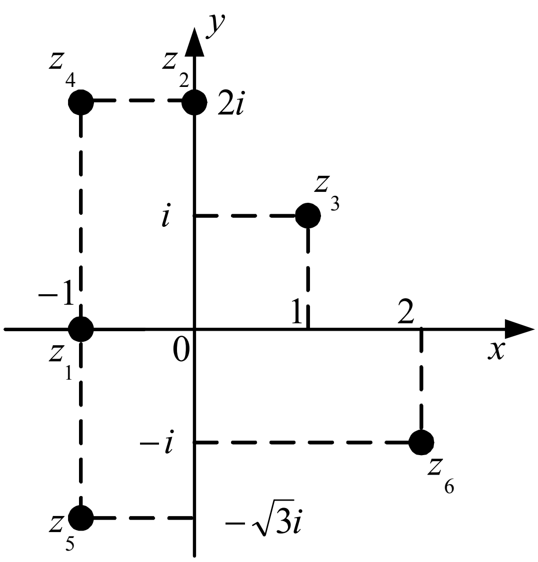
Комплексное число z можно записать с помощью модуля и аргумента:
$z=|z|(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ - тригонометрическая форма, $z=|z|e^{i\varphi}$ - показательная форма. Запись $z=x+iy$ называется алгебраической формой комплексного числа *z*.

Задача 1.1. Заданы комплексные числа: а) $z_1=-1$, б) $z_2=2i$, в) $z_3=1+i$, г) $z_4=-1+2i$, д) $z_5=-1-i\sqrt{3}$, е) $z_6=2-i$. Представить z_1, z_2, z_3 в тригонометрической форме, а z_4, z_5, z_6 - в показательной форме и изобразить точками на комплексной плоскости.

Решение.

а) для $z_1=-1$ имеем $\rho=|z_1|=1$, $\varphi=\pi$, тогда $-1=\cos\pi+i\sin\pi$

б) для $z_2=2i$ имеем $\rho=|z_2|=2$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, тогда $2i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$



в) для $z_3=1+i$ имеем $\rho=|z_3|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $tg\varphi=1$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$, тогда $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

г) для $z_4=-1+2i$ имеем $\rho=|z_4|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$, $tg\varphi=-2$, $\varphi=\pi-arctg2$, тогда $-1+2i=\sqrt{5}e^{i(\pi-arctg2)}$

д) для $z_5=-1-i\sqrt{3}$ имеем $\rho=|z_5|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$, $tg\varphi=-\sqrt{3}$,

$\varphi = -\frac{2\pi}{3}$ или $\left(\varphi = \frac{4\pi}{3}\right)$, тогда $-1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

е) для $z_6 = 2 - i$ имеем $\rho = |z_6| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$, $tg\varphi = -\frac{1}{2}$, $\varphi = arctg\left(-\frac{1}{2}\right)$, тогда

$2 - i = \sqrt{5}e^{i\,arctg\left(-\frac{1}{2}\right)}$

Над комплексными числами z, z_1, z_2 заданными в тригонометрической форме

$$z = |z|(\cos\varphi) + i\cdot\sin\varphi,$$

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1),$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2),$$

действия можно выполнять по правилам:

$$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $n \in N$ - формула Муавра.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

(под $\sqrt[n]{|z|}$ понимается арифметический корень)

Из последней формулы видно, что $\sqrt[n]{z}$ при $z \neq 0$ имеет ровно *n* различных значений.

2. Функции комплексного переменного.

Если D - некоторое множество точек комплексной плоскости и каждому числу $z = x + iy$ из D поставлено в соответствие единственное комплексное число $\omega = u + iv$, то говорят, что на множестве D определена однозначная функция комплексного переменного (ФКП), и пишут $\omega = f(z) = u + iv = u(x;\,y) + i\,v(x;\,y)$, где $u(x;\,y) = \operatorname{Re} f(z)$ - действительная часть функции $f(z)$, $v(x;\,y) = \operatorname{Im} f(z)$ - мнимая её часть.

(Если каждому числу $z = x + iy$ из D поставлено в соответствие неединственное комплексное число $\omega = u + iv$, то говорят, что на множестве D задана многозначная функция комплексного переменного).

Основные элементарные ФКП определяются следующими формулами:

$$z^n = (x+iy)^n,\quad n \in N$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};\quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad chz = \frac{e^z - e^{-z}}{2};$$

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}; \quad thz = \frac{shz}{chz}; \quad cthz = \frac{chz}{shz};$$

$Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\quad k \in Z$, это многозначная функция, главное значение логарифмической функции берётся при $k = 0$ и обозначается $\ln z = \ln|z| + i\arg z$

Задача 2.1. Доказать, что функция e^Z имеет период $2\pi i$.

Решение.

$$e^{Z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+(y+2\pi)i} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = = e^x(\cos y + i\sin y) = e^Z$$

Замечание. ФКП $\cos z$ и $\sin z$ могут принимать значения, которые по модулю превосходят единицу.

Задача 2.2. Найти $|\cos 2i|$

Решение.

$\cos 2i = \dfrac{e^{i2i} + e^{-i2i}}{2} = \dfrac{e^{-2} + e^{2}}{2}$. Поэтому $|\cos 2i| \approx 3{,}7$

Задача 2.3. Вычислить $Ln(-1)$ и $\ln(-1)$.

Решение.

Так как $|-1| = 1$, а $\arg(-1) = \pi$, получаем $Ln(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = (2k+1)\pi i,$ где $k \in Z$. $\ln(-1) = \pi i$

Задача 2.4. Найти действительную и мнимую части функции $\sin z$.

Решение.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos(-x) + i\sin(-x))\right) =$$

$\cos x \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} i + \sin x \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} = \sin x chy + i\cos x shy$, отсюда $\operatorname{Re}\sin z = u(x;y) = \sin x chy$, $\operatorname{Im}\sin z = v(x;y) = \cos x shy$

Если $f(z)$ - однозначная ФКП в области D, то производной $f'(z)$ функции $f(z)$ в точке $z \in D$ называется $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$. Функция, имеющая производную в точке z, называется дифференцируемой в этой точке.

Т. (Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.) Для того чтобы функция $f(z) = u(x;y) + i\,v(x;y)$ в точке $z = x + iy$ была дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ были дифференцируемы в точке $(x;y)$ и удовлетворяли в этой точке условиям Коши-Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

При выполнении условий Коши-Римана справедлива формула: $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (2.1)

Функция $f(z)$ называется аналитической в точке z, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.

Функция $f(z)$ называется аналитической в области D, если она аналитична в каждой точке этой области.

Задача 2.4. Выяснить, в каких точках дифференцируема функция $\omega = z\,\mathrm{Re}\,z$.

Решение.

Имеем $\omega = z\,\mathrm{Re}\,z=(x+iy)x=x^2+iyx$, $u(x;\,y)=x^2$ и $v(x;\,y)=xy$. Функции $u(x;\,y)$ и $v(x;\,y)$ дифференцируемы для любых x, y. Далее $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=x$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=y$ - условия Коши-Римана выполняются только при $x=0$ и $y=0$. Поэтому функция $\omega = z\,\mathrm{Re}\,z$ дифференцируема только в точке $z=0$.

Замечание. Функция $\omega = z\,\mathrm{Re}\,z$ не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости. (Почему?)

Задача 2.5. Доказать, что функция $\omega=\cos z$ аналитична во всей комплексной плоскости, и найти её производную.

Решение.

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{e^{-y+ix}+e^{y-ix}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x+i\sin x)+e^{y}(\cos(-x)+i\sin(-x))\right)=$$

$$\cos x\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+i\sin x\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}=\cos x\,chy-i\sin x\,shy,$$ отсюда $u(x;\,y)=\cos x\,chy$, $v(x;\,y)=-\sin x\,shy$.

Находим $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\sin x\,chy$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\cos x\,shy$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\cos x\,shy$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\sin x\,chy$. Замечаем, что функции $u(x;\,y)$ и $v(x;\,y)$ дифференцируемы и условия Коши-Римана выполняются в любой точке $(x;\,y)$. Поэтому функция $\omega=\cos z$ аналитична во всей комплексной плоскости. Получаем, согласно формулы (2.1) и результатам задачи (2.4) $(\cos z)'=-\sin x\,chy-i\cos x\,shy=-\sin z$.

Функция $u(x;\,y)$, имеющая непрерывные частные производные второго порядка на области D и удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, называется гармонической на D.

Т.(необходимое условие аналитичности). Для аналитичности $f(z)=u(x;\,y)+i\,v(x;\,y)$ необходимо, чтобы $u(x;\,y)$ и $v(x;\,y)$ были гармоническими функциями, то есть $\Delta u=0$ и $\Delta v=0$.

Замечание. Однако функция $f(z)=u(x;\, y)+i\,v(x;\, y)$, где $u(x;\, y)$ и $v(x;\, y)$ произвольные гармонические функции на D, не всегда является аналитической. Она будет аналитической, только если функции $u(x;\, y)$ и $v(x;\, y)$ удовлетворяют на D условиям Коши-Римана.

Задача 2.6. Проверить, что функция $v(x,y)$ является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x,y)=2xy+x$ и значению $f(0)=0$.

Решение.

Проверим может ли функция $v(x,y)=2xy+x$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, для этого проверим удовлетворяет ли она уравнению Лапласа $\Delta u=0$.

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y+1$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ - таким образом $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\equiv 0$. Функция $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и может служить мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, а это будет так если она ещё будет удовлетворять условиям Коши-Римана $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Подберём функцию $u(x;\, y)$ так, чтобы условия Коши-Римана выполнялись.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow u(x;\, y)=\int\dfrac{\partial v}{\partial y}dx+C(y)=\int 2xdx+C(y)=x^2+C(y)$, здесь константа интегрирования зависит от y как функция. Это связано с тем, что $u(x;\, y)$ зависит от двух переменных, а интегрирование ведётся только по одной переменной x и переменная y считается константой. (Легко убедиться что если мы конечный результат $u(x;\, y)=x^2+C(y)$ продифференцируем по x: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+C'_x(y)=2x+0$ и подставим в первое условие Коши-Римана $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, то оно будет выполнено $2x\equiv 2x$) Итак, используя первое условие Коши-Римана, мы нашли неизвестную действительную часть $u(x;\, y)=x^2+C(y)$ с точностью до произвольной функции $C(y)$, зависящей от одной переменной y.

Чтобы найти эту неизвестную функцию $C(y)$, воспользуемся вторым условием Коши-Римана $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Имеем $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0+C'(y)=-(2y+1)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ то есть $C'(y)=-(2y+1)$ откуда $C(y)=-\int(2y+1)dy=-y^2-y-C$, где C - произвольная константа интегрирования. Подставляем найденную функцию $C(y)=-y^2-y-C$ в искомую функцию $u(x;\, y)=x^2+C(y)$, получаем $u(x;\, y)=x^2-y^2-y-C$.

Итак, искомая аналитическая функция $f(z)=u(x;\, y)+i\,v(x;\, y)$ найдена.

$f(z)=x^2-y^2-y-C+i(2xy+x)=x^2+2xyi-y^2+xi-y-C=$

$=(x+iy)^2+i(x+iy)-C=z^2+iz-C$. Но она найдена с точностью до произвольной константы. Определим неизвестную константу C из условия $f(0)=0$. Имеем $f(0)=0^2+i0-C=0$, откуда $C=0$.

Ответ: $f(z)=z^2+iz$

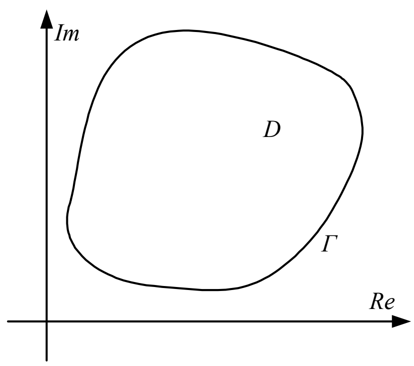
Интеграл в комплексной области. Интегральная формула Коши.

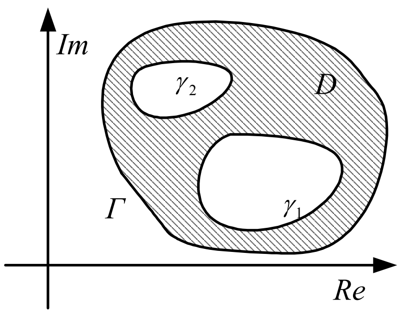
Пусть в области *D* заданы непрерывная функция $w=f(z)=u(x;\,y)+i\,v(x;\,y)$ и гладкая кривая L с началом в точке *A* и концом в точке *B* заданная уравнением $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $(\alpha\le t\le\beta)$ или, что всё равно двумя уравнениями $x=x(t)$ и $y=y(t)$, $(\alpha\le t\le\beta)$. Как обычно направление на L соответствует изменению параметра t от α до β, то есть $z(\alpha)=A$ и $z(\beta)=B$. Интеграл от функции $f(z)$ по кривой L определяется как:

$$\int_L f(z)dz=\int_L(u+iv)(dx+idy)=\int_L(udx-vdy)+i\int_L(vdx+udy)=$$
$$=\int_\alpha^\beta[u(x(t);\,y(t))x'(t)-v(x(t);\,y(t))y'(t)]dt+ \qquad (3.1)$$
$$+i\int_\alpha^\beta[v(x(t);\,y(t))x'(t)+u(x(t);\,y(t))y'(t)]dt$$

Из (3.1) видно, что интеграл по комплексному переменному - есть сумма двух криволинейных интегралов и его вычисление сводится к вычислению обыкновенных интегралов.

Если кривая L кусочно-гладкая и состоит из гладких ориентированных кусков L_1, L_2, . . . , L_n, то по определению считаем $\int_L f(z)dz=\sum_{k=1}^n\int_{L_k}f(z)dz$





Теорема Коши для односвязной области. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области *D*, ограниченной замкнутым кусочно-гладким контуром *Г*, и непрерывна в $\overline{D}=D\cup\Gamma$, то $\int_\Gamma f(z)dz=0$.

Теорема Коши для многосвязной области. Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области *D*, ограниченной замкнутыми кусочно-гладкими контурами Γ,γ_1, γ_2, ... , γ_n и непрерывна в $\overline{D}=D\cup\Gamma\cup\gamma_1\cup\gamma_2\cup\ldots\cup\gamma_n$, то

$$\oint_\Gamma f(z)dz=\oint_{\gamma_1}f(z)dz+\oint_{\gamma_2}f(z)dz+\ldots+\oint_{\gamma_n}f(z)dz$$

(все контуры пробегаются в положительном направлении).

Интегральная формула Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области *D*, ограниченной замкнутым кусочно-гладким контуром *Г*, и непрерывна в $\overline{D}=D\cup\Gamma$, то для любой внутренней точки z_0 области *D* имеет место формула Коши: $$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{f(z)}{z-z_0}dz,$$

а также справедливо обобщающее эту формулу следствие: $f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$, где $n=0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots$

Задача 3.1. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой.
$\int\limits_L z|z|dz$, $L:\{|z|=1,\quad \operatorname{Im} z\geq 0\}$

Решение.

Кривая L представляет собой полуокружность, с центром в начале координат, радиусом 1, расположенная в верхней полуплоскости.

$$\int\limits_L z|z|dz=\int\limits_L (x+iy)\sqrt{x^2+y^2}(dx+idy)=\int\limits_L \left(x\sqrt{x^2+y^2}+iy\sqrt{x^2+y^2}\right)(dx+idy)=$$
$$=\int\limits_L \left(x\sqrt{x^2+y^2}dx+iy\sqrt{x^2+y^2}dx+ix\sqrt{x^2+y^2}dy-y\sqrt{x^2+y^2}dy\right)=$$
$$=\int\limits_L \left(x\sqrt{x^2+y^2}dx-y\sqrt{x^2+y^2}dy\right)+i\int\limits_L\left(y\sqrt{x^2+y^2}dx+x\sqrt{x^2+y^2}dy\right)=$$
$$=\begin{bmatrix} x=\cos t & x'_t=-\sin t & \sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=1 \\ y=\sin t & y'_t=\cos t & 0\leq t\leq \pi \end{bmatrix}=\int\limits_0^{\pi}(\cos t(-\sin t)-\sin t\cos t)dt+$$
$$i\int\limits_0^{\pi}(\sin t(-\sin t)+\cos t\cos t)dt=\int\limits_0^{\pi}(-2\sin t\cos t)dt+i\int\limits_0^{\pi}(\cos^2 t-\sin^2 t)dt=2\int\limits_0^{\pi}\cos t\, d\cos t+$$
$$i\int\limits_0^{\pi}\cos 2t\, dt=\cos^2 t\Big|_0^{\pi}+i\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi}=(-1)^2-1^2+i(0-0)=0$$

Задача 3.2. Вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2}{z-2i}dz$

Решение.

Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{z^2}{z-2i}$ аналитична внутри контура $|z|=1$ и на нём (единственная точка $z=2i$ в которой функция не определена находится вне контура интегрирования). По теореме Коши данный интеграл равен нулю.

Задача 3.3. Вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z\,dz}{z^2+4z+3}$

Решение.

Подынтегральная функция теряет аналитичность в точках $z_1=-1$, $z_2=-3$ (знаменатель обращается в нуль). Внутри контура находится одна из этих точек z_1. Перепишем интеграл в виде

$$I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z\,dz}{z^2+4z+3}=\oint\limits_{|z|=2}\frac{\frac{e^z}{z+3}}{z+1}dz.$$

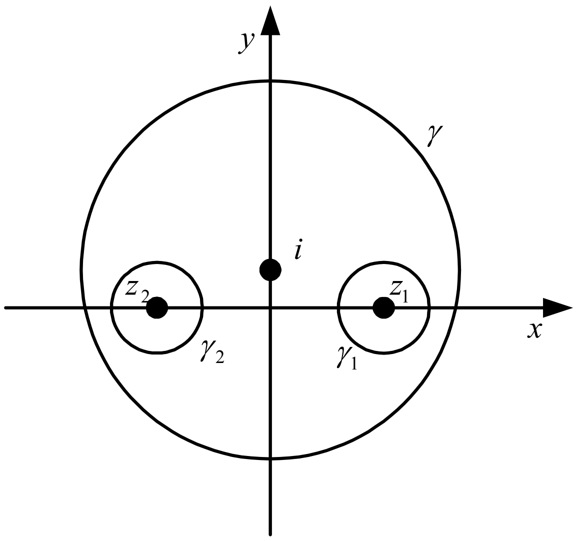
Функция $f(z)=\dfrac{e^z}{z+3}$ аналитична в круге $|z|\le 2$. Применяем интегральную формулу Коши при $z_0=-1$

$$I=2\pi i f(-1)=2\pi i\frac{e^{-1}}{-1+3}=\frac{\pi i}{e}$$

Задача 3.4. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-i|=5}\dfrac{shz\,dz}{z^2-9}$.

Решение.

Подынтегральная функция теряет аналитичность в точках $z_1=3$, $z_2=-3$ расположенных внутри контура γ: $|z-i|=5$. Непосредственно формулу Коши применять нельзя. Поэтому сначала построим окружности γ_1 и γ_2 с центрами в точках z_1 и z_2 соответственно, их радиусы выберем достаточно малыми, чтобы окружности не пересекались и лежали внутри γ. В трехсвязной области, ограниченной контурами γ, γ_1 и γ_2, и на ее границе подынтегральная функция аналитична, поэтому по теореме Коши для многосвязной области получаем:



$$I=\oint\limits_{\gamma}\frac{shz\,dz}{z^2-9}=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{shz\,dz}{z^2-9}+\oint\limits_{\gamma_2}\frac{shz\,dz}{z^2-9}=I_1+I_2$$

Далее применяем интегральную формулу Коши

$$I_1=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{shz}{z+3}}{z-3}dz=2\pi i\left.\frac{shz}{z+3}\right|_{z=3}=\frac{\pi i}{3}sh3,$$

$$I_2=\oint\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{shz}{z-3}}{z+3}dz=2\pi i\left.\frac{shz}{z-3}\right|_{z=-3}=\frac{\pi i}{3}sh3$$

Окончательно получаем $I=2\pi i\dfrac{sh3}{3}$.

Степенной ряд в комплексной области. Ряд Тейлора.

Степенной ряд в комплексной области – это ряд вида:

$$c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

Для каждого степенного ряда существует такое число R (радиус сходимости), что ряд абсолютно сходится в круге $|z-z_0|<R$ (круг сходимости) и расходится вне этого круга. Случай $R=0$ соответствует ряду, сходящемуся лишь в точке z_0, случай $R=\infty$ - сходящемуся во всей комплексной плоскости. Для нахождения круга сходимости могут быть применены признаки Даламбера и Коши.

Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-z_0|<R$, представима в этом круге своим рядом Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\quad c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ \gamma=\{z|\quad |z-z_0|=r,\quad r<R\}.$$

Ряды Маклорена (частный случай ряда Тейлора при $z_0 = 0$) для элементарных функций имеют вид:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in C$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in C$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in C$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1$$

Задача 4.1. Найти область сходимости рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n^n}$

Решение.

а) применим признак Даламбера: общий член ряда имеет вид $w_n = (-1)^{n+1} n z^n$, так что

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|z|^{n+1}}{n|z|^n} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |z|,$$

Значит, исследуемый ряд сходится абсолютно при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$, то есть $R = 1$. На границе круга сходимости, $|z| = 1$, имеем $|w_n| = n$, следовательно при $n \to \infty$, $|w_n| \to \infty$, не стремится к нулю. Значит, и w_n не стремится к нулю, то есть не выполняется необходимый признак сходимости, и ряд расходится. Итак, область сходимости данного ряда – внутренность круга сходимости.

б) Применим признак Коши $w_n = \frac{(z+i)^n}{n^n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|w_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|z+i|^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z+i|}{n} = 0, \quad 0 < 1, \quad \forall z$$

Значит, данный ряд сходится во всей комплексной плоскости.

Ряд Лорана. Классификация особых точек.

Рядом Лорана называется ряд вида $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$. Этот ряд понимается как сумма двух рядов:

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ - правильная часть ряда Лорана,

$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$ - главная часть ряда Лорана, и сходящийся тогда и только тогда, когда сходятся обе его части.

Если функция $f(z)$ аналитическая в кольце $0 \le r < |z - z_0| < R \le \infty$, то она представляется в этом кольце рядом Лорана:

$\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$, где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

$\gamma = \{ z | \quad |z - z_0| = \rho, \quad r < \rho < R \}$

Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_r(z_0) = \{ z | \quad 0 < |z - z_0| < r \}$ точки z_0, в которой $f(z)$ аналитична, а в самой точке z_0 аналитичность нарушена.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется:

- устранимой, если главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в $\overset{\circ}{U}_r(z_0)$ отсутствует;
- полюсом порядка k, если главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в $\overset{\circ}{U}_r(z_0)$ содержит конечное число (а именно k) членов (в случае $k = 1$ полюс называется простым);
- существенно особой, если главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в $\overset{\circ}{U}_r(z_0)$ содержит бесконечное число членов.

При определении характера изолированной особой точки используются следующие теоремы.

1. Для того чтобы точка z_0 являлась устранимой особой точкой аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно существование конечного предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

2. Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно существование предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

2'. Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}$, где $\varphi(z)$ - функция аналитическая в точке z_0, причём $\varphi(z_0) \ne 0$.

2''. Пусть z_0 - изолированная особая точка функции $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, где $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ - функции аналитические в точке z_0. Если числитель $\lambda(z)$ и все производные до $k-1$ порядка включительно в точке z_0 равны нулю, а $\lambda^{(k)}(z_0) \ne 0$, знаменатель $\mu(z)$ и все производные до $l-1$ порядка включительно в точке z_0 равны нулю, а $\mu^{(l)}(z_0) \ne 0$, то при $l > k$ точка z_0 является полюсом порядка $n = l - k$ аналитической функции $f(z)$. Если $l \le k$, то точка z_0 является устранимой особой точкой аналитической функции $f(z)$.

3. Пусть при $z \to z_0$ аналитическая функция $f(z)$ не имеет пределов ни конечного, ни бесконечного. Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $f(z)$.

Задача. Определить типы изолированных особых точек для функции:

а) $f(z)=\dfrac{\left(e^z-1\right)^2}{z^4(z-1)^3}$; б) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z(1-\cos z)}$; в) $f(z)=z^2\cos\dfrac{z-1}{z}$

Решение.

а) Функции $\lambda(z)=\left(e^z-1\right)^2$ и $\mu(z)=z^4(z-1)^3$ аналитичны на всей комплексной плоскости, следовательно, их частное аналитично всюду, где $\mu(z)\neq 0$, то есть особые точки функции $f(z)=\dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$ - это нули функции $\mu(z)$. Очевидно, функция $\mu(z)=z^4(z-1)^3$ имеет нули: $z_0=0$ кратности 4 и $z_1=1$ кратности 3.

Рассмотрим изолированную особую точку $z_0=0$ функции $f(z)=\dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, где $\lambda(z)=\left(e^z-1\right)^2$, а $\mu(z)=z^4(z-1)^3=z^7-3z^6+3z^5-z^4$, и применим теорему 2" для определения её типа. $\lambda(z_0)=0$, $\lambda'(z)=2\left(e^z-1\right)e^z=2e^{2z}-2e^z$, $\lambda'(z_0)=0$, $\lambda''(z)=4e^{2z}-2e^z$, $\lambda''(z_0)=2\neq 0$, следовательно $k=2$. $\mu(z_0)=0$, $\mu'(z)=7z^6-18z^5+15z^4-4z^3$, $\mu'(z_0)=0$, $\mu''(z)=42z^5-90z^4+60z^3-12z^2$, $\mu''(z_0)=0$, $\mu'''(z)=210z^4-360z^3+180z^2-24z$, $\mu'''(z_0)=0$, $\mu''''(z)=840z^3-1080z^2+360z-24$, $\mu''''(z_0)=-24\neq 0$, следовательно $l=4$. Тогда $z_0=0$ полюс порядка $l-k=4-2=2$. Изолированная особая точка $z_0=0$ является полюсом второго порядка.

Рассмотрим изолированную особую точку $z_1=1$ для функции $f(z)=\dfrac{\left(e^z-1\right)^2}{z^4(z-1)^3}=\dfrac{\varphi(z)}{(z-1)^3}$, где $\varphi(z)=\dfrac{\left(e^z-1\right)^2}{z^4}$ функция аналитическая в точке $z_1=1$, причём $\varphi(z_1)\neq 0$. Применяя теорему 2′ для определения типа изолированной особой точки, заключаем что $z_1=1$ полюс третьего порядка.

б) Функции $\lambda(z)=\sin^2 z$ и $\mu(z)=z(1-\cos z)$ аналитичны на всей комплексной плоскости, следовательно, их частное аналитично всюду, где $\mu(z)\neq 0$, то есть особые точки функции $f(z)=\dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$ - это нули функции $\mu(z)$.

$z(1-\cos z)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ \cos z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=2\pi k, \quad k\in Z \end{array}\right.$. Таким образом изолированными особыми точками функции $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z(1-\cos z)}$ являются $z_0=0$ и $z_k=2\pi k, \quad k\neq 0$.

Для точки $z_0=0$ применим теорему 2": $\lambda(z_0)=0$, $\lambda'(z)=2\sin z\cos z=\sin 2z$, $\lambda'(z_0)=0$, $\lambda''(z)=2\cos 2z$, $\lambda''(z_0)=2\neq 0$, следовательно $k=2$, $\mu(z_0)=0$, $\mu'(z)=1-\cos z-z\sin z$, $\mu'(z_0)=0$, $\mu''(z)=\sin z-(\sin z+z\cos z)=-z\cos z$, $\mu''(z_0)=0$, $\mu'''(z)=-\cos z+z\sin z$, $\mu'''(z_0)=-1\neq 0$, следовательно $l=3$. Тогда $z_0=0$ полюс порядка $l-k=3-2=1$. Изолированная особая точка $z_0=0$ является полюсом первого порядка.

Для точек $z_k=2\pi k$ применим теорему 2": $\lambda(z_k)=0$, $\lambda'(z)=2\sin z\cos z=\sin 2z$, $\lambda'(z_k)=0$, $\lambda''(z)=2\cos 2z$, $\lambda''(z_0)=2\neq 0$, следовательно $k=2$, $\mu(z_k)=0$, $\mu'(z)=1-\cos z-z\sin z$, $\mu'(z_k)=0$, $\mu''(z)=\sin z-(\sin z+z\cos z)=-z\cos z$, $\mu''(z_k)=-2\pi k\neq 0$, следовательно $l=2$. Так как $l=k$, изолированные особые точки $z_k=2\pi k$, $k=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots$ являются устранимыми особыми точками.

в) Функция $f(z)=z^2\cos\dfrac{z-1}{z}$ имеет одну изолированную особую точку $z_0=0$. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности этой точки, то есть по степеням z.

$$f(z)=z^2\cos\frac{z-1}{z}=z^2\cos\left(1-\frac{1}{z}\right)=z^2\left(\cos 1\cos\frac{1}{z}+\sin 1\sin\frac{1}{n}\right)=$$

$$=z^2\left(\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n}}+\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}}\right)=$$

$$=\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n-2}}+\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n-1}}$$

Так как ряд Лорана содержит бесконечно много отрицательных степеней, то точка $z_0=0$ существенно особая точка для $f(z)$.

Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, обозначаемое символом $res_{z_0} f(z)$ или $Выч_{z_0} f(z)$ и определяемое равенством $res_{z_0} f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma} f(z)dz$. Здесь γ - произвольный контур, на котором функция $f(z)$ аналитическая, а в области, ограниченной этим контуром, нет других особых точек функции $f(z)$, кроме z_0.

Способы вычисления вычетов.

1. Для любого типа особой точки z_0 вычет равен коэффициенту при минус первой степени в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$, то есть $res_{z_0} f(z)=c_{-1}$

2. Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

3. Вычет в полюсе порядка k находится по формуле $res_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}\left[f(z)(z-z_0)^k \right]}{dz^{k-1}}$

В частности в простом полюсе (первого порядка) формула принимает вид $res_{z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$

Если $f(z)$ может быть представлена в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, $\varphi(z_0) \neq 0$, то $res_{z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

Основная теорема Коши о вычетах: если функция $f(z)$ аналитична на границе L области D и всюду внутри этой области, за исключением конечного числа особых точек z_1, z_2, . . . , z_n то $\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} res_{z_k} f(z)$

Задача 6.1 Вычислить интеграл, используя основную теорему Коши о вычетах: а) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{shz}{z^4 + 2z^3 + z^2} dz$

б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}} - 1}{z} dz$

Решение.

а) функция $f(z) = \frac{shz}{z^4 + 2z^3 + z^2} = \frac{shz}{z^2(z+1)^2}$ имеет две изолированные особые точки $z_0 = 0$ и $z_1 = -1$. Причем обе лежат внутри контура интегрирования.

Для точки $z_1 = -1$ представим подынтегральную функцию $f(z)$ в виде: $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z+1)^2}$, где $\varphi(z) = \frac{shz}{z^2}$ аналитическая в точке $z_1 = -1$, причём $\varphi(z_1) \neq 0$. Применяя теорему 2´ для определения типа изолированной особой точки, заключаем что $z_1 = -1$ полюс второго порядка. Используем третий способ вычисления вычета в полюсе порядка $k = 2$:

$$res_{z_1} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to z_1} \frac{d\left[f(z)(z-z_1)^2 \right]}{dz} = \lim_{z \to -1} \left(\frac{shz}{z^2(z+1)^2} \cdot (z+1)^2 \right)' = \lim_{z \to -1} \left(\frac{shz}{z^2} \right)' =$$

$$\lim_{z \to -1} \left(\frac{z^2 chz - 2zshz}{z^4} \right) = \lim_{z \to -1} \frac{zchz - 2shz}{z^3} = ch1 - 2sh1$$

Для точки $z_0 = 0$ функции $f(z) = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, где $\lambda(z) = shz$, а $\mu(z) = z^4 + 2z^3 + z^2$ применим теорему 2" для определения её типа. $\lambda(z_0) = 0$, $\lambda'(z) = chz$, $\lambda'(z_0) = ch0 = 1 \neq 0$, следовательно $k = 1$.

$\mu(z_0)=0$, $\mu'(z)=4z^3+6z^2+2z$, $\mu'(z_0)=0$, $\mu''(z)=12z^2+12z+2$, следовательно $l=2$. Тогда $z_0=0$ полюс порядка $l-k=2-1=1$. Изолированная особая точка $z_0=0$ является полюсом первого порядка или простым полюсом. Используем третий способ вычисления вычета в простом полюсе: $res_{z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)=\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{shz}{z^4+2z^3+z^2}\cdot z\right)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{shz}{z^3+2z^2+z}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$=(по правилу Лопиталя)= $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(shz)'}{(z^3+2z^2+z)'}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{chz}{3z^2+6z+1}=1$

По теореме Коши о вычетах имеем:

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{shz}{z^4+2z^3+z^2}dz=2\pi i\left(res_{z_0} f(z)+res_{z_1} f(z)\right)=2\pi i(1+ch1-2sh1)$$

б) подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{z^2e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}$ внутри контура интегрирования $|z|=1$ имеет единственную изолированную особую точку $z_0=0$. По теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^2e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}dz=2\pi i\cdot res_{z_0} f(z)$$

Применим первый способ вычисления вычета $res_{z_0} f(z)=c_{-1}$, для чего разложим функцию $f(z)=\dfrac{z^2e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$, используя известное разложение $e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\ldots+\dfrac{z^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$. Имеем:

$$f(z)=\frac{z^2\left(1+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{z^2}\right)^2}{2!}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{z^2}\right)^3}{3!}+\ldots+\dfrac{\left(\dfrac{1}{z^2}\right)^n}{n!}+\ldots\right)-1}{z}=$$

$$=\frac{z^2+\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{3!z^4}+\ldots+\dfrac{1}{n!z^{2n-2}}+\ldots}{z}=z+\frac{1}{2}z^{-3}+\frac{1}{6}z^{-5}+\frac{1}{4!}z^{-7}+\ldots$$

, замечаем что в полученном разложении отсутствует член с z^{-1}, то есть коэффициент при минус первой степени $c_{-1}=0$. Таким образом $res_{z_0} f(z)=c_{-1}=0$ и значит $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}dz=2\pi i\cdot 0=0$

Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение.

Оригиналом называется функция $f(t)$ действительного переменного t, удовлетворяющая условиям:

1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном промежутке,

2) $f(t)=0$, при $t<0$,

3) $\exists M>0$ и $\exists S_0\geq 0$, что $\forall t$, $|f(t)|<M\,e^{S_0 t}$

Изображением функции $f(t)$ (по Лапласу) называется функция $F(p)$ комплексного переменного p, определяемая равенством $F(p)=\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$ и обозначаемое символом $f(t)_{\bullet}=^{\bullet} F(p)$.

Простейшей функцией-оригиналом является единичная функция Хевисайда:

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & при \quad t\geq 0,\\ 0, & при \quad t<0.\end{cases}$$

В дальнейшем для сокращения записи будем, как правило, писать $f(t)$ вместо $f(t)\cdot\eta(t)$, считая, что $f(t)=0$ при $t<0$.

Приведём основные теоремы операционного исчисления. Пусть $f(t)_{\bullet}=^{\bullet} F(p)$, $f_1(t)_{\bullet}=^{\bullet} F_1(p)$, $f_2(t)_{\bullet}=^{\bullet} F_2(p)$, ..., $f_k(t)_{\bullet}=^{\bullet} F_k(p)$.

Свойство линейности. Для любых чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$ выполняется $c_1f_1(t)+c_2f_2(t)_{\bullet}=^{\bullet} c_1F_1(p)+c_2F_2(p)$ или для случая *k* слагаемых $\sum\limits_{n=1}^{k} c_nf_n(t)_{\bullet}=^{\bullet}\sum\limits_{n=1}^{k} c_nF_n(p)$

Теорема подобия. $\forall a>0$, $f(at)_{\bullet}=^{\bullet}\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{p}{a}\right)$

Теорема смещения. Умножению оригинала на $e^{\alpha t}$ соответствует запаздывание изображения на α, то есть $e^{\alpha t}f(t)_{\bullet}=^{\bullet} F(p-\alpha)$, где α - некоторая комплексная константа.

Теорема запаздывания. Запаздыванию оригинала на $\tau>0$ соответствует умножение изображения на e^{-pt}, то есть $f(t-\tau)_{\bullet}=^{\bullet} e^{-pt}F(p)$

Теорема о дифференцировании оригинала. Если $f(t)$ и её производные $f^{(k)}(t)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ являются оригиналами, то для любого $k=1, 2, \ldots, n$ выполняется:

$$f^{(k)}(t)_{\bullet}=^{\bullet} p^kF(p)-p^{k-1}f(0)-p^{k-2}f'(0)-\ldots-pf^{(k-2)}(0)-f^{(k-1)}(0)$$

В частности при $k=1$: $f'(t)_{\bullet}=^{\bullet} pF(p)-f(0)$

Дифференцирование изображения. $F'(p)^{\bullet}=_{\bullet} -t\cdot f(t)$, в общем случае $F^{(k)}(p)^{\bullet}=_{\bullet}(-t)^k\cdot f(t)$

При нахождении изображений обычно пользуются свойствами преобразования Лапласа и таблицей основных изображений:

1) $\eta(t)\underset{\bullet}{=}^{\bullet}\dfrac{1}{p}$

2) $t^n\underset{\bullet}{=}^{\bullet}\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

3) $e^{at}\underset{\bullet}{=}^{\bullet}\dfrac{1}{p-a}$

4) $\sin\omega t\underset{\bullet}{=}^{\bullet}\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

5) $\cos\omega t\underset{\bullet}{=}^{\bullet}\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

6) $sh\,\omega t\underset{\bullet}{=}^{\bullet}\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$

7) $ch\,\omega t\underset{\bullet}{=}^{\bullet}\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$

Задача 7.1. Найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t)=2+\cos 3t\cdot sh2t$, б) $f(t)=t\cos^2 t+3t\eta(t-2)$

Решение.

а) по свойству линейности изображение для $f(t)$ равно сумме изображений для функций $f_1(t)=2$ и $f_2(t)=\cos 3t\cdot sh2t$. Найдём эти изображения.

Так как $f_1(t)=2=2\cdot\eta(t)$, а $\eta(t)\underset{\bullet}{=}^{\bullet}\dfrac{1}{p}$, то $2\underset{\bullet}{=}^{\bullet}\dfrac{2}{p}$.

$$f_2(t)=\cos 3t\cdot sh2t=\cos 3t\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}=\frac{1}{2}\cos 3t\cdot e^{2t}-\frac{1}{2}\cos 3t\cdot e^{-2t}$$

Так как $\cos 3t\underset{\bullet}{=}^{\bullet}\dfrac{p}{p^2+9}$ (табличное изображение), то пользуясь свойствами линейности и смещения, получаем:

$$\frac{1}{2}\cos 3t\cdot e^{2t}-\frac{1}{2}\cos 3t\cdot e^{-2t}\underset{\bullet}{=}^{\bullet}\frac{1}{2}\frac{p-2}{(p-2)^2+9}-\frac{1}{2}\frac{p+2}{(p+2)^2+9}.$$

Окончательно имеем:

$$f(t)=2+\cos 3t\cdot sh2t\underset{\bullet}{=}^{\bullet}\frac{2}{p}+\frac{1}{2}\frac{p-2}{(p-2)^2+9}-\frac{1}{2}\frac{p+2}{(p+2)^2+9}$$

б) находим изображения слагаемых. Для $f_1(t)=t\cos^2 t$ можно найти изображение по теореме смещения, выразив косинус через экспоненту. Но проще воспользоваться дифференцированием изображения:

$$F'(p)\overset{\bullet}{=}_{\bullet}-t\cdot f(t)\quad\Leftrightarrow\quad t\cdot f(t)\underset{\bullet}{=}^{\bullet}-F'(p)$$

$$\cos^2 t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\underset{\bullet}{=}^{\bullet}\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}$$

$$t\cos^2 t\underset{\bullet}{=}^{\bullet}-\left(\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}\right)'=\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{2}\frac{p^2-4}{\left(p^2+4\right)^2}$$

При нахождении изображения функции $f_2(t)=3t\cdot\eta(t-2)$ воспользуемся теоремой запаздывания, для чего преобразуем $f_2(t)$ так, чтобы переменная t входила в выражение для $f_2(t)$ всюду с «опозданием» на $\tau=2$:

$$f_2(t)=(3(t-3)+6)\eta(t-2)=3(t-2)\eta(t-2)+6\eta(t-2)$$

Теперь по свойствам линейности и запаздывания, с учётом табличных изображений $t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$ и $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$ имеем:

$$f_2(t) \risingdotseq \frac{3}{p^2}e^{-2p} + \frac{6}{p}e^{-2p}$$

Итак $f(t) = t\cos^2 t + 3t\eta(t-2) \risingdotseq \dfrac{1}{2p^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{p^2-4}{\left(p^2+4\right)^2} + \dfrac{3}{p^2}e^{-2p} + \dfrac{6}{p}e^{-2p}$.

Если функция-оригинал $f(t)$ задана кусочно-аналитически, то её предварительно записывают одним аналитическим выражением «склеивают» с помощью функции Хевисайда $\eta(t)$.

Например, пусть

$$f(t) = \begin{cases} 0, & при \quad t < \tau_1 \\ f_1(t), & при \quad \tau_1 \le t < \tau_2 \\ f_2(t), & при \quad t \ge \tau_2 \end{cases}$$

Так как разность $\eta(t-\tau_1) - \eta(t-\tau_2)$ равна 1 на $t \in [\tau_1; \tau_2)$ и равна нулю вне этого промежутка при $t \notin [\tau_1; \tau_2)$, а $\eta(t-\tau_2)$ равно нулю при $t < \tau_2$ и равно 1 при $t \ge \tau_2$, то $f(t) = f_1(t)[\eta(t-\tau_1) - \eta(t-\tau_2)] + f_2(t)\eta(t-\tau_2)$

В простейших случаях оригинал по известному изображению находится с помощью всё той же таблицы преобразования Лапласа и свойств.

Например:

$$F(p) = \frac{p-3}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{p^2+4} \fallingdotseq \cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t$$

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2-4p+5} = \frac{p+1}{(p-2)^2+1} = \frac{p-2+3}{(p-2)^2+1} = \frac{p-2}{(p-2)^2+1} + \frac{3}{(p-2)^2+1} \fallingdotseq$$

$$\fallingdotseq \cos t \cdot e^{2t} + 3\sin t \cdot e^{2t}$$

$$F(p) = \frac{2}{t^3}e^{-p} \fallingdotseq (t-1)^2\eta(t-1)$$

Пусть $F(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$ правильная рациональная дробь. Для нахождения оригинала в общем случае обычно используют либо разложение $F(p)$ на сумму простейших дробей, либо так называемую теорему разложения Хевисайда:

$$f(t) \risingdotseq \sum_{k=1}^{n} res_{p_k} F(p)e^{pt}$$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ все полюсы функции $F(p)$.

В частности, если все полюсы простые и дробь $F(p)$ несократима, то $f(t) \risingdotseq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}e^{p_k t}$

Свёртка функций. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ некоторые функции. Свёрткой функций $f_1(t) * f_2(t)$ называется интеграл:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(t)\, d\tau$$

Теорема умножения изображений. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ функции-оригиналы и $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$. Тогда свёртке оригиналов соответствует произведение изображений $f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq F_1(p) \cdot F_1(p)$.

Укажем другой способ отыскания оригинала, основанный на теореме умножения изображений.

$$F(p) = \frac{1}{p^2-1} \cdot \frac{1}{p^2-1} \fallingdotseq sht * sht = \int_0^t sh\tau\, sh(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{2} \cdot \frac{e^{t-\tau}-e^{-t+\tau}}{2} d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \left(e^t - e^{t-2\tau} - e^{-t+2\tau} + e^{-t}\right) d\tau = \frac{1}{4}\left(e^t\tau + \frac{1}{2}e^{t-2\tau} - \frac{1}{2}e^{-t+2\tau} + e^{-t}\tau\right)\Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{1}{4}\left[t\left(e^t + e^{-t}\right) - \left(e^t - e^{-t}\right)\right] = \frac{1}{2}(tcht - sht).$$

Решение линейных дифференциальных уравнений и систем операторным методом.

Операционный метод решения дифференциальных уравнений заключается в следующем:

1. Искомая функция $y(t)$, её производные и правая часть уравнения заменяются их изображениями.

2. Полученное уравнение, называется операторным, решается относительно изображения $Y(p)$ искомой функции $y(t)$.

3. От изображения $Y(p)$ переходят к его оригиналу $y(t)$, который и является решением исходного уравнения.

Задача 8.1. Решить задачу Коши операционным методом: $y'' + 2y' + y = \sin t,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = -1$

Решение.

Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$, тогда $y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p)$, $y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) + 1$, $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$.

Подставив в исходное уравнение, получим операторное уравнение:

$$p^2Y(p) + 1 + 2pY(p) + Y(p) = \frac{1}{p^2+1} \Leftrightarrow \left(p^2+2p+1\right)Y(p) = \frac{1}{p^2+1} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(p) = -\frac{p^2}{\left(p^2+1\right)(p+1)^2}.$$

Оригинал для этой функции-изображения $Y(p)$ найден в задаче 7.3(а). (с поправкой на знак минус), а именно: $Y(p) \fallingdotseq -\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}t \cdot e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t}$. Таким образом решением задачи Коши является функция $y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - te^{-t} - \cos t\right)$.

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»
в г. Смоленске

Методические рекомендации к практическим занятиям по дисциплине

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

(НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ)

Смоленск – 2019 г.

1. Цели и задачи, объем практических занятий по дисциплине

Цель практических занятий по дисциплине «Высшая математика» – закрепление лекционного материала дисциплины, обучение студентов практической стороне компетенций, закрепленных за дисциплиной.

Для достижения поставленной цели на практических занятиях решаются следующие задачи:

- разработки структурных, содержательных и функциональных математических моделей их важнейших элементов;
- синтеза математических моделей, соответствующих разработанным структурным и функциональным.

Объем практических занятий - в соответствии с рабочей программой дисциплины «Высшая математика».

2. Задания на практические занятия по дисциплине

Практические занятия по дисциплине проводятся по следующим основным темам:

Тема 1. Матрицы и определители. Практические занятия №1-2.

Задание 1. Даны матрицы $\boldsymbol{A, B, C}$.

<u>Найти</u> определитель матрицы $|A|$.

<u>Вычислить</u> результирующую матрицу $A \cdot B^T - 2 \cdot C$.

Образец решения задания.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

Вычислим определитель матрицы A. разложением по первой строке:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 0 + 0 + (2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) = -1.$$

Произведем действия над матрицами с учетом свойств матриц

$$A \cdot B^T - 2 \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

После транспонирования матрицы B имеем выражение

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получим

$$\begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) & -2 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Складывая соответствующие элементы двух полученных матриц, видим, что

$$A \cdot B^T - 2 \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -4 \\ 3 & 4 & 10 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -7 & -2 \\ 3 & 2 & 12 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тема 2. **Системы линейных уравнений. Практические занятия №3-4.**

Задание 2. Решить методом Гаусса и как матричное уравнение систему линейных уравнений.

Суть метода Гаусса состоит в том, что при помощи преобразований, не нарушающих равносильности, исходная система сводится к треугольному виду.

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3=b_1\\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3=b_2\\ a_{31}\cdot x_1+a_{32}\cdot x_2+a_{33}\cdot x_3=b_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde a_{11}\cdot x_1+\tilde a_{12}\cdot x_2+\tilde a_{13}\cdot x_3=\tilde b_1\\ 0+\tilde a_{22}\cdot x_2+\tilde a_{23}\cdot x_3=\tilde b_2\\ \mathbf{0}+\mathbf{0}+\tilde a_{33}\cdot x_3=\tilde b_3\end{cases}$$

При решении систем методом исключения Гаусса вначале составим расширенную матрицу системы уравнений.

$$A_p=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3\end{pmatrix}.$$

Преобразуем при помощи метода исключения Гаусса к диагональному виду, составляя линейные комбинации строк, чтобы получить нулевые элементы ниже главной диагонали

__Шаг 1__

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}}\\ 0 & a_{22}-\frac{a_{12}}{a_{11}}\cdot a_{21} & a_{23}-\frac{a_{13}}{a_{11}}\cdot a_{21} & b_2-\frac{b_1}{a_{11}}\cdot a_{21}\\ 0 & a_{32}-\frac{a_{12}}{a_{11}}\cdot a_{31} & a_{33}-\frac{a_{13}}{a_{11}}\cdot a_{31} & b_3-\frac{b_1}{a_{11}}\cdot a_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1\\ 0 & \hat a_{22} & \hat a_{23} & \hat b_2\\ 0 & \hat a_{32} & \hat a_{33} & \hat b_3\end{pmatrix}.$$

__Шаг 2__

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}}\\ 0 & 1 & \frac{\hat a_{13}}{\hat a_{21}} & \frac{\hat b_1}{\hat a_{21}}\\ 0 & 0 & \hat a_{33}-\frac{\hat a_{13}}{\hat a_{21}}\cdot \hat a_{32} & \hat b_3-\frac{\hat b_1}{\hat a_{21}}\cdot \hat a_{32}\end{pmatrix}$$

Переход к равносильной треугольной системе называют прямым ходом метода Гаусса. Выражая из треугольной системы $x_3=-\frac{\tilde b_3}{\tilde a_{33}}$, затем $x_2=\frac{1}{\tilde a_{22}}\cdot(\tilde b_2-\tilde a_{23}\cdot\tilde x_3)$, затем $x_1=\frac{1}{\tilde a_{11}}\cdot(\tilde b_1-\tilde a_{12}\cdot\tilde x_2-\tilde a_{13}\cdot\tilde x_3)$, то есть, выполняя обратный ход метода Гаусса, легко находим решение системы.

Равносильные преобразования в методе Гаусса - это линейные комбинации строк матрицы.

Для иллюстрации метода Гаусса рассмотрим примеры.

Пример:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3+x_4=1\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=2\\ x_1+2x_2-3x_3+2x_4=4\\ 2x_1-2x_2+3x_4+4x_4=0.\end{cases}$$

__Шаг 1:__ Делим коэффициенты первого уравнения на коэффициент $a_{11}\neq 0$, при этом получается равносильная система уравнений.

$$\begin{cases} x_1-{}^3\!/_2x_2+2x_3+{}^1\!/_2x_4={}^1\!/_2\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=2\\ x_1+2x_2-3x_3+2x_4=4\\ 2x_1-2x_2+3x_4+4x_4=0.\end{cases}$$

Шаг 2: На месте 2 и 3 уравнений поставим сумму 1-го уравнения, умноженного на (-1), и 2,3- уравнений. На месте 4-го уравнения сумму 1-ой строки, умноженную на (-2), и 4-ой строки. Для краткости записей воспользуемся понятием расширенной матрицы и эквивалентных преобразований

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3/2 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3/2 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & +1/2 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 7/2 & -5 & +3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim$$

Т. к. во 2, 3, 4 уравнениях неизвестное x_1 - исключено, то применим схему приведенную выше для исключения неизвестных в системе, состоящей из 2, 3, 4 уравнений. Для этого вторую строку разделим на 1/2, на месте 3, поставим сумму элементов 2 строки, умноженную на (-7/2), и 3-й строки на месте 4-ой строки сумму элементов 2 строки умноженную на (-1) и 4 строки.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3/2 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -4 \end{array}\right) \sim$$

Исключая неизвестные в 3 и 4 уравнениях по той же схеме завершим прямой ход метода Гаусса.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3/2 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -12/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 & +18/5 & -13/5 \end{array}\right)$$

Используя обратный ход метода Гаусса, имеем:

$$x_4 = -\frac{13}{18},$$
$$x_3 = \frac{7}{5} - \frac{12}{5}\cdot\frac{13}{18} = -\frac{1}{3}$$
$$x_2 = 3 - 3\cdot\frac{13}{18} = \frac{5}{6}$$
$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{13}{36} = \frac{25}{9}.$$

Если матрица А невырождена ($|A| \neq 0$), то для нее существует обратная матрица, обозначаемая A^{-1} , такая, что $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица. Используя это свойство, можно решить матричное уравнение так:

$A\cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \Leftrightarrow E\cdot X = A^{-1}\cdot B$,

т.е.

$$X = A^{-1}\cdot B$$

В том случае, когда матричное уравнение имеет вид $A\,X\cdot C = B$, то схема решения такова:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot C\cdot C^{-1} = A^{-1}\cdot B\cdot C^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}\cdot B\cdot C^{-1}$$

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\cdot X = B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}\cdot B;\ A^{-1} = \frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

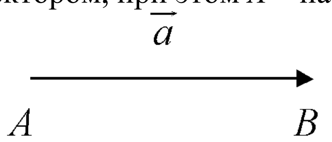
$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Тема 3. **Аналитическая геометрия. Практические занятия №5-6**

Векторы. Линейные операции над векторами

Пусть AB – отрезок. Зададим на нем направление от точки A к точке B. Такой отрезок называется **направленным** и обозначается $\overrightarrow{AB}$.

Вектором (геометрическим вектором) $\vec{a}$ называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление. Всякий направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ из этого множества также принято называть вектором, при этом A – начало вектора, B – конец вектора.



Обозначается вектор символами $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Длиной (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым вектором** и обозначается $\vec{0}$. (Нулевой вектор изображается точкой и определенного направления не имеет).

Два вектора называются **равными**, если они одинаково направлены и имеют одинаковые длины, т.е. два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются равными ($\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$), если они представляют один и тот же вектор $\vec{a}$.

Под **линейными операциями** над векторами понимают операции сложения и вычитания вектора, а также умножение вектора на число.

Пусть направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ представляет вектор $\vec{a}$. Приложив к точке B заданный вектор $\vec{b}$, получим некоторый направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$.

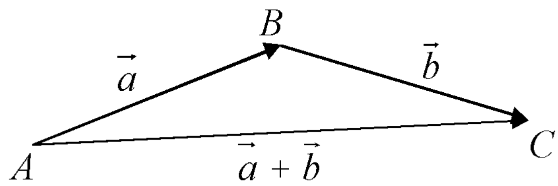


Рис. 1

Вектор, представляемый направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 1).

Это правило сложения векторов называют **правилом треугольника**.

Операция сложения может быть распространена на любое число слагаемых векторов (рис. 2).

Сумму двух векторов можно построить также по **правилу параллелограмма** (рис. 3).

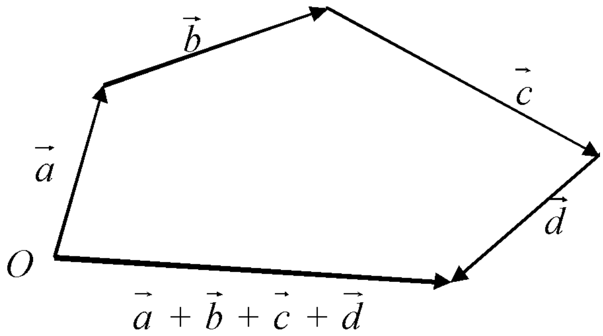


Рис. 2
(правило многоугольника)

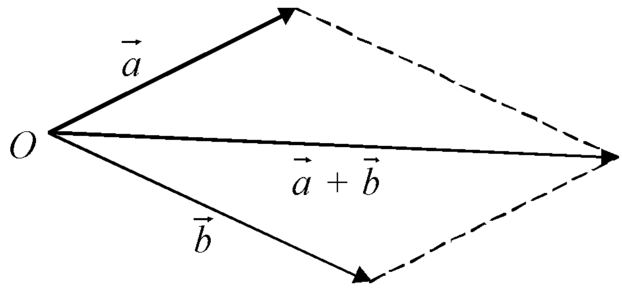


Рис. 3

Разностью векторов $\vec a$ и $\vec b$ называют вектор $\vec c = \vec a - \vec b$, для которого $\vec b + \vec c = \vec a$ (рис. 4).

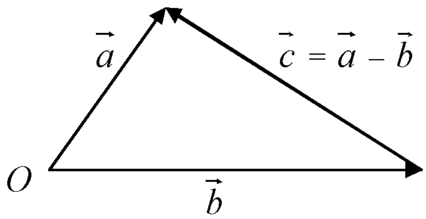


Рис. 4

Произведением вектора $\vec a$ **на действительное число** $\lambda \neq 0$ называется вектор, обозначаемый $\lambda \vec a$, такой, что:

1) $|\lambda \vec a| = |\lambda| \cdot |\vec a|$

2) векторы $\vec a$ и $\lambda \vec a$ сонаправлены при $\lambda > 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

По определению для любого вектора $\vec a$ имеем $\vec 0 \cdot \vec a = \vec 0$.

Например, если дан вектор $\vec a$, то векторы $2\vec a$ и $-3\vec a$ будут иметь вид (рис 5).

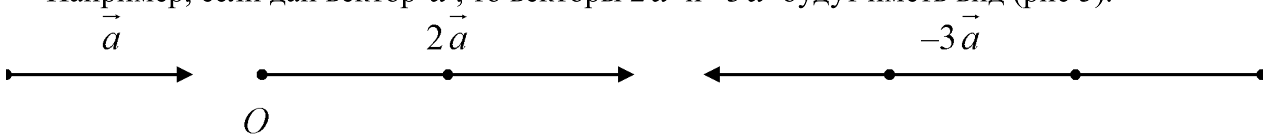


Рис. 5

Базис и координаты вектора

Компланарные векторы – три или более векторов, лежащих в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ называется **базисом** в множестве всех геометрических векторов.

Всякий геометрический вектор $\vec a$ может быть единственным образом представлен в виде:

$$\vec a = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + x_3 \vec{e_3}; \qquad (1)$$

при этом коэффициенты разложения, т.е. числа x_1, x_2, x_3 называются **координатами вектора** $\vec a$ **в базисе** $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

Запись (1) называют **разложением вектора** $\vec a$ **по базису** B. (Разложением вектора $\vec a$ по векторам $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$).

В частности, если векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$ попарно перпендикулярны и имеют единичную длину, то **базис называется ортонормированным** (прямоугольным) и в этом случае приняты обозначения:

$$\vec{e_1} = \vec i, \ \vec{e_2} = \vec j, \ \vec{e_3} = \vec k.$$

Формула (1) принимает вид:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k},$$

а координаты x_1, x_2, x_3 вектора $\vec{a}$ в прямоугольном базисе совпадают с проекциями вектора $\vec{a}$ на **базисные орты** $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ **соответственно**.

Таким образом, координатам вектора $\vec{a}$ в прямоугольной декартовой системе координат *OXYZ* (рис. 6) являются проекции вектора $\vec{a}$ на соответствующие координатные оси.

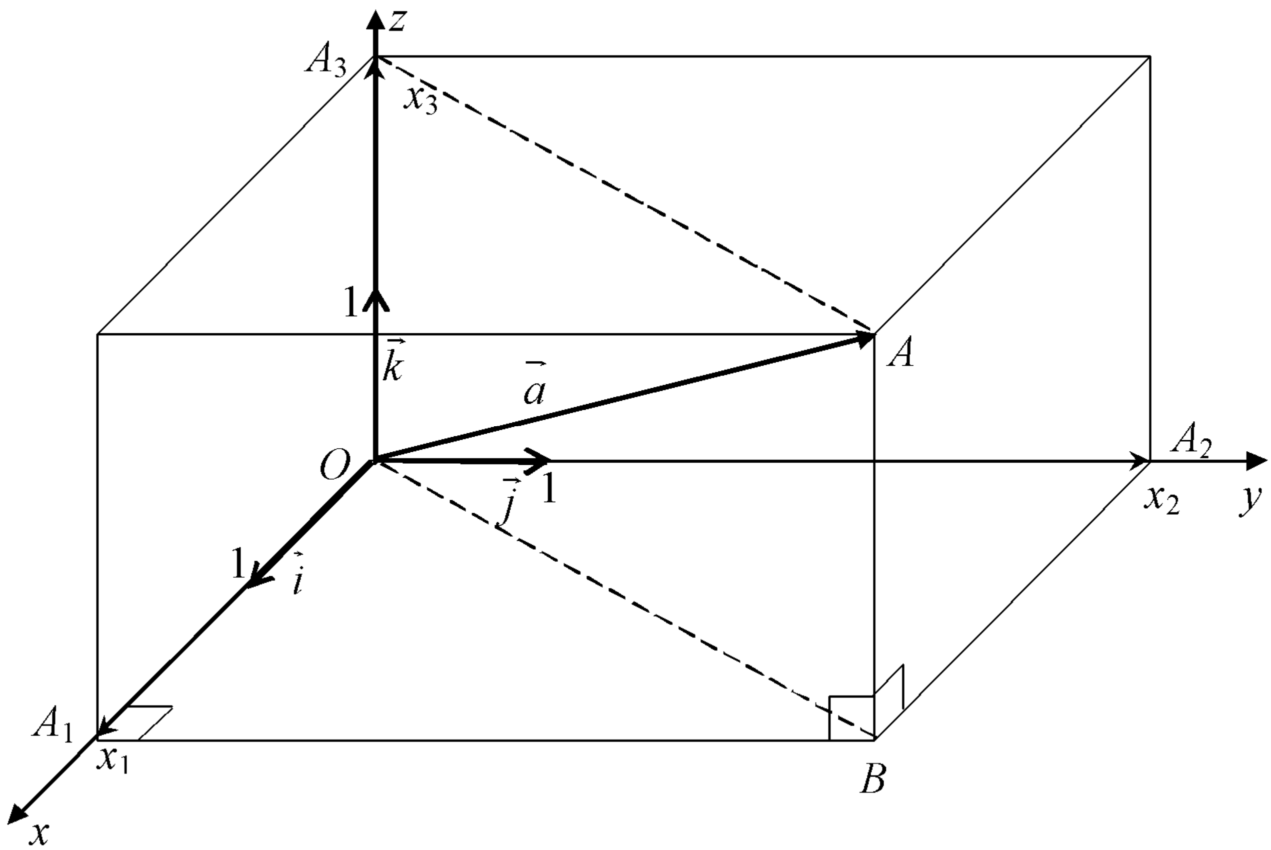


Рис. 6

Из прямоугольного параллелепипеда (рис. 6) имеем:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}.$$

Так как

$$\overrightarrow{OA_1} = |OA_1|\cdot\vec{i} = x_1\cdot\vec{i},$$
$$\overrightarrow{OA_2} = |OA_2|\cdot\vec{j} = x_2\cdot\vec{j},$$
$$\overrightarrow{OA_3} = |OA_3|\cdot\vec{k} = x_3\cdot\vec{k},$$

то

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}.$$

Это векторное равенство часто записывают в символическом виде

$$\vec{a} = (x_1, x_2, x_3).$$

Запись $\vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$ означает, что координаты вектора $\vec{b}$ равны y_1, y_2, y_3, т.е. $\vec{b} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$.

Для любых векторов $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$ имеют место следующие утверждения:
а). Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты,

т.е.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}. \quad (2)$$

б). При сложении (вычитании) векторов, их соответствующие координаты складываются (вычитаются), т.е.

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3). \quad (3)$$

в). При умножении вектора на число, все его координаты умножаются на это число, т.е.

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3). \quad (4)$$

г). **Длина вектора** $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$ вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (5)$$

Определение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) – **сонаправленные векторы**, или противоположно ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$) – **противоположнонаправленные векторы**. (Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору).

Условия коллинеарности векторов:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b} \quad \text{– в векторной форме} \quad (6)$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} \quad \text{– в координатной форме} \quad (7)$$

Замечание: Если в прямоугольной декартовой системе координат известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ равны разностям соответствующих координат его конца и начала:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad (8)$$

а расстояние от точки A до точки B:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (9)$$

Пример 1.

На оси OX найти точку, равноудаленную от точек $A(2; -4; 5)$ и $B(-3; 2; 7)$.

Решение.

Пусть M – искомая точка. Для нее должно выполняться равенство $|AM| = |MB|$. Так как это точка лежит на оси OX, то ее координаты $(x; 0; 0)$, а потому имеем (см. формулу 9):

$$|AM| = \sqrt{(x-2)^2 + (0+4)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 41},$$

$$|MB| = \sqrt{(-3-x)^2 + (0-2)^2 + (0-7)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + 53},$$

значит $\sqrt{(x-2)^2 + 41} = \sqrt{(x+3)^2 + 53}$. Отсюда, после возведения в квадрат, получаем:

$(x-2)^2 + 41 = (x+3)^2 + 53$ или $10x = -17$, т.е. $x = -1{,}7$.

Таким образом, искомая точка: $M(-1{,}7; 0; 0)$.

Пример 2.

Написать разложение вектора $\vec{x}$ = (2; 7; 5) по векторам $\vec{p}$ = (1; 0; 1)

$\vec{q}$ = (1; –2; 0)

$\vec{r}$ = (0; 3; 1).

Решение.

Разложить вектор $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ – значит представить его в виде (см. формулу 1):

$$\vec{x} = x_1\vec{p} + x_2\vec{q} + x_3\vec{r},$$

где $x_1, x_2, x_3 \in R$.

Имеем:

$$(2; 7; 5) = x_1(1; 0; 1) + x_2(1; -2; 0) + x_3(0; 3; 1).$$

Используя утверждения (3) и (4), получаем:

$$(2; 7; 5) = (x_1 + x_2; -2x_2 + 3x_3; x_1 + x_3).$$

Из условия равенства двух векторов (2) получаем систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ -2x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + x_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 - x_1 \\ x_3 = 5 - x_1 \\ -2(2 - x_1) + 3(5 - x_1) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 + 2x_1 + 15 - 3x_1 = 7 \\ x_2 = 2 - x_1 \\ x_3 = 5 - x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

Следовательно, искомое разложение имеет вид:

$$\vec{x} = 4\vec{p} - 2\vec{q} + 1\vec{r}.$$

Замечание: полученную систему линейных уравнений можно решать любым известным способом: методом подстановки, методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса), по формулам Крамера (используя теорию определителей).

Пример 3.

Коллинеарны ли векторы $\vec{c_1} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$, $\vec{c_2} = 9\vec{b} - \vec{a}$, если $\vec{a}$ = (2; 0; 5), $\vec{b}$ = (-1; 2; 7)?

Решение.

Так как $\vec{c_1} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$, то используя утверждения (3) и (4) получим:

$$\vec{c_1} = (2\cdot2 - 5\cdot(-1);\ 2\cdot0 - 5\cdot2;\ 2\cdot(-5) - 5\cdot7), \text{ т.е. } \vec{c_1} = (9; -10; -45).$$

Аналогично:

$$\vec{c_2} = 9\vec{b} - \vec{a} = (-11; 18; 68).$$

Так как

$$\frac{9}{-11} \neq \frac{-10}{18} \neq \frac{-45}{68},$$

то, учитывая условие коллинеарности двух векторов в координатной форме (7), получаем, что векторы $\vec{c_1}$ и $\vec{c_2}$ не коллинеарны.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi. \tag{10}$$

По определению для любого вектора $\vec{a}$ $(\vec{0}\cdot\vec{a}) = (\vec{a}\cdot\vec{0}) = 0$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ представлены своими координатами $\vec{a} = (x_1; x_2; x_3)$
$\vec{b} = (y_1; y_2; y_3)$,
то скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \tag{11}$$

Из этих формул, в частности, следует формула для определения косинуса угла между векторами:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\cdot\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}. \tag{12}$$

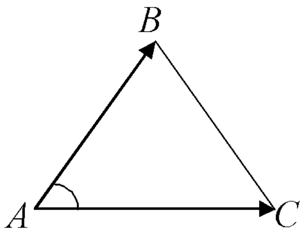
Пример 4.

Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(1; 2; -3)$, $B(0; 1; 2)$, $C(2; 1; 1)$. Найти длины сторон AB, AC, и угол $\hat{A}$.

Решение.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ по формуле (8):

$\overrightarrow{AB} = (0 - 1; 1 - 2; 2 + 3) = (-1; -1; 5)$



$\overrightarrow{AC} = (2 - 1; 1 - 2; 1 + 3) = (1; -1; 4)$

по формуле (5)

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

По формуле (12) для косинуса угла между двумя векторами находим:

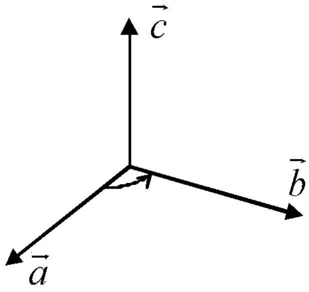
$$\cos\hat{A} = \frac{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 5\cdot 4}{3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{20}{9\sqrt{6}},$$

откуда

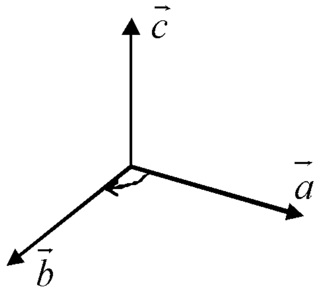
$$\hat{A} = \arccos\frac{20}{9\sqrt{6}}.$$

Векторное произведение векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется **правой**, если из конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ в виде совершающимся против часовой стрелки и левой – если по часовой.



– правая тройка



– левая тройка

Тройки компланарных векторов не относятся ни к правым, ни к левым.

Векторным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, определяемый тремя условиями:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, где φ– угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$.

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку (если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны).

Векторное произведение обозначается: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ или $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$.

Для $\vec{a}\parallel\vec{b}$ по определению $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}=\vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$.

Алгебраические свойства векторного произведения:

а) $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ – антипереместительное свойство; (13)

б) $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$ – сочетательное свойство по отношению к скалярному множителю $\lambda\in R$; (14)

в) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$ – распределительное свойство. (15)

Геометрические свойства векторного произведения:

а) два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т.е.

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow[\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}; \tag{16}$$

б) модуль векторного произведения $[\vec{a},\vec{b}]$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т.е.

$$|[\vec{a},\vec{b}]|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi=S_{\square}, \text{ где } \varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) \tag{17}$$

(а тогда площадь треугольника $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}S_{\square}=\dfrac{1}{2}|[\vec{a},\vec{b}]|$).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в прямоугольном базисе $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\vec{a}=(x_1;x_2;x_3),\ \vec{b}=(y_1;y_2;y_3),$$

то векторное произведение находят по формуле в символической записи:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}. \tag{18}$$

<u>**Пример 5.**</u>

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}-$

$2\vec{q}$, где $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Решение.

Найдем векторное произведение вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$, применяя алгебраические свойства (13–15):

$$[\vec{a},\vec{b}] = [2\vec{p} + 3\vec{q},\ \vec{p} - 2\vec{q}] = 2[\vec{p},\vec{p}] + 3[\vec{q},\vec{p}] - 4[\vec{p},\vec{q}] - 6[\vec{q},\vec{q}] =$$
$$= 2\cdot\vec{0} + 3[\vec{q},\vec{p}] + 4[\vec{q},\vec{p}] - 6\cdot\vec{0} = 7[\vec{q},\vec{p}].$$

(поскольку $[\vec{p},\vec{p}] = \vec{0}$, $[\vec{q},\vec{q}] = \vec{0}$, $[\vec{p},\vec{q}] = -[\vec{q},\vec{p}]$)

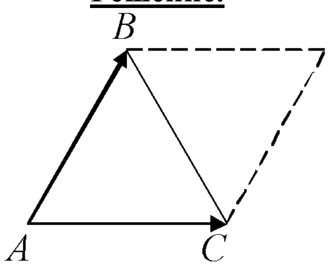
Так как площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения (17), то

$$S = |7[\vec{q},\vec{p}]| = 7|[\vec{q},\vec{p}]| = 7\cdot|\vec{q}|\cdot|\vec{p}|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{q},\vec{p}}\right) = 7\cdot1\cdot2\cdot\sin\frac{5\pi}{6} = 14\cdot\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= 14\cdot\frac{1}{2} = 7 \text{ (кв. ед.)}$$

Пример 6.

Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 4)$, $C(4;\ 3;\ 2)$.

Решение.



Находим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: (см. формулу 8)

$\overrightarrow{AB} = (2 - 1;\ 3 - 1;\ 4 - 1) = (1;\ 2;\ 3)$,

$\overrightarrow{AC} = (4 - 1;\ 3 - 1;\ 2 - 1) = (3;\ 2;\ 1)$.

Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, поэтому находим векторное произведение по формуле (18) (см. разложение определителя по элементам первой строки).

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Следовательно

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2}\text{mod}(-4;\ 8;\ -4)^{\ddagger} = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 8^2 + (-4)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{96} = 2\sqrt{6} \text{ (кв. ед.)}.$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $[\vec{a},\vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$, т.е.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = ([\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c})$$

‡ см. формулу 5

Смешанное произведение трех некопланарных векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком "плюс", если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком "минус", если они образуют левую тройку.

Таким образом:

$$V_{п\text{-}да} = |(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})|. \qquad (19)$$

Для того, чтобы три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = 0. \qquad (20)$$

Если векторы заданы своими координатами в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{a} = (x_1; x_2; x_3);$$
$$\vec{b} = (y_1; y_2; y_3);$$
$$\vec{c} = (z_1; z_2; z_3),$$

то

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad (21)$$

т.е. смешанное произведение трех векторов равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов.

Пример 7.

Компланарны ли векторы $\vec{a} = (3; 7; 2)$, $\vec{b} = (-2; 0; 1)$, $\vec{c} = (2; 1; 2)$?

Решение.

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения (см. формулу 20). Найдем смешанное произведение векторов (по формуле 21):

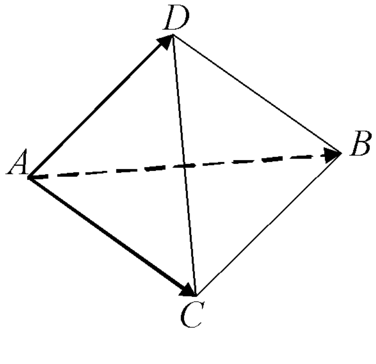
$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 42 - 4 = 35.$$

Так как $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = 35 \neq 0$, то заданные векторы некомпланарны.

Пример 8.

Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(1; 1; 1)$, $B(4; 4; 4)$, $C(3; 5; 5)$, $D(2; 4; 7)$ и его высоту, опущенную из вершины D на грань ABC.

Решение.



Как известно из элементарной геометрии, объем V_T тетраэдра $ABCD$ равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Отсюда из утверждения (19) заключаем, что V_T равняется одной шестой модуля смешанного произведения $(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD})$. Остается подсчитать это смешанное произведение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ (по формуле 8):

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1; 4 - 1; 4 - 1) = (3; 3; 3)$$
$$\overrightarrow{AC} = (3 - 1; 5 - 1; 5 - 1) = (2; 4; 4)$$

$\overrightarrow{AD}$ = (2 – 1; 4 – 1; 7 – 1) = (1; 3; 6)

Применяя формулу (21), получим:

$$(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

Отсюда

$$V_T = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD})| = 3 \text{ (куб. ед.)}.$$

С другой стороны, объем тетраэдра вычисляется по формуле:

$$V_T = \frac{1}{3}S_{осн}h,$$

откуда высоту можно вычислить по формуле:

$$h = \frac{3V_T}{S_{осн}}.$$

В данной задаче основанием пирамиды является ΔABC, поэтому:

$$h = \frac{3V_T}{S_{\Delta ABC}}.$$

Аналогично задаче 6 имеем:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

Так как

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k},$$

то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{mod}(0; -6; 6) = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + (-6)^2 + 6^2} = \frac{1}{2}\sqrt{72} = 3\sqrt{2},$$

значит

$$h = \frac{3V_T}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3\cdot 3}{3\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ (ед.)}.$$

Тема 4. Теория пределов. Практические занятия 7-8.

При нахождении пределов функции пользуются следующими свойствами пределов и теоремами:

1).Предел константы равен самой константе.

$\lim\limits_{x\to x_0} k = k.$

2). Если существует (∃) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ (конечный), ∃ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ (конечный), то:

- предел суммы (разности) этих функций $x \to x_0$ существует и равен сумме (разности) пределов

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x);$

- предел произведения существует и равен произведению пределов

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x);$

- предел частного функций существует и равен частному пределов

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, B≠0.

3). Пределы основных элементарных функций равны значениям этих функций в точке, где ищется предел. Например

$\lim\limits_{x->x_0} x^a=(x_0)^a$, $\lim\limits_{x->x_0} a^x=(a)^{x_0}$, $\lim\limits_{x->x_0}\ln(x)=\ln(x_0)$,

$\lim\limits_{x->x_0}\sin(x)=\sin(x_0).$

При нахождении пределов нельзя пользоваться рассмотренными выше свойствами, если:

1) $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to 0$, при $x\to x_0$ и ищется предел вида $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. В этом случае говорят о наличии неопределенности вида ноль делить на ноль $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

2) $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to\infty$, при $x\to x_0$, то о пределе вида $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\{0\cdot\infty\}$, говорят как об имеющем неопределенность ноль умножить на бесконечность.

3) $f(x)\to +\infty$, $\varphi(x)\to +\infty$, при $x\to x_0$, то говорят, что $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-\varphi(x)\right]=\{\infty-\infty\}$ имеет неопределенность вида $\{\infty-\infty\}$.

4) $f(x)\to\infty$, $\varphi(x)\to\infty$, при $x\to x_0$, то говорят, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ имеет неопределенность бесконечность делить на бесконечность.

При нахождении пределов в этих случаях нужно вначале избавиться от неопределенности и лишь после этого применять теоремы и свойства пределов. С этой целью, как правило, выделяют в числителе и знаменателе одинаковые множители, стремящиеся к нулю или к бесконечности, или избавляются от иррациональности умножением на сопряженное выражение или применяют эквивалентные функции.

Пример.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-3ax+2a^2}{x-a}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot(x-2a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x-2a)=a-2a=-a.$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{(x-a)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x->a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}},a>0.$$

При нахождении пределов применяют теоремы о связи бесконечно-малых и бесконечно-больших функций и теорему о пределе показательно-степенной функции:

Если y=f(x), при $x\to x_0$ бесконечно малая функция(f(x)->0), то [1/f(x)]->∞ при $x\to x_0$ - бесконечно большая функция и наоборот, если $\varphi(x)$- бесконечно большая функция при $x\to x_0$, то

$[1/\varphi(x)]$- бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Пример. Вычислить:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{2x^6+1} - 2x^3}{\sqrt{4x^8+2x^2-1}+3}.$$

Порядок роста (наибольший показатель степени у слагаемых) числителя и знаменателя один и тот же и равен 11.

Делим числитель и знаменатель на x^4 и учитывая связь бесконечно больших и бесконечно малых функций, имеем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2+\frac{1}{x^6}} - \frac{2}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x^6}-\frac{1}{x^8}}+\frac{3}{x^4}} = \frac{\sqrt[3]{2+0}-0}{\sqrt{4+0-0}+0} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}.$$

Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} U(x) = A > 0$, и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} V(x) = B$, то существует предел показательно-степенной функции, причем $\lim\limits_{x\to x_0} U^V = (\lim\limits_{x\to x_0} U)^{\lim\limits_{x\to x_0} V} = A^B$.

При этом если

1) $0<A<1$; $\lim\limits_{x\to x_0} V = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} U^V = 0$.

2) $A>1$; $\lim\limits_{x\to x_0} V = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} U^V = +\infty$.

3) $0<A<1$, $\lim\limits_{x\to x_0} V = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} U^V = +\infty$.

4) $A>1$, $\lim\limits_{x\to x_0} V = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} U^V = 0$.

Если же $U \to 1$, $V \to \infty$, при $x \to x_0$, то говорят о неопределенности вида $\{1^\infty\}$:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} U = 1,\quad \lim_{x\to x_0} V = \infty,\quad \lim_{x\to x_0} U^V = \{1^\infty\} \text{ неопределенность.}}$$

Для раскрытия неопределенности такого вида применяется формула

.

$$\lim_{x\to x_0} U^V = \{1^\infty\} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} V\cdot(U-1)}$$

Примеры:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^{\cos x} = \left(\frac{5}{4}\right)^{\cos 2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-3}\right)^x = \left(1^\infty\right) = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{3x+1}{3x-3}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x-3}} = e^{\frac{4}{3}}.$$

Тема 5. Дифференциальное исчисление. Практические занятия 9-11.

При нахождении производных функции в точке и на интервале применяют таблицу производных, их свойства и теоремы о производных.

Таблица производных:

$$(C)'=0;\left(x^a\right)'=a\cdot x^{a-1};\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a;\left(e^x\right)'=e^x;(\ln x)'=\frac{1}{x};(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$

$$(\sin x)'=\cos x;(\cos x)'=-\sin x;(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x};(ctgx)'=\frac{-1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)'=-(\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};(arctgx)'=-(arcctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$$

Свойства производных.

Если существуют производные функций $f(x)$ и $g(x)$ в точках x интервала (a,b), а k_1 и k_2 постоянные множители, то:

1. Производная суммы (разности) функций равна сумме (разности) производных, константы можно выносить за знак производной, при этом справедлива формула:

$(k_1\cdot f(x)\pm k_2 g(x))'=k_1\cdot f'(x)\pm k_2 g'(x)$.

Пример.

$(2x^2+3\sin x)'=2(x^2)'+3(\sin x)'=4x+3\cos x.$

2. Производная произведения вычисляется по формуле:

$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$

Пример.

$$(\cos x\cdot \arcsin x)'=(\cos x)'\cdot \arcsin x+\cos x\cdot(\arcsin x)'=-\sin x\cdot \arcsin x+\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Производная частного (дроби) вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)},\qquad g(x)\neq 0.$$

Пример.

$$(tg(x))'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Пример.

Найти $f'(x)$, если $f(x)=\sqrt{x}+2\cdot x^{5/3}+3\cdot x\cdot\sin x+\dfrac{a^x}{\ln x}$. Используя свойство производной суммы и переходя от арифметических корней к степенным функциям, имеем

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}+2\cdot x^{5/3}+3\cdot x\cdot\sin x+\frac{a^x}{\ln x}\right)'=$$

$$(x^{1/2})'+2\cdot(x^{5/3})'+3\cdot(x\cdot\sin x)'+\left(\frac{a^x}{\ln x}\right)'.$$

Применяя таблицу производных и формулы для дифференцирования произведения и частного, получим

$f'(x)=$

$$=\frac{1}{2}x^{-1/2}+2\cdot\frac{5}{3}\cdot x^{2/3}+3\cdot(x'\cdot\sin x+x\cdot\sin' x)+\frac{(a^x)'\cdot\ln x-a^x\cdot(\ln x)'}{\ln^2 x}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{10}{3}\cdot\sqrt[3]{x^2}+3\cdot(\sin x+x\cdot\cos x)+\frac{a^x(\ln a\cdot\ln x-1/x)}{\ln^2 x}.$$

При нахождении производных часто применяется следующая теорема.

Теорема(о производной сложной функции).

Если функция $y=f(g)$ дифференцируема для любых $g\in(a,b)$, а функция $g(x)$ дифференцируема для любых $x\in(c,d)$, тогда сложная функция $f(g(x))$ дифференцируема для любых $x\in(c,d)$ и ее производная находится по формуле $\left(f(g(x))\right)'=f'_g\cdot g'_x$.

Пример.

Найти производную сложной функции

$f(g(x))=\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{1/2}=g^{\frac{1}{2}}$, где $g(x)=1+x^2$.

В соответствии с теоремой имеем:

$$\left(f(g(x))\right)'=\left(g^{1/2}\right)'_g\cdot\left(g(x)\right)'_x$$

или

$$\left(f(g(x))\right)'=\frac{1}{2}\cdot g^{-1/2}\cdot\left(g(x)\right)'=\frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-1/2}\cdot(1+x^2)'_x=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-1/2}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

При нахождении производной, теорема может применяться несколько раз подряд.

Пример.

Для функции $f(x)=\frac{1}{2}arctg^2\sqrt{3x-1}$ найти производную $f'(x)$. Используя формулу из теоремы один раз имеем:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}arctg^2\sqrt{3x-1}\right)'=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot arctg\sqrt{3x-1}\cdot\left(arctg\sqrt{3x-1}\right)'_x.$$

Но функция $arctg\sqrt{3x-1}$ тоже сложная. Применив теорему к этой функции, получим

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot arctg\sqrt{3x-1}\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{3x-1}\right)^2}\left(\sqrt{3x-1}\right)'_x.$$

Применяя теорему еще два раза, продолжим цепочку равенств

$$f'(x)=arctg\sqrt{3x-1}\cdot\frac{1}{1+3x-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x-1}}(3x-1)'_x=\frac{arctg\sqrt{3x-1}}{2x\sqrt{3x-1}}.$$

Таким образом, при дифференцировании сложной функции находится производная "внешней " функции без учета выражения, являющегося ее аргументом, затем полученная производная умножается на производную выражения, являющегося аргументом.

Для некоторых видов функций применяются специальные приемы нахождения производных.

Если имеется показательно- степенная функция $y(x)=u(x)^{v(x)}$ или частное вида $y(x)=\dfrac{u_1^{a_1}\cdot u_2^{a_2}\cdot u_3^{a_3}\cdots u_n^{a_n}}{v_1^{b_1}\cdot v_2^{b_2}\cdots v_k^{b_k}}$, где u_i, v_i - функции, a_i, b_i - числа, то для нахождения производных этих функций применяется прием логарифмического дифференцирования. Этот прием основан на использовании основного логарифмического тождества $a^{\log_a b}=b$, в частности, $e^{\ln x}=x$, и свойств логарифмов $ln(a\cdot b)=ln\,a+ln\,b,\quad ln(a/b)=ln\,a-ln\,b,\quad ln(a^b)=b\cdot ln\,a.$

Суть приема состоит в том, что производную любой функции можно найти как произведение этой функции на производную логарифма ее модуля

$$\left(f(x)\right)'=f(x)\cdot\left(ln\left|f(x)\right|\right)'_x.$$

С учетом полученной формулы производная показательно-степенной функции равна произведению самой функции на производную логарифма этой функции:

$$(u^v)'=u^v\cdot(ln\,u^v)'=u^v\cdot(v\cdot ln\,u)'=u^v\cdot(v'\cdot ln\,u+v\cdot(ln\,u)')=u^v\cdot(v'\cdot ln\,u+\frac{v}{u}u')$$

или $(u^v)'=u^v\cdot ln\,u\cdot v'+v\cdot u^{v-1}\cdot u'.$

Таким образом получена известная формула для производной показательно-степенной функции как сумма производных показательной (при фиксированной u) и степенной (при фиксированной v) функций.

Пример.

Пусть $y=(cos\,x)^{sin\,x}$. Применяя прием логарифмического дифференцирования, имеем

$$(cos\,x^{sin\,x})'=cos^{sin\,x}\cdot(ln\,cos\,x^{sin\,x})'=y\cdot(sin\,x\cdot ln\,cos\,x)'=$$

$$=y\cdot((sin\,x)'\cdot ln\,cos\,x+sin\,x\cdot(ln\,cos\,x)')=$$

$$=(cos\,x)^{sin\,x}\cdot(cos\,x\cdot ln\,cos\,x+sin\,x\cdot\frac{-sin\,x}{cos\,x})=$$

$$=(cos\,x)^{sin\,x+1}ln\,cos\,x-(cos\,x)^{sin\,x-1}\cdot sin^2x.$$

Применяя прием логарифмического дифференцирования для случая дроби, имеем

$$(f(x))'=\left(\frac{u_1^{a_1}\cdot u_2^{a_2}\cdot u_3^{a_3}\cdots u_n^{a_n}}{v_1^{b_1}\cdot v_2^{b_2}\cdots v_k^{b_k}}\right)'=f(x)\cdot\left(ln\left(\frac{u_1^{a_1}\cdot u_2^{a_2}\cdot u_3^{a_3}\cdots u_n^{a_n}}{v_1^{b_1}\cdot v_2^{b_2}\cdots v_k^{b_k}}\right)\right)'=$$

$$=f(x)\cdot\left(a_1\cdot ln\,u_1+a_2\cdot ln\,u_2+...+a_n\cdot ln\,u_n-b_1\cdot ln\,v_1-b_2\cdot ln\,v_2-...-b_k\cdot ln\,v_k\right)'=$$

$$=f(x)\cdot\left(a_1\cdot\frac{u_1'}{u_1}+a_2\cdot\frac{u_2'}{u_2}+...+\frac{u_n'}{u_n}a_n-b_1\cdot\frac{v_1'}{v_1}-b_2\cdot\frac{v_2'}{v_2}-...-b_k\cdot\frac{v_k'}{v_k}\right).$$

Пример.

Найти производную дроби

$$f(x)=\frac{3\cdot\sqrt[5]{cos\,5x}\cdot\sqrt[7]{tg7x}}{a^{arcsin\,x}\cdot x^{17/3}}.$$

Применяя прием логарифмического дифференцирования и свойства логарифмов, видим, что

$$(f(x))'=f(x)\cdot\left(\frac{3\cdot\sqrt[5]{cos\,5x}\cdot\sqrt[7]{tg7x}}{a^{arcsin\,x}\cdot x^{17/3}}.\right)'=$$

$$=f(x)\cdot(ln(3\cdot\sqrt[5]{cos\,5x}\cdot\sqrt[7]{tg7x})-ln(a^{arcsin\,x}\cdot x^{17/3}))'=.$$

$$=f(x)\cdot(ln\,3+\frac{1}{5}ln\,cos\,5x+\frac{1}{7}ln\,sin\,7x-\frac{1}{7}ln\,cox7x-arcsin\,x\cdot ln\,a-\frac{17}{3}\cdot ln\,x)'=$$

$$=f(x)\cdot(\frac{1}{5}\cdot\frac{-5\,sin\,5x}{cos\,5x}+\frac{1}{7}\cdot\frac{7\,cos\,7x}{sin\,7x}-\frac{1}{7}\cdot\frac{-7\,sin\,7x}{cos\,7x}-\frac{ln\,a}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{17}{3x}).$$

Преобразовав полученное выражение, получим:

$$f'(x) = f(x)\cdot(-tg5x + \frac{2}{sin14x} - \frac{ln a}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{17}{3x}).$$

Если у функции $f(x)$ существовала производная в точке x_0 или на интервале (a,b), то операция нахождения производной называлась дифференцированием функции. С наличием производной функции в точке тесно связано понятие дифференцируемости функции в точке, которое вводится по определению.

Определение.

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение в окрестности этой точки представимо в виде

$\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$, ($\Delta x = x - x_0$.).

Здесь **A** - некоторое число, определяемое в точке x_0 . Используя дифференцируемость функции в точке, введем понятие дифференциала функции в точке.

Определение.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется линейная часть приращения дифференцируемой функции, при этом вводится обозначение

$dy(x_0) = A\cdot\Delta x$.

Связь между наличием производной и дифференцируемостью функции в точке дается следующей теоремой.

Теорема (Критерий дифференцируемости).

Для дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы в точке существовала производная $f'(x_0)$. При этом справедлива формула $dy(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x = f'(x_0)\cdot dx$, (принято, что $\Delta x = dx$).

Так как уравнение касательной к графику функции в точке x_0 имеет вид

$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x,$

а дифференциал $dy(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x = f'(x_0)\cdot dx$, то очевидно, что геометрический смысл дифференциала есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Свойства дифференциала схожи со свойствами производной. Если функции $f(x), g(x)$ дифференцируемы на некотором интервале (a,b), где k_1, k_2 - некоторые числа, то

$1.\ d[k_1\cdot f(x) + k_2\cdot g(x)] = k_1\cdot d[f(x)] + k_2 d[g(x)]$,

$2.\ d[f(x)g(x)] = d[f(x)]g(x) + f(x)d[g(x)],$

$3.\ d[f(x)/g(x)] = (d[f(x)]g(x) - f(x)d[g(x)])/g^2(x),\ g(x)\neq 0.$

Если функция $y = f(g(x))$ сложная, то дифференциал первого порядка обладает свойством инвариантности формы записи (одинаковой формой записи в зависимых и независимых переменных)

$dy(x) = df(g(x)) = f'_x\cdot dx = f'_g\cdot g'_x(x)dx = f'_g\cdot dg.$

Проиллюстрируем понятие дифференциала на примерах.

Пример.

Вычислить дифференциал функции $y = arcsin3x$.

$$dy = d(\,arcsin3x) = (\,arcsin3x)' \cdot dx = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot dx.$$

Пример.

Найти приближенное значение корня $\sqrt[3]{7.98}$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}.$ Так как она дифференцируема в точке $x_0 = 8$, то ее приращение представимо в виде $\Delta y = y - y_0 = dy(x_0) + o(\Delta x).$

Отбросив бесконечно-малые величины, получим приближенное равенство

$$y - y_0 \approx dy(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Если $y = \sqrt[3]{7.98},\, y_0 = \sqrt[3]{8},\, x_0 = 8$, то $\Delta x = -0.02$, и имеем формулу

$$\sqrt[3]{7.98} - \sqrt[3]{8} \approx \frac{1}{3} \cdot 8^{-2/3} \cdot (-0.02),$$

откуда получаем

$$\sqrt[3]{7.98} \approx 2 + \frac{1}{3} \cdot 8^{-2/3} \cdot (-0.02) = 2 - \frac{2}{12 \cdot 100} = 2 \cdot \frac{1199}{1200} = 1{,}9983(3).$$

Нахождение производных высших порядков.

Если у функции $f(x)$ существует производная на интервале (a,b), то она в свою очередь является некоторой функцией от x.

Пример.

$f(x) = x^2 + 3x$,тогда $f'(x) = 2x + 3$; $f(x) = arcsinx$, тогда $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Для полученных при дифференцировании функций можно вновь применить понятие производной.

Определение.

Если на интервале (a,b) существует производная от первой производной функции $f(x)$, то она называется второй производной от $f(x)$ на интервале (a,b) и обозначается $f''(x) = (f'(x))' = \dfrac{d}{dx}(f'(x)).$

Пример.

Найти вторую производную функции $f(x) = ln(x),\, x > 0.$

Так как $f'(x) = 1/x$, то $f''(x) = (1/x)' = -1/x^2 = -x^{-2}$.

Аналогично можно ввести производные более высокого порядка.

Определение.

Пусть у функции $f(x)$ существует производная порядка "n-1" на интервале (a,b). Если на этом интервале существует производная от производной порядка " n-1" функции $f(x)$, то она называется производной порядка "n" и обозначается $f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n} = \dfrac{d}{dx}(f^{(n-1)}).$

Пример.

Найти пятую производную функции $f(x) = 3^{-5x}$. Производя последовательные дифференцирования, имеем

$$f'(x)=(3^{-5x})'=3^{-5x}\cdot ln3\cdot(-5x)'=-5\cdot 3^{-5x}\cdot ln3.$$

$$f''(x)=((-5)\cdot 3^{-5x}ln3)'=-5\cdot ln3\cdot(3^{-5x})'=(-5)^2\cdot ln^2 3\cdot 3^{-5x},$$

$$f^{(3)}(x)=((-5)^2\cdot ln^2 3\cdot 3^{-5x})'=(-5)^3\cdot ln^3 3\cdot 3^{-5x},$$

$$f^{(4)}=((-5)^3\cdot ln^3 3\cdot 3^{-5x})'=(-5)^4\cdot ln^4 3\cdot 3^{-5x},$$

$$f^{(5)}=((-5)^4\cdot ln^4 3\cdot 3^{-5x})'=(-5)^5\cdot ln^5 3\cdot 3^{-5x}.$$

Здесь принято, что производные до второго порядка включительно обозначаются штрихами, производные более высокого порядка обозначаются верхним индексом в скобках. Очевидно, что для нахождения производных высоких порядков нужно последовательно применить первую производную к функции, ее первой производной, второй производной и так до производной нужного порядка.

Заметим, что если существует производная порядка "n", то все производные более низких порядков также существуют. Обратное неверно.

Пусть на интервале (a,b) существуют производные порядка "n" у функций $f(x)$ и $g(x)$ тогда справедливы свойства:

1.Линейность.

$$(k_1\cdot f(x)+k_2\cdot g(x))^{(n)}=k_1\cdot(f(x))^{(n)}+k_2\cdot(g(x))^{(n)},$$

где k_1,k_2 – константы.

2.Формула Лейбница

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot(f(x))^{(n-k)}\cdot(g(x))^{(k)}=$$

$$C_n^0\cdot(f(x))^{(n)}\cdot g(x)+C_n^1\cdot(f(x))^{(n-1)}\cdot(g(x))^{(1)}+...C_n^n\cdot(f(x))^{(0)}\cdot(g(x))^{(n)}.$$

Здесь принято, что знак $\sum\limits_{k=0}^{n}$ - обозначает сумму "n+1" слагаемых, получающихся при изменении индекса k от нуля до "n", а числа C_n^k вычисляются по формуле

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...3\cdot 2\cdot 1}{(k\cdot(k-1)...3\cdot 2\cdot 1)\cdot((n-k)\cdot(n-k-1)\cdot...\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}.$$

Пример.

Вычислить пятую производную $f^{(5)}(x)$, если $f(x)=x\cdot e^x$.

Используя формулу Лейбница, имеем

$$(xe^x)^{(5)}=\sum_{k=0}^{5}C_n^k\cdot(x)^{(5-k)}\cdot(e^x)^{(k)}=$$

$$C_5^0\cdot(x)^{(5)}\cdot e^x+C_5^1\cdot(x)^{(4)}\cdot(e^x)^{(1)}+C_5^2\cdot(x)^{(3)}\cdot(e^x)^{(2)}+C_5^3\cdot(x)^{(2)}\cdot(e^x)^{(3)}+$$

$$+C_5^4\cdot(x)^{(1)}\cdot(e^x)^{(4)}+C_5^5\cdot(x)^{(0)}\cdot(e^x)^{(5)}.$$

Так как $n!=n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1$, в частности $5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$, то

$$C_5^0=C_5^5=\frac{5!}{0!\cdot 5!}=1;\quad C_5^1=C_5^4=\frac{5!}{1!\cdot 4!}=5;\quad C_5^2=C_5^3=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$$

Найдем производные функций x и e^x, производя последовательные дифференцирования

$(x)^{(1)} = 1;\ (x)^{(2)} = 0;\ (x)^{(3)} = 0;\ (x)^{(4)} = 0;\ (x)^{(5)} = 0;$

$(e^x)^{(1)} = e^x;\ (e^x)^{(2)} = e^x;\ (e^x)^{(3)} = e^x;\ (e^x)^{(4)} = e^x;$

$(e^x)^{(5)} = e^x;$

Подставляя найденные производные и числа в формулу Лейбница, получаем

$(xe^x)^{(5)} = 1\cdot 0\cdot e^x + 5\cdot 0\cdot e^x + 10\cdot 0\cdot e^x + 5\cdot 1\cdot e^x + xe^x.$

После преобразования имеем

$(xe^x)^{(5)} = e^x(5 + x)$

Построить график функции.

Полное исследование функции $y = f(x)$ и построение ее графика рекомендуется проводить по схеме:

1. Найти область определения функции $D(x)$– множество значений аргумента, при которых функция имеет смысл.
2. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.

Если $(a,b) = (-\infty,+\infty)$ и существует такое число $T \neq 0$, что $f(x+T) = f(x)$ для любого $x \in (-\infty,+\infty)$, то исследуемая функция периодична с периодом T. При этом достаточно построить график функции на промежутке $(0,T)$ и доопределить его по периодичности на всю числовую ось.

Если $f(-x) = f(x), \forall x \in (-a,a)$, то исследуемая функция четная, в этом случае график симметричен относительно оси ординат; достаточно построить график функции на промежутке $(0,a)$ и отобразить его симметрично относительно оси ординат на $(-a,0)$.

Если $f(-x) = -f(x), \forall x \in (-a,a)$, то исследуемая функция нечетная, в этом случае график симметричен относительно начала координат; достаточно построить график функции на промежутке $(0,a)$и отобразить его симметрично относительно начала координат на $(-a,0)$.

3. Асимптоты. Для их нахождения установить характер точек разрыва функции (если они имеются), исследовать поведение функции в точках разрыва и при x стремящемся к бесконечности.

Если в точке $x_0 \in (a,b)$ функция имеет бесконечный разрыв, то график функции имеет вертикальную асимптоту $x = x_0$ (прямая называется асимптотой кривой, если расстояние от точки кривой до этой прямой по мере удаления точки в бесконечность стремится к нулю).

Если при $x \to \pm\infty$ существуют и конечны пределы $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$, то прямые вида $y = kx + b$ называются наклонными асимптотами графика функции $f(x)$.

4. Найти экстремумы функции (max или min) и интервалымонотонности функции (возрастания, убывания).

Если на (a, b) производная $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале, при $f'(x) < 0$ функция $f(x)$ на интервале убывает.

Для отыскания точек экстремума применим следующие приемы:

1) Если в окрестности критической точки первой производной x_0 (эти точки ищут из условий: y' не существует или y'=0) первая производная функции непрерывной функции меняет знак,

то в точке x_0 есть экстремум, причем при смене знака производной **с “-”** на **“+”** в точке x_0 имеется минимум($f(x_0)=f_{min}$) при смене знака **с “+”** на **“-”** в точке x_0 имеется максимум($f(x_0)=f_{max}$).

2) Если в критической точке x_0 производная $f'(x)=0$, но вторая производная $f''(x)\neq 0$, то точка x_0 - точка экстремума, при этом при значении $f''(x_0)<0$ в точке x_0 имеется максимум ($f(x_0)=f_{max}$), если же $f''(x_0)>0$, то в точке x_0 имеется минимум($f(x_0)=f_{min}$).

5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.

Для отыскания промежутков выпуклости и вогнутости графика функции применяется вторая производная. Функция $y=f(x)$ будет выпукла на интервале(выпукла вверх) в том случае, если $f''(x)<0$ на этом интервале, если же $f''(x)>0$ на интервале *(a, b),* то функция будет на интервале вогнутой(выпуклой вниз).

Когда в окрестности критической точки x_0 второй производной (эти точки ищут из условий: $f''(x_0)$ не существует или $f''(x_0)=0$) вторая производная функции меняет знак и существует касательная в точке $(x_0; f(x_0))$, то точка с координатами $(x_0; f(x_0))$ называется точкой перегиба точка перегиба.

6. Найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график: С осью Оу: положив $x=0,$ и найдя $y=f(0)$. С осью Ох: положив $y=0,$ и решив уравнение. $f(x)=0$ **(** это уравнение решают только в случае, если оно простое**).**

7.По результатам исследования по пунктам 1-6 построить график данной функции.

Пример.

Построить график функции $y=\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$.

1. Найдем область определения данной функции.

• Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точек x= -1 и x=1, т.к. в этих точках функция не определена. Значит точки x= -1 и x=1 - точки разрыва функции:

• $D(x)=\{(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)\}$.

Исследуем данную функцию на четность, нечетность и периодичность.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{1-x^2},\ f(-x)=\frac{x^2+1}{1-x^2}.$$

• Так как f(-x)=f(x), то данная функция является четной и ее график симметричен относительно оси Оу. Поэтому дальнейшие исследования будем проводить для x$\geq$ 0.

• Функция не является периодической.

2. Исследуем характер точек разрыва функции и поведение функции в бесконечности.

В точках $x=\pm 1$ имеем :

$$y(\pm 1-0)=\lim_{x\to\pm 1+0} f(x)=\lim_{x\to\pm 1+0}\frac{x^2+1}{1-x^2}=\left(\frac{2}{\pm 0}\right)=\pm\infty,$$

$$y(\pm 1+0)=\lim_{x\to\pm 1+0} f(x)=\lim_{x\to\pm 1+0}\frac{x^2+1}{1-x^2}=\left(\frac{2}{\mp 0}\right)=\mp\infty.$$

Значит, точки $x=\pm 1$ – точки бесконечного разрыва 2 рода.

При $x\to\infty$ получаем

• $$y(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{-2x}=-1$$

• Заметим, что при вычислении предела применялось правило Лопиталя):

- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\ или\ \dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

3. Найдем асимптоты графика функции.

   а) Вертикальные.

   Так как $x=\pm 1$ - точки бесконечного разрыва функции, то $x=\pm 1$ – уравнения вертикальных асимптот графика функции $f(x)$.

   б) Наклонные асимптоты ищем в виде $y=kx+b$.

   Для правой ветви графика функции имеем

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1-3x^2}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{-6x}=\left[\frac{2}{-\infty}\right]=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{-2x}=-1$$

   (при вычислениях пределов применялось правило Лопиталя).

   Значит, $y=-1$ – уравнение горизонтальной асимптоты для правой ветви.

4. Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции.

   Вычислим первую производную функции:

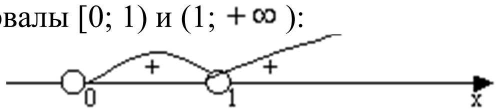
$$y'=\frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

   Найдем теперь критические точки 1 рода из условий первая производная y'=0 или не существует.

   y' существует для всех x принадлежащих D(x).

   y'=0 при 4x= 0, т.е. x= 0 - критическая точка функции первого рода.

   Отметим эту точку на числовой оси и разобьем область определения исследуемой функции ($x\geq 0$) на интервалы [0; 1) и (1; $+\infty$):



   Найдем знак y' на каждом из интервалов:

   (0; 1): $y'(0{,}5)=4\cdot 0{,}5/(1-0{,}5^2)^2=2/(0{,}75)^2>0\Rightarrow$ функция возрастает на данном интервале.

   (1; $+\infty$): $y'(2)=4\cdot 2/(1-2^2)^2=8/9>0\Rightarrow$ функция возрастает на данном интервале.

5. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.

   Вычислим вторую производную функции:

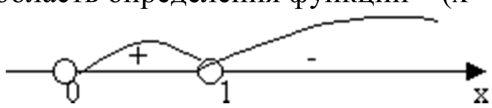
$$y''=(y')'=\frac{4(1-x^2)^2-4x\cdot 2(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$$

   Найдем теперь критические точки 2 рода из условий y" не существует и y"=0.

   y" существует для всех x принадлежащих D(x).

   y"=0 при $3x^2+1=0$ - уравнение решений не имеет. **Нет критических точек 2 рода.**

   Отметим на числовой оси область определения функции ($x\geq 0$)



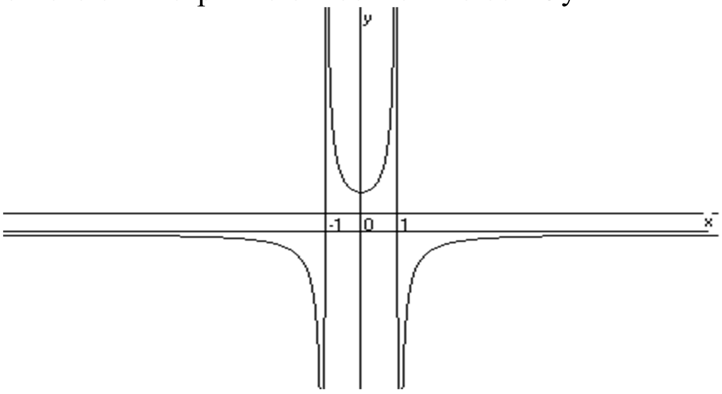
   Найдем знак y" на каждом из интервалов:

   (0; 1): $y''(0{,}5)=4\cdot(1+3\cdot 0{,}5^2)/(1-0{,}5^2)^3=4\cdot 1{,}75/(0{,}75)^3>0\Rightarrow$ направление выпуклости вниз на данном интервале.

(1; $+\infty$): $y''(2)= 4\cdot(1+3\cdot4)/(1-4)^3=4\cdot13/(-27)<0 \Rightarrow$ направление выпуклости вверх на данном интервале.

Точек перегиба нет.

6. Найдем точки пересечения с осями координат.
 С осью 0y : x=0 $\Rightarrow$ y=1; т. пересечения – (0;1)
 С осью 0x: y=0 при $x^2+1=0$ – решений не имеет, нет точек пересечения.
7. По результатам исследования по пунктам 1-6 составим построим график данной функции для $x \geq 0$ и отражаем его симметрично относительно оси Oy



Тема 6. Интегральное исчисление. Практические занятия 12-14.

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – непрерывно дифференцируемые (имеющие непрерывные производные) функции на отрезке $[a,b]$, тогда

$$[u(x)v(x)]' = u(x)\cdot[v(x)]' + v(x)[u(x)]'. \qquad (1.1)$$

Интегрируя (1.1) в пределах от a до b с использованием формулы Ньютона-Лейбница, находим

$$\int_a^b u(x)[v(x)]'\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)[u(x)]'\,dx, \qquad (1.2)$$

или, учитывая, что $d[u(x)] = u'(x)dx$ и $d[v(x)] = v'(x)dx$,

$$\int_a^b u(x)d[v(x)] = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)d[u(x)]. \qquad (1.3)$$

Для неопределенного интеграла имеем формулы

$$\int u(x)[v(x)]'\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)[u(x)]'\,dx$$

или

$$\int u(x)d[v(x)] = u(x)v(x) - \int v(x)d[u(x)].$$

6. 1.2 ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) функция $x=\varphi(t)$ строго монотонна и непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$;
3) $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$;
4) функция f(φ(t)) определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$,

тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \,. \qquad (1.4)$$

В случае неопределенного интеграла

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \,.$$

Пример 1.1 Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} x\cos(x)dx$.

Решение.

Применим метод интегрирования по частям, опираясь на формулы (1.1), (1.2):

$$\int_0^{2\pi} x\cos(x)dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \quad =$$

$$x\sin x\Big|_0^{2\pi} + \cos x\Big|_0^{2\pi} = \left[2\pi \cdot \sin(2\pi) - 0 \cdot \sin(0)\right] + \left[\cos(2\pi) - \cos(0)\right] = 0.$$

Пример1. 2 Вычислить $\int_0^{e-1} \frac{\ln^2(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx$.

Решение:

Применим метод интегрирования по частям:

$$\int_0^{e-1} \frac{\ln^2(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx = \left| \begin{matrix} u = \ln^2(x+1) & du = 2\ln(x+1)\dfrac{dx}{x+1} \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}} & v = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} \end{matrix} \right| = 2\ln^2(x+1)\sqrt{x+1}\Big|_0^{e-1} -$$

$$-4\int_0^{e-1} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx = \left| \begin{matrix} u = \ln(x+1) & du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}} & v = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} \end{matrix} \right| = 2\sqrt{\mathrm{e}} - 4(2\ln(x+1)\sqrt{x+1}\Big|_0^{e-1} -$$

$$2\int_0^{e-1} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}) = 2\sqrt{\boldsymbol{e}} - 4(2\sqrt{\boldsymbol{e}} - 4\sqrt{x+1}\Big|_0^{e-1}) = 10\sqrt{\boldsymbol{e}} - 16.$$

Пример 1.3 Вычислить определенный интеграл $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$.

Решение.

Применим метод замены переменной с учетом формулы (1.3):

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx = \left|\begin{array}{c} \sqrt{1+x} \overset{обозн}{=} t, \\ x=t^2-1, \\ dx=2tdt, \\ если\ x=0,\ то\ t=1, \\ если\ x=3,\ то\ t=2 \end{array}\right| = \int_1^2 (t^2-1)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int_1^2 (t^4-t^2)dt = = 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 7\frac{11}{15}.$$

В достаточно простых случаях при интегрировании методом замены переменной можно не вводить обозначение новой переменной, а использовать прием внесения под знак дифференциала $f(x)dx = d[F(x)], F'(x) = f(x)$ и инвариантность формул интегрирования.

Пример 1.4 Вычислить $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx = -\frac{1}{3}\int (\arccos 3x)^2 d(\arccos 3x) = -\frac{1}{9}(\arccos 3x)^3 + C.$$

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Для неправильной рациональной дроби (дробно-рациональной функции) $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, (m \ge n)$ *следует выделить целую часть :*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}. \tag{2.1}$$

где $M_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ - многочлены степени $(m-n)$ и r, причем $r < n$.

Разложение правильной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, (m < n)$ на сумму простейших дробей имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)^1} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_l}{(x-a)^l} + \ldots + \frac{M_1(x)+N_1}{(p^2+px+q)} + \\ &+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Для вычисления коэффициентов $\boldsymbol{A_i, M_j, N_k}$ следует последнее равенство (2.2) привести к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $\boldsymbol{x}$ в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Можно определить коэффициенты и другим способом, придавая в полученном тождестве переменной $\boldsymbol{x}$ произвольные числовые значения.

Простейшие дроби $\boldsymbol{I, II, III}$ типов в правой части (2.2) интегрируются следующим образом:

$$I)\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C, \quad II)\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C,$$

$$III)\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mt+(N-\frac{Mp}{2})}{t^2+a^2}dt = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) +$$

$$+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q+p^2}} + C,$$

где трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, $t = x+\frac{p}{2}, a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Дроби четвертого типа интегрируются так:

$$IV)\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{Mt+(N-\frac{Mp}{2})}{(t^2+a^2)^n}dx = -\frac{M}{2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}} +$$

$$+(N-\frac{Mp}{2})\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n},$$

причем при $n \geq 2$ интеграл $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ вычисляется по рекуррентной формуле:

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)}\frac{t}{a^2(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-1}{2(n-1)a^2} + I_{n-1}, \quad ãäå \quad I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}.$$

Пример2.1 Вычислить $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$.

Решение.

Подынтегральная функция – неправильная рациональная дробь. Представим ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (например, способом деления числителя на знаменатель) как в (2.1):

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = x-2+4\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

Следовательно:

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx = \int (x-2)dx + 4\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2^2}dx. \quad (2.3)$$

Разложим знаменатель дроби на множители:

$x^4+2x^3+2x^2 = x^2(x^2+2x+2)$, где квадратный трехчлен x^2+2x+2 не имеет действительных корней.

Согласно (2.2) можно записать в виде:

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2x+2}. \qquad (2.4)$$

Для определения коэффициентов A_1, A_2, M_1, N_1 дроби в правой части равенства (2.4) приведем к общему знаменателю и сложим. В результате получим равенство двух дробей с одинаковыми знаменателями. Следовательно, числители дробей в левой и правой частях полученного равенства должны быть равны, т.е.:

$$x^3+x^2+x+1 \equiv A_1x(x^2+2x+2)+A_2(x^2+2x+2)+(M_1x+N_1)x^2.$$

Два многочлена относительно переменной x тождественно равны тогда и только тогда, когда их коэффициенты при одинаковых степенях x равны между собой.

Приравняем эти коэффициенты и получим систему уравнений относительно A_1, A_2, M_1, N_1:

$$\left.\begin{array}{c} x^3: A_1+M_1=1 \\ x^2: 2A_1+A_2+N_1=1 \\ x^1: 2A_1+2A_2=1 \\ x^0: 2A_2=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1=0 \\ A_2=\dfrac{1}{2} \\ M_1=1 \\ N_1=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Подставив найденные коэффициенты A_1, A_2, M_1, N_1 в (2.4), получим:

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+2x+2}. \qquad (2.5)$$

Из (2.3) и (2.5) следует, что:

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx = \int(x-2)dx+4\int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+2x+2}\right)\mathrm{d}x = \frac{(x-2)^2}{2}-\frac{2}{x}+2\int\frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx = \frac{(x-2)^2}{2}-\frac{2}{x}+2\int\frac{2(x+1)-1}{x^2+2x+2}dx = \frac{(x-2)^2}{2}-\frac{2}{x}+2\int\frac{d((x+1)^2+1)}{(x+1)^2+1}-2\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \frac{(x-2)^2}{2}-\frac{2}{x}+2\ln[(x+1)^2+1]-2arctg(x+1)+C.$$

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R –рациональная функция от двух переменных, сводится к интегралам от рациональных функций одной переменной при помощи универсальной тригонометрической подстановки:

$$tg\frac{x}{2}=t,\quad \sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$x=2arctgx,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (3.1)$$

Однако в большинстве случаев предпочтительнее воспользоваться рассмотренными ниже частными подстановками:

1).Если $\boldsymbol{R(\sin x,\cos x)}$ - нечетная функция относительно $\sin x: R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то интеграл вычисляется с помощью подстановки $\cos x=t$;

2).Если $R(\sin x,\cos x)$ - нечётная функция относительно $\cos x: R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то используется подстановка $\sin x=t$;

3).Если $R(\sin x,\cos x)$ - четная функция относительно $\sin x,\cos x: R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то интеграл вычисляется с помощью подстановки $tgx=t$;

Интегралы вида $\int\sin^m x\cos^n xdx$ вычисляются следующим образом:

При n – нечётном положительном числе применима подстановка $\sin x=t$, если m – нечётное положительное число, то $\cos x=t$, если же *m, n* – чётные положительные числа, тогда используют формулы:

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Интегралы вида $\int tg^m xdx,\int ctg^m xdx$, m – целое положительное число, решаются при помощи замены $tg^2x=\sec^2 x-1$ или $ctg^2x=\cos ec^2x-1$.

Интегралы вида $\int tg^m x\sec^n xdx,\int ctg^m x\cos ec^n xdx$, где $\boldsymbol{n}$- целое положительное число, вычисляются при помощи замены :

$$\sec^2 x=1+tg^2x,\cos ec^2x=1+ctg^2x.$$

Для интегралов вида

$$\int\sec^{2n+1}xdx,\int\cos ec^{2n+1}xdx$$

используются рекуррентные формулы :

$$\int\sec^{2n+1}xdx=\frac{1}{2n}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{2n}x}+(1-\frac{1}{2n})\int\sec^{2n-1}xdx$$

$$\int\cos ec^{2n+1}xdx=-\frac{1}{2n}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{2n}x}+(1-\frac{1}{2n})\int\cos ec^{2n-1}xdx.$$

При вычислении интегралов вида

$$\int \sin mx \cos nx dx, \int \cos mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx$$

используют известные соотношения:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)).$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

Пример 3.1 Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{5+3\sin x}dx$.

Решение.

Используем универсальную подстановку:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{5+3\sin x}dx = \left| \begin{array}{l} t = tg\,\frac{x}{2} \\ \sin\ x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \\ \alpha = tg\,0 = 0,\ \beta = tg\,\frac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right| = 4\int\limits_0^1 \frac{tdt}{(5t^2+6t+5)(1+t^2)}.$$

Разложим подынтегральную рациональную дробь на простейшие и получим:

$$4\int\limits_0^1 \frac{tdt}{(5t^2+6t+5)(1+t^2)} = -\frac{2}{3}\left(\int\limits_0^1 \frac{5}{5t^2+6t+5}dt - \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2}\right) =$$

$$=-\frac{2}{3}\left(\int\limits_0^1 \frac{d(t+\frac{3}{5})}{(t+\frac{3}{5})^2+\frac{16}{25}} - arctgt\Big|_0^1\right) = -\frac{2}{3}\left(\frac{5}{4}arctg\frac{5t+3}{4}\Big|_0^1 - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{5}{6}\left(arctg2 - arctg\frac{3}{4}\right).$$

Пример3.2 Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^2 x}{4+3\cos 2x}dx$.

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^2 x}{4+3\cos 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^2 x}{4+3(\cos^2 x-\sin^2 x)}dx.$$

Подынтегральная функция четная относительно $\sin x, \cos x$, поэтому используем подстановку $\boldsymbol{tgx = t}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^2 x}{4+3(\cos^2 x-\sin^2 x)}dx = \left| \begin{array}{l} t = tgx, x = arctgt, dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \alpha = 0, \beta = tg\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{t^2+7} == \int_0^{\sqrt{3}} \frac{(t^2+7-7)dt}{t^2+7} ==$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} dt - 7\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+7} = \sqrt{3} - \sqrt{7}arctg\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Пример 3.3 Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx$.

Решение.

Подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$. Сделаем замену $t = \cos x$. Тогда

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\sin xdx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^8 x}d(-\cos x) = -\int \frac{1-t^2}{t^8}dt =$$

$$= -\int t^{-8}dt + \int t^{-6}dt = |t = \cos x| = \frac{1}{7\cos^7 x} - \frac{1}{5\cos^5 x} + C.$$

4. Интегрирование простейших иррациональных функций.

Интегралы вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m1}{n1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m2}{n2}}, ..\right]dx \qquad (4.1)$$

где R-рациональная функция своих аргументов

m1,n1,m2,n2,… целые числа, вычисляются с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^S$,

(4.2)

где S-общий знаменатель дробей: $\frac{m1}{n1}; \frac{m2}{n2}, ...$

При вычислении интегралов вида: $\int R(x, \sqrt{\pm(a^2 \pm x^2}) dx$, где $\pm(a^2 \pm x^2) \geq 0$ удобно использовать тригонометрические подстановки:

1) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx; \textit{подстановка} \quad x = a \cdot \sin(t)(x = a \cdot \cos(t));$

2) $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx; \textit{подстановка} \quad x = a \cdot tg(t)(x = a \cdot ctg(t));$

3) $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx; \textit{подстановка} \quad x = \dfrac{a}{\cos(t)}(x = \dfrac{a}{\sin(t)}).$

Выражение вида

$x^m (a + bx^n)^p dx$, где m, n, p - рациональные числа, a, b - действительные числа, называется биномиальным дифференциалом.

Интеграл от биноминального дифференциала

$$\int \quad x^m (a + bx^n)^p dx$$

сводится к интегралу от рациональной функции только в следующих случаях:

1). p -целое, подстановка вида (4.2);

2). $p = \dfrac{r}{s}$ – дробное и $\dfrac{m+1}{n}$ - целое, тогда интеграл от биномиального дифференциала рационализируется подстановкой: $a + bx^n = t^s$ (первая подстановка Чебышева);

3). $p = \dfrac{r}{s}$ – дробное и $\dfrac{m+1}{n} + p$ - целое, тогда применяется подстановка $a + bx^n = t^s x^n$ (вторая подстановка Чебышева).

Пример 4.1. Вычислить $\int \dfrac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$

Решение.

$$\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx = \begin{vmatrix} 1 + x = t^6 \\ x = t^6 - 1 \\ dx = 6t^5 dt \\ t = \sqrt[6]{1+x} \end{vmatrix} = \int \frac{(t^6 - 1)^2 + t^3}{t^2} 6t^5 dt = 6 \int (t^{15} - 2t^9 + t^6 + t^3) dt = =$$

$$\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1+x)^8} - \frac{6}{5}\sqrt[3]{(1+x)^5} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{(1+x)^7} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2} + C.$$

Пример 4.2 Вычислить $\int\limits_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t, dx = 3\cos t dt \\ t = \arcsin\frac{x}{3}, \sqrt{9-x^2} = 3\cos t \\ \alpha = 0, \beta = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \end{array} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{9\sin^2 t(3\cos t)dt}{3\cos t} =$$

$$=9\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{9}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{8}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Пример 4.3 Вычислить $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}dx = \int x^{\frac{-7}{5}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{5}}dx,$$

по условию $m = -\frac{7}{5}, n = \frac{1}{3}, p = \frac{1}{5}$. Число p дробное, а $\frac{m+1}{n} + p$=-1-целое. Поэтому будем использовать вторую подстановку Чебышева.

$$\int x^{\frac{-7}{5}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{5}}dx = \left| \begin{array}{l} 1+x^{\frac{1}{3}} = t^5 x^{\frac{1}{3}}, t = \left(\dfrac{1+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{5}}, x = (t^5-1)^{-3}, \\ dx = -15t^4(t^5-1)^{-4}dt, 1+x^{\frac{1}{3}} = t^5(t^5-1)^{-1} \end{array} \right| =$$

$$=-15\int (t^5-1)^{\frac{21}{5}} t(t^5-1)^{\frac{-1}{5}} t^4(t^5-1)^{-4}dt = -15\int t^5dt = -\frac{5}{2}t^6 + C = -\frac{5}{2}(\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}})^{\frac{6}{5}} + C.$$

5. Приложения определенных интегралов.

1) Вычисление площади плоской фигуры.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной функцией $y = f(x), \quad (f(x) \ge 0)$, прямыми $x = a, \quad x = b$ и отрезком $[a, b]$

Оси Ox, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

7. ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ, ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА КОТОРОЙ ЗАДАНА ПАРАМЕТРИЧЕСКИ, ВЫЧИСЛЯЕТСЯ ТАК:

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

где верхняя граница: x=φ(t), y=ψ(t), α≤t≤β.

Площадь фигуры ограниченной двумя непрерывными линиями (рис. 1) равна

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx,$$

где S – площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, ($f_1(x) \geq f_2(x)$), прямыми $x = a, x = b$ (a<b).

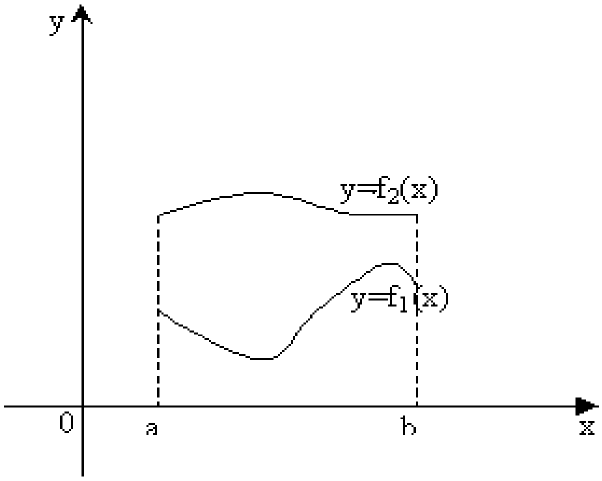


рис.5.1.

8. ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОГО СЕКТОРА В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi,$$

здесь $\rho = \rho(\varphi)$ - кривая, заданная в полярной системе координат, α≤φ≤β.

2) Вычисление длины дуги кривой.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx,$$

где L – длина кривой, заданной уравнением y=f(x), a≤x≤b.

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt,$$

где L – длина кривой, заданной параметрическими уравнениями x=φ(t), y=ψ(t), α≤t≤β.

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi,$$

где L – длина кривой, заданной в полярной системе координат уравнением ρ=ρ(φ), α≤φ≤β.

3) Формулы объемов тел вращения

$$V = \pi \int_{a}^{b} f^2(x)dx,$$

где V – объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции 0≤y≤f(x), a≤x≤b вокруг оси Ox.

$$V = \pi \int_{c}^{d} \varphi^2(y)dy,$$

где V – объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции *0≤x≤φ(y), c≤y≤d* вокруг оси *Oy*.

4) Формулы площадей поверхностей вращения

$$S = 2\pi \int_{c}^{d} \varphi(y)\sqrt{1 + \varphi'^2(y)}dy,$$

где S – площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной уравнением x=φ(y), c≤y≤d, вокруг оси Oy.

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt,$$

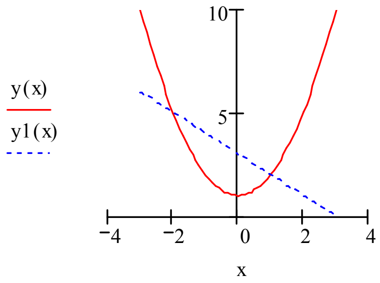
где S – площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной параметрическими уравнениями x=φ(t), y=ψ(t), α≤t≤β.

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin(\varphi)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi,$$

где S – площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, α≤φ≤β.

Пример5.1 Найти площадь фигуры ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $x + y = 3$.

Решение: На рис. 2 представлена фигура площадь которой требуется найти.



Найдем точки пересечения параболы и прямой для этого решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y + x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

При решении квадратного уравнения системы $x^2 + x - 2 = 0$, получаем два корня x_1=-2, x_2=1.

рис. 2.

$f_1(x) = x^2+1$, $f_2(x)=3-x$ (т.к. прямая лежит выше параболы в рассматриваемой области).

Теперь можно вычислить площадь фигуры: $S = \int_{-2}^{1} [(3 - x) - (x^2 + 1)]dx = \int_{-2}^{1} [2 - x - x^2]dx = =$

$$\left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-2}^{1} = 4\frac{1}{2} \text{ (кв.ед.)}$$

Пример 5.2 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$\rho = \cos 2\varphi, \rho = \frac{1}{2}, (\rho \geq \frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4})$$

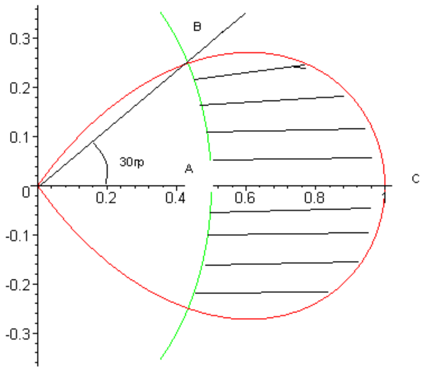


рис.3.

В силу симметричности заштрихованной фигуры, ее площадь

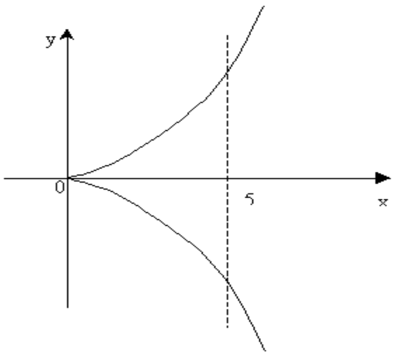
$S = 2S_{ABC}$ Найдем угол, который образует луч OB с полярной осью:

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{1}{2} \\ \rho = \cos 2\varphi \end{cases} \Rightarrow \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Согласно формуле $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi$, имеем:

$$S=2S_{ABC}=2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 2\varphi d\varphi-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{4}d\varphi\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos4\varphi}{2}d\varphi-\frac{\pi}{24}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{1}{4}\sin4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{16}$$



Пример 5.3 Найти длину дуги полукубической параболы $y=x^{3/2}$ от x=0 до x=5 (рис. 4).

Решение: Кривая симметрична относительно оси Ох. Найдем длину верхней ветви кривой. Из уравнения $y=x^{3/2}$ находим $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$. Далее, применяя формулу $L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ получим

$$L=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Bigg|_0^5=\frac{335}{27}\text{ (ед.)}$$

рис.4.

Пример 5.4 Найти длину дуги кривой, заданной параметрически:

$$\begin{cases}x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t\end{cases}\qquad 0\le t\le\pi$$

Решение.

Воспользуемся формулой $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$. Для чего найдем

$$x'=2t\sin t+(t^2-2)\cos t+2\cos t-2t\sin t=t^2\cos t$$

$$y'=-2t\cos t-(2-t^2)\sin t+2\sin t+2t\cos t=t^2\sin t$$

$$L=\int_0^\pi\sqrt{(t^2\cos t)^2+(t^2\sin t)^2}dt=\int_0^\pi t^2dt=\frac{\pi^3}{3}$$

Пример 5.5 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{1}{x},y=x^2,y=2,x=0$

Решение.

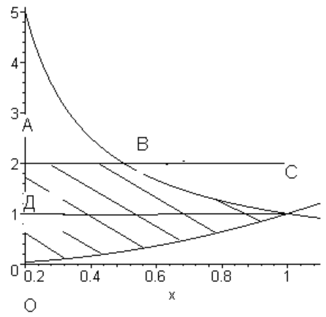


рис5

Так как плоская фигура вращается вокруг оси Oy , то за независимую переменную надо выбрать у.Применим формулу $V = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$

Искомый объем есть сумма объемов двух тел, одно из которых получено вращением вокруг оси Оу криволинейной трапеции ОДС, другое – вращением криволинейной трапеции АВСД

Поэтому

$$V = \pi\int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy + \pi\int_1^2 (\frac{1}{y})^2 dy = \pi(\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{y}\Big|_1^2) = \pi$$

Пример 5.6 Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho = a(1+\cos(\varphi))$ (см. рис.6) вокруг полярной оси.

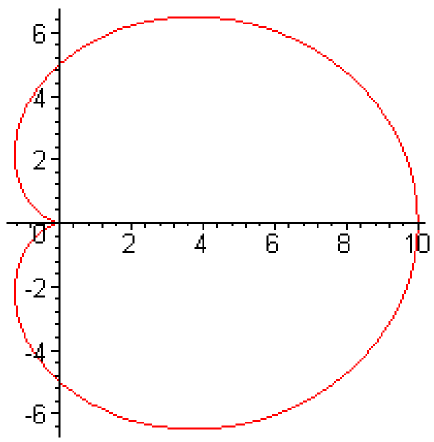


рис.6

Решение: $\rho'(\varphi) = -a\sin(\varphi)$, $\rho^2 + \rho'^2 = 4a^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow$ по формуле

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho\sin(\varphi)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi$$

$$S = 4\pi a^2\int_0^{\pi}(1+\cos(\varphi))\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = 16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = $$

$$= -32\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] = \frac{32}{5}\pi a^2 \text{ (ед. кв.)}$$

Тема 7. Функции нескольких переменных. Практические занятия 15-16.

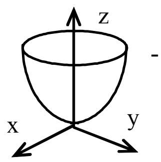
Определение. Функции двух переменных.

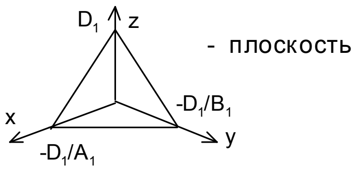
Если $\forall$ упорядоченной паре чисел $(x,y)\in D$ по некоторому закону f ставится в соответствие число $z\in E$, то говорят, что задана функция $z=f(x,y)$. Множество D- область определения, а E - область изменения функции.

Геометрический смысл ФМП - поверхность в пространстве.

Пример.

$Z=x^2+y^2$ задает параболоид, а $Z=A_1x+B_1y+D_1$ - плоскость.



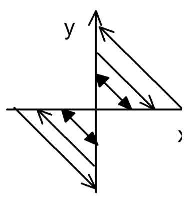


Определение. Функции многих переменных (ФМП.)

Если $\forall(x_1,x_2,...x_n) \overset{f}{\Rightarrow} z\in R$, то говорят, что $z=f(x_1,x_2,...x_n)$- ФМП.

Пример.

Нахождение областей определения ФМП производят с учетом свойств элементарных функций.Если $z=\ln(xy) \Rightarrow xy>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}$,



при $z=\ln(\sin(xy)) \Rightarrow \sin(xy)>0 \Rightarrow 0+2\pi k<xy<\pi+2\pi k$.

Пределы ФМП

Определение.

Число A называют пределом ФМП $z=f(x,y)$ в т.(x_0,y_0),если

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall$пар (x,y) из неравенства $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$

следует $\Rightarrow |f(x,y)-A|<\varepsilon$,

при этом пишут

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A.$$

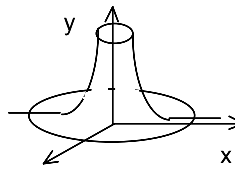
Если A=0, т. е. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$, то функцию f(x,y) называют бесконечно-малой (БМФ) при $(x,y)\to(x_0,y_0)$.

Определение. Бесконечно большой функции.

Если $\forall M>0\ \exists\delta: \forall(x,y)$ из $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2 \Rightarrow |f(x,y)|>M$, при этом пишут $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \infty$ и говорят, что z=f(x,y) бесконечно-большая (ББФ), при $(x,y)\to(x_0,y_0)$.

Геометрический смысл.

$z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$



Определение. Непрерывной функции.

Говорят, что функция f(x,y) непрерывна в т. (x_0,y_0), если $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

ЗАМЕЧАНИЕ

Кроме $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ существуют повторные пределы $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ и $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$, причем из $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \Rightarrow \exists$- повторных пределов, но из $\exists$-я повторных пределов не следует $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Пример.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ -? Найдем $\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0}\dfrac{-y^2}{y^2} = -1$

Но предел, если он существует, единственен, значит не существует предела $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, при $(x,y)\to(0,0)$

Частные производные ФМП

Пусть z=f(x,y) определена в т. $M_0(x_0,y_0)$ и ее окрестности

Назовем разность $x-x_0=\Delta x$- приращением координаты x, а

$y-y_0=\Delta y$- приращением координаты y , тогда для функции z=f(x,y) имеем

$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$- частное приращение по координате x

$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta x)-f(x_0,y_0)$- частное приращение по координате y.

Определение 1. Частной производной по переменной x.

Если существует конечный предел отношения $\Delta_x z$ к Δx при $\Delta x \to 0$, то он называется частной производной по переменной x и обозначается

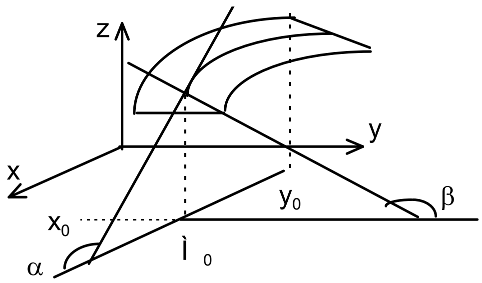
$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{sx \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \ .$$

Определение. Частной производной по переменной y.

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) \overset{def}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

При нахождении частной производной по заданной переменной фиксируются все переменные кроме заданной и частная производная находится как обычная производная функции одной переменной.

Геометрический смысл частных производных



$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = tg\alpha \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = tg\beta$$

Пример.

$z = x^y$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$

$z = \ln xy$, $z'_x = 1/xy \cdot (xy)'_x = y/xy = 1/x$.

$z'_y = 1/xy \cdot (xy)'_y = x/xy = 1/y$.

Определение.

Функция $z=f(x,y)$, называется дифференцируемой в точке $M_0(x_0,y_0)$, если ее приращение $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)$, где $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$, при $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. При этом A,B- константы в точке M_0, $\Delta z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ - полное приращение функции.

Определение.

Дифференциалом функции $z=f(x,y)$ называют выражение $dz = Adx + Bdy$- линейную часть приращения функции $z=f(x,y)$ в т. M_0.

Теорема. Необходимое условие дифференцируемости.

Если $z=f(x,y)$ дифференцируема в т. M_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство.

Т.к. $z=f(x,y)$ дифференцируема в т. $M_0 \Rightarrow \Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)$, тогда

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \Delta z = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} [A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)] = 0$$ т. е.

$z=f(x,y)$ непрерывна по определению.

Теорема. О связи дифференциала и производных.

Если z=f(x,y) дифференцируема в т. M_0 (x_0,y_0), тогда существуют $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)$.

Доказательство.

Из дифференцируемости следует, что $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)$, но тогда

при y=0 $\quad \Delta_x z=A\Delta x+\alpha(\Delta x,0) \Rightarrow \ \exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A$,

при $\Delta x=0 \quad \Delta_y z=B\Delta y+\alpha(0,\Delta y) \Rightarrow \exists \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta y}=B$.

Что и требовалось доказать. При этом дифференциал имеет вид

$$\boxed{dz=z'_x dx+z'_y dy}$$

Теорема. Достаточное условие дифференцируемости ФМП.

Если $\exists z'_x$ и z'_y- непрерывные в т. M_0, то функция z=f(x,y) дифференцируема в т. M_0.

Так как $dz=z-z_0=z'_x(x-x_0)+z'_y(y-y_0)$, то геометрический смысл дифференциала - приращение в т. M_0 аппликаты z- касательной плоскости к графику функции z=f(x,y).

Определение.

Если z=f(x,y) определена на $\forall(x,y)\in D$ и имеют смысл функции x=x(u,v), y=y(u,v), $\forall(u,v)\in D$, то говорят, что задана сложная ФМП z=f(x(u,v), y(u,v)).

Пример.

$z=\ln(\cos(x\cdot y)+tg(x+y))=\ln(\cos u+tg v),\begin{cases} xy=u\\ x+y=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases},$

При нахождении частных производных ФМП применяют следующие теоремы.

Теорема. О производной сложной функции.

Если z=f(x,y) дифференцируема для $\forall$ пар $(x,y)\in D$ и

$\exists x'_t, y'_t$ для $t\in[a,b]$, то производная может быть вычислена по формуле $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$

Доказательство. Из дифференцируемости z=f(x,y) следует $\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)$. Так как $\exists$ x'_t,y'_t ,то x(t) и y(t)- непрерывные, значит $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, при $\Delta t\to 0$, а тогда $\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{\alpha(\Delta x,\Delta y)}{\Delta t}$, $\Delta t\neq 0$.

Переходя к пределу имеем

$$\frac{dz}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[f'_x\frac{\Delta x}{\Delta t}+f'_y\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{\alpha(.)}{\Delta t}\right]=f'_x\frac{dx}{dt}+f'_y\frac{dy}{dt}$$

Теорема. О производной z=f(x(u,v), y(u,v))

Если z=f(x,y) дифференцируема для $\forall(x,y)\in D$ и $\exists \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ для $\forall(u,v)\in D$, тогда справедливы формулы

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}}$$

Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Если существуют первые производные от частных производных найденных ранее, то они называются частными производными высших порядков и обозначаются

если $\exists \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx};\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right)=\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Аналогично первые дифференциалы от дифференциалов, найденных ранее, если dx и dy фиксированы, называют дифференциалами высших порядков и обозначают

$d(d^{n-1}z)\overset{def}{=}d^n z,\ d^2z=f''_{xx}(dx)^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{yy}(dy)^2.$

Пример.

Если $z=x^2y+xy^2$, то

$f'_x=2xy+y^2,\ f'_y=x^2+2xy \Rightarrow f''_{xx}=2y,\ f''_{yy}=2x,\ f''_{xy}=2x+2y.$

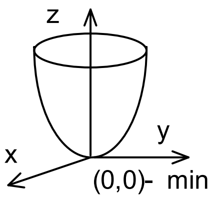
Тогда $d^2z=2ydx^2+4(x+y)2xdy+2xdy^2$.

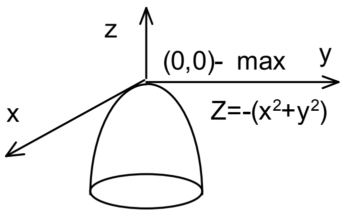
Заметим, что как и для функции одной переменной дифференциал $dz=f'_xdx+f'_ydy$- обладает свойством инвариантности, дифференциалы более высоких порядков- нет.

Экстремумы ФНП

Определение.

Точка M_0- точка максимума (минимума) функции z=f(x,y), если $\exists\delta$- окрестность т. M_0 такая, что для $\forall(x,y)$из этой окрестности $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ $(f(x,y)>f(x_0,y_0))$





Теорема. Необходимое условие экстремума.

Если т. M_0 (x_0,y_0)- точка экстремума, тогда или

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\ \text{или}\ \frac{\partial z}{\partial x}\ \text{и}\ \frac{\partial z}{\partial y}-\nexists\ \text{(не существуют).}$$

В дальнейшем точки в которых $z'_x=0$ и $z'_y=0$ или не $\exists$ назовем критическими.

Теорема . Достаточное условие экстремума.

Пусть т. M_0- критическая, причем

z=f(x,y)- непрерывна в т. M_0

существуют f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy} в т. M_0, тогда

при $\Delta(M_0)=f''_{xx}(M_0)f''_{yy}(M_0)-[f''_{xy}(M_0)]^2>0$, экстремум есть, причем при $f''_x(M_0)<0$- максимум, $f''_{yy}(M_0)>0$- минимум.

Если же $\Delta<0$, экстремума нет, при $\Delta=0$- ничего нельзя сказать о наличии экстремума.

Пример.

$$z=x^2+y^2 \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases} \quad M_0(0,0) \quad \begin{cases}z''_{xx}=2\\ z''_{yy}=2\end{cases}$$

Так как $\Delta(M_0)=2\cdot2-0>0$- экстремум есть, причем $z''_{xx}>0 \Rightarrow$ в точке M_0-минимум.

Если требуется найти экстремум функции $z=f(x,y)$ при условии, что переменные x,y связаны условием $g(x,y)=0$, то задачи такого вида называют задачами на условный экстремум и решают методом множителей Лангража.

Метод множителей Лагранжа.

Пусть требуется найти условный экстремум функции

$$z=f(x,y)$$

при наличии условия

$$g(x,y)=0.$$

Идея метода Лагранжа состоит в том, что:

3. Вводится новая функция трех переменных, называемая функцией Лангража как

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y),$$

где λ- неопределенный множитель, который рассматривается как новая переменная;

4. Ищется экстремум (уже безусловный) этой функции. Для этого вычисляются частные производные первого порядка и приравниваются к нулю:

$$\begin{cases}F'_x(x,y,\lambda)=0,\\ F'_y(x,y,\lambda)=0,\\ F'_\lambda(x,y,\lambda)=0.\end{cases}$$

Полученные уравнения образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными. Решение этой системы представляет собой тройку чисел (x_0, y_0, λ_0), первые два из которых, т. е. (x_0,y_0), и дают координаты точки условного экстремума исходной функции f(x,y).

Применим метод Лагранжа для отыскания экстремума функций [1].

Пример.

Пусть $f(x,y)=x^2-3xy+12x$ при условии $g(x,y)=6-2x-3y=0$.

Функция Лангража имеет вид $F(x,y,\lambda)=x^2-3xy+12x+\lambda(2x+3y-6)$.

Тогда $F'_x(x,y,\lambda)=2x-3y+12+2\lambda$,

$$F'_y(x,y,\lambda)=-3x+3\lambda,$$

$$F'_\lambda(x,y,\lambda)=-6+2x+3y=0.$$

Приравняв к нулю получим систему

$$\begin{cases}2x-3y-2\lambda=-12\\ +3x-3\lambda=0,\\ 2x+3y=6.\end{cases}$$

Решим полученную систему методом исключения. Для этого умножим первое (сверху) уравнение на 3, а второе на -2 и складываем, третье уравнение вычитаем из первого. Этим исключается переменная x и система принимает вид:

$$\begin{cases} -9y + 12\lambda = -36, \\ -6y + 2\lambda = -18. \end{cases}$$

Теперь исключаем переменную λ, умножая второе уравнение на -6, и складывая с первым. В результате

-27y=72⇒Y=8/3.

Подставляя это значение в уравнение, находим сначала λ, затем x:

λ=-1; x=-1.

Значит координаты точки условного экстремума (-1, 8/3). Соответствующее значение функции

$$f(-1, 8/3)=(-1)^{2}\cdot -3\cdot(-1)\cdot(8/3)+12\cdot(-1)=-3.$$

Тема 8. Кратные интегралы. Практические занятия 17-18.

Записать двойной интеграл $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ в виде повторных интегралов (двумя способами), если область (D) – квадрат, ограниченный прямыми $x+y=1, x-y=1, y-x=1, x+y=-1$.

Решение

Строим на чертеже область интегрирования (D) (рис.1.9). Пусть постоянны пределы интегрирования по x. Ими будут –1 и +1. Проведем через область (D) луч, параллельный и одинаково направленный с осью Oy. Как нижняя, так и верхняя границы области состоят из двух отрезков, пересекающихся соответственно в точках (0,–1) и (0,1).

Поэтому разобьем область (D) на две части прямой $x=0$. Тогда получим:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x-1}^{x+1} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x-1}^{-x+1} f(x,y)dy.$$

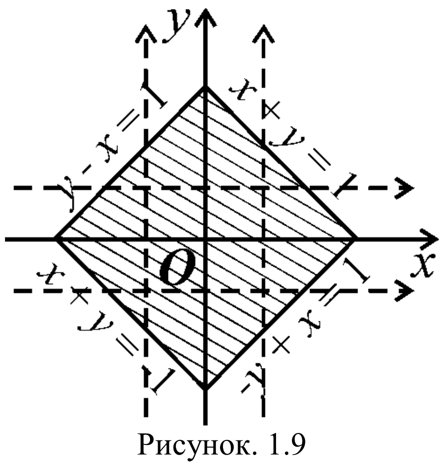


Рисунок. 1.9

Аналогично при выборе постоянных пределов по y получим:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-y-1}^{y+1} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y-1}^{-y+1} f(x,y)dx.$$

ПРИМЕР 3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_{0}^{2/3} dx \int\limits_{2x}^{2-x} f(x,y)dy$$

Решение

Решение данной задачи состоит из двух частей:

а) восстановить область интегрирования (D) по известным пределам данного повторного интеграла;

б) записать повторный интеграл с постоянными пределами по y и переменными по x.

Так как внутренний интеграл взят по y, то, следовательно, пределы внутреннего интеграла получены из уравнений $y = 2x$ и $y = 2 - x$. Это уравнения прямых, которые составляют какую-то часть границы области интегрирования (D). Изобразим прямые на чертеже (рис.1.10). Решая совместно уравнения $y = 2x$ и $y = 2 - x$, найдем точку пересечения этих прямых $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Так как дано, что абсцисса x точек области (D) изменяется в пределах от 0 до $\frac{2}{3}$, то можно заключить, что искомой областью (D) является фигура, ограниченная линиями $x = 0$, $y = 2x$ и $y = 2 - x$.

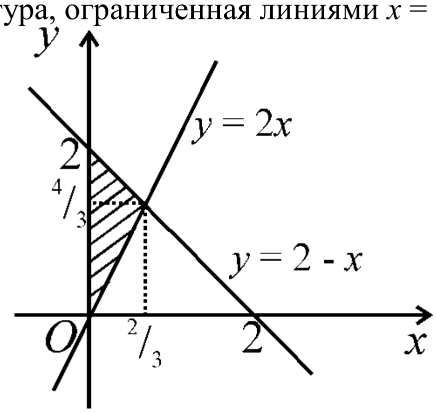


Рисунок. 1.10

Расставляя теперь внешние пределы интегрирования по y, а внутренние по x, получаем:

$$\int\limits_{0}^{4/3} dy \int\limits_{0}^{y/2} f(x,y)dx + \int\limits_{4/3}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)dx.$$

ПРИМЕР 4. Изменить порядок интегрирования

$$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{\frac{x^2}{9}}^{1} f(x,y)dy.$$

Решение

а) Восстановим область интегрирования (D). Рассматривая оба слагаемых одновременно, заключаем, что нижний предел внутреннего интеграла на участках $0 \le x \le 1$ и $1 \le x \le 3$ выражается через x одинаково: (парабола). Верхним же пределом на участке $0 \le x \le 1$ является прямая $y = x$, а на участке $1 \le x \le 3$ - прямая $y = 1$. Этого достаточно, чтобы построить область (D) (рис. 1.11).

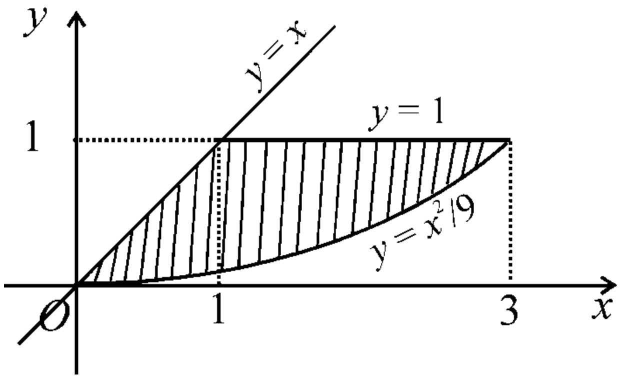


Рисунок. 1.11

б) Из чертежа (см. рис. 1.11) видно, что постоянными пределами по y являются числа 0 и 1. Нижним пределом изменения x будет $x = y$, а верхним – $x = 3\sqrt{y}$. Корень берем с положительным знаком потому, что все точки области (D) имеют неотрицательные абсциссы. Искомый повторный интеграл представится в виде:

$$\int_0^1 dy \int_y^{3\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

ПРИМЕР 5. Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_{(D)} \sqrt{x+y}dxdy$, где область ($D$) ограничена прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

Решение

Область (D) изображена на рисунке 1.12.

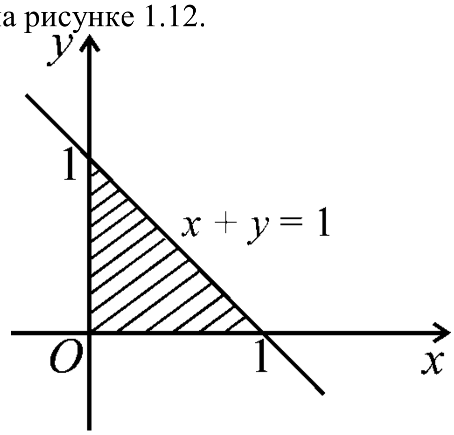


Рисунок. 1.12

Возьмем постоянные пределы по переменной x, $0 \le x \le 1$. Тогда по y нижним пределом будет $y = 0$, а верхним $y = 1 - x$. Получим:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}dy = \int_0^1 \frac{2}{3}\left[(x+y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{1-x} dx = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{3}{2}}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[x - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}.$$

9. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл $\iint\limits_{(D)}(2x-y)dxdy$, где ($D$) – параллелограмм, ограниченный прямыми: $x + y = 1$, $x + y = 2$, $2x - y = 1$, $2x - y = 3$. (*)

Решение

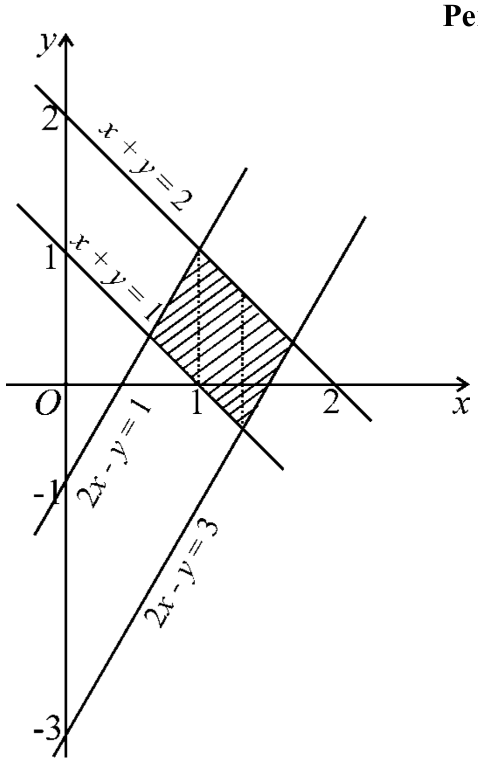


Рисунок. 1.16

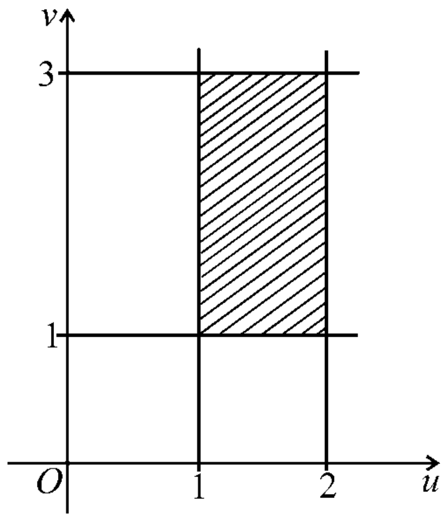


Рисунок. 1.17

Изобразим область (D) на рисунке 1.16. Из рисунка видно, что для вычисления данного интеграла область (D) следует разбить на три части, как показано штриховыми линиями. Задача, таким образом, сводится к вычислению трех двойных интегралов. Однако можно избежать такого громоздкого способа решения, если ввести новые переменные, положив:

$$x + y = u,\ 2x - y = v. \qquad (**)$$

Тогда прямые $x + y = 1$, $x + y = 2$ в системе координат xOy преобразуются в прямые $u = 1$, $u = 2$ в системе координат uOv (рис. 1.17), а прямые $2x - y = 1$, $2x - y = 3$ преобразуются в прямые $v = 1$, $v = 3$. Параллелограмм (D) преобразуется в прямоугольник (Q) со сторонами, параллельными координатным осям.

При преобразовании интеграла к новым переменным необходимо сначала получить выражения x и y через u и v из равенств (*) и (**):

$$x = \frac{u+v}{3},\ y = \frac{2u-v}{3}.$$

Используя формулу (1.6) вычислим якобиан данного преобразования:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Так как якобиан отличен от нуля, то выбранное преобразование области (D) в область (Q) будет взаимно однозначным. Кроме того, как функция $f(x,y) = 2x - y$, так и функции

$\frac{u+v}{3}, \frac{2u-v}{3}$ вместе со своими частными производными являются непрерывными. Следовательно, по формуле (1.7) имеем:

$$\iint\limits_{(D)} (2x-y)dxdy = \iint\limits_{(D)} \frac{1}{3}vdudv = \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^3 vdv =$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 \left[\frac{v^2}{2}\right]_1^3 du = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)\int_1^2 du = \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

Если подынтегральная функция или уравнение границы области интегрирования содержат сумму $x^2 + y^2$, то в большинстве случаев упрощение интеграла достигается преобразованием его к полярным координатам. Это объясняется тем, что данная сумма в полярных координатах получает весьма простое выражение

$$(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = \rho^2.$$

Если в состав подынтегральной функции или уравнения границы области интегрирования входит сумма вида $ax^2 + by^2$; $a > 0$, $b > 0$, то пользуются «обобщенной» полярной системой координат:

$$x = \frac{\rho}{\sqrt{a}}\cos\varphi, y = \frac{\rho}{\sqrt{b}}\sin\varphi.$$

Тогда $ax^2 + by^2 = a\left(\frac{\rho}{\sqrt{a}}\cos\varphi\right)^2 + b\left(\frac{\rho}{\sqrt{b}}\sin\varphi\right)^2 = \rho^2,$

а якобиан преобразования в этом случае $J(\rho,\varphi) = \frac{\rho}{\sqrt{ab}}$ (убедится самостоятельно).

ПРИМЕР 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(D)} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, где ($D$) – верхний полукруг $x^2 + y^2 \le 1$.

Решение

Преобразуем интеграл к полярным координатам:

$$x^2 + y^2 \le 1.$$

Тогда $x^2 + y^2 = \rho^2$,

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-\rho^2}, \ |J(\varphi,\rho)| = \rho,$$

и данный интеграл примет вид:

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \iint\limits_{(Q)} \sqrt{1-\rho^2}\rho d\varphi d\rho.$$

Рассмотрим область интегрирования (D) (рис. 1.18).

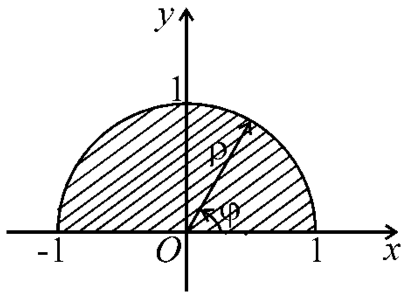


Рисунок. 1.18

Уравнение ее границы в полярных координатах примет вид:

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 1,$$

т.е. $\rho^2 = 1$, или $\rho = 1$ (предполагается, что полярная ось совпадает с положительным направлением оси абсцисс). В пределах данной области (D) полярный угол φ изменяется от 0 до π, а полярный радиус ρ изменяется в пределах от 0 до 1.

Следовательно,

$$I = \iint\limits_{(Q)} \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\varphi d\rho = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho = \pi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\pi\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\pi.$$

ПРИМЕР 3. Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, где область ($D$) ограничена окружностями $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ и прямыми $y = x$, $y = 2x$.

Решение

Область (D) изображена на рисунке 1.19. Перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда подынтегральная функция

$$f(x,y) = \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \rho^{-4}.$$

Криволинейные участки границы области задаются уравнениями:

$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 4\rho\cos\varphi$, или $\rho = 4\cos\varphi$,

$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 8\rho\cos\varphi$, или $\rho = 8\cos\varphi$,

а прямолинейные участки уравнениями:

$\rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi$, или $\mathrm{tg}\varphi = 1$, откуда $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

$\rho\sin\varphi = 2\rho\cos\varphi$, или $\mathrm{tg}\varphi = 2$, откуда $\varphi = \mathrm{arctg}2$;

Итак, угол φ изменяется в постоянных пределах от $\frac{\pi}{4}$ до arctg2. Чтобы найти пределы изменения ρ, пересечем область (D) лучом, исходящим из полюса. При входе в область он пересечет границу $\rho = 4\cos\varphi$, при выходе - границу $\rho = 8\cos\varphi$. Следовательно, $4\cos\varphi$ - нижняя граница интегрирования, а $8\cos\varphi$ - верхняя граница.

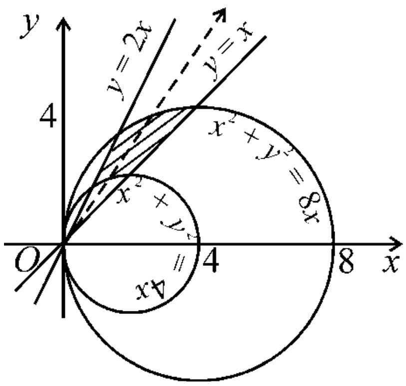


Рисунок. 1.19

Имея в виду, что при данном преобразовании якобиан $|J(\varphi,\rho)|=\rho$, можем представить двойной интеграл в новых координатах следующим образом:

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\text{arctg}2}d\varphi\int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}\rho^{-4}\rho d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\text{arctg}2}d\varphi\int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}\frac{d\rho}{\rho^3}=-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{arctg2}\left.\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right|_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{3}{128}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{arctg2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{3}{128}tg\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{arctg2}=\frac{3}{128}.$$

ПРИМЕР 4. При какой замене переменных криволинейный четырехугольник (D), ограниченный линиями $xy = 1$, $xy = 2$, $x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$ ($x > 0$, $y > 0$), перейдет в прямоугольник (Q), стороны которого параллельны координатным осям?

Решение

Криволинейный четырехугольник (D) изображен на рисунке 1.20. Обозначим новые переменные через u и v. В системе координат uOv по условию задачи прямоугольник(Q) должен быть ограничен некоторыми прямыми, параллельными координатным осям, $u = u_1$, $u = u_2$, $v = v_1$, $v = v_2$. Из уравнений заданных линий

$$xy=1,\qquad x-y=-1,$$
$$xy=2,\qquad x-y=1$$

видно, что при $xy = u$, $x - y = v$ получится требуемое преобразование. Прямоугольник (Q) будет ограничен прямыми $u = 1$, $u = 2$, $v = -1$, $v = 1$ (рис. 1.21).

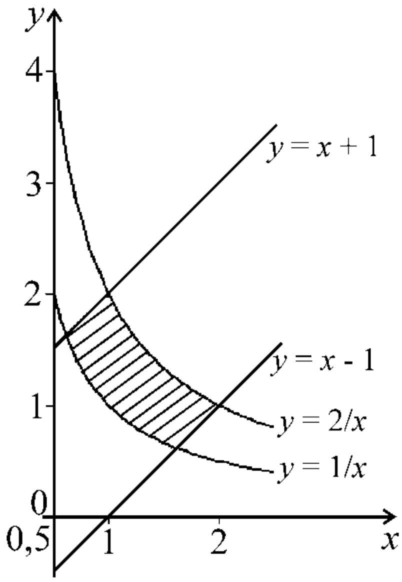


Рисунок. 1.20

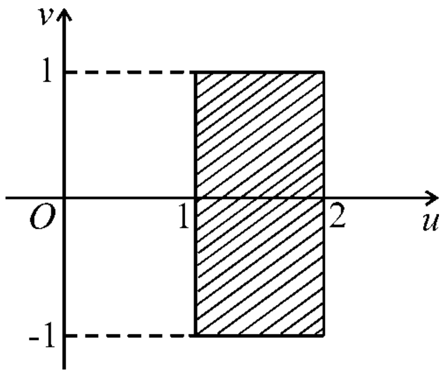


Рисунок. 1.21

10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

ПРИМЕР 2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(x^2+y^2)^3 = 2x^5 \qquad (❖)$$

Решение

В данном случае, для того, чтобы представить на рисунке (рис.1.23) данную плоскую фигуру, необходимо предварительно провести исследование ее контура по заданному уравнению. Контур задан уравнением шестой степени относительно x и y.

В первую очередь отметим, что уравнение не меняется при замене y на $-y$, и потому кривая симметрична относительно оси абсцисс. Кроме того, из уравнения видно, что $x \geq 0$, и потому кривая расположена справа от оси ординат.

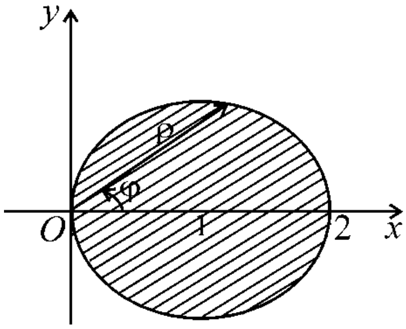


Рисунок. 1.23

Дальнейшее исследование методами дифференциального исчисления в данном случае весьма затруднительно, поэтому перейдем к полярным координатам, положив $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$. Подставляя в (❖), получим: $\rho^6 = 2\rho^5\cos^5\varphi$, или $\rho = 2\cos^5\varphi$.

По этому уравнению видно, что каждому значению угла φ следует одно значение радиуса ρ. Кроме того, наибольшее значение ρ = 2 достигается при φ = 0, наименьшее – ρ = 0 при $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, т.е. при изменении φ от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ величина ρ монотонно убывает от значения 2 до 0. Это дает возможность установить форму части кривой, расположенной в первой четверти. После того как выяснена форма заданной плоской фигуры и сделан чертеж, можно приступить к нахождению площади фигуры. Симметричность фигуры относительно оси Ox позволяет ограничиться вычислением площади ее части, лежащей в первой четверти. Получим[§]:

$$S=\iint\limits_{(D)}\rho d\varphi d\rho=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos^5\varphi}\rho d\rho=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]\Bigg|_0^{2\cos^2\varphi}d\varphi=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}\varphi d\varphi=$$

$$=4\cdot\frac{9!!}{10!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{63}{64}\pi.$$

ПРИМЕР 3. Вычислить площадь параболического сегмента, ограниченного параболой $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$ и осью Ox.

Решение

Введем новые координаты, положив

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=u,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=v.$$

Тогда в системе координат uOv уравнение параболы примет обычный вид: $u^2=v$ (рис.1.24).

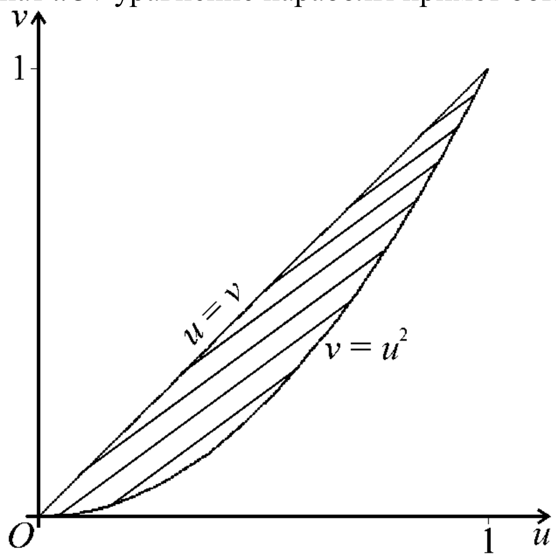


Рисунок. 1.24

Оси абсцисс ($y=0$) в старой системе координат будет соответствовать в новой системе координат прямая $u=v$.

Найдем якобиан преобразования:

$$x=\frac{a}{2}(u+v),\ y=\frac{b}{2}(u-v),$$

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{a}{2} & \frac{a}{2}\\ \frac{b}{2} & -\frac{b}{2}\end{vmatrix}=-\frac{ab}{4}-\frac{ab}{4}=-\frac{ab}{2}.$$

[§] Символ !! означает факториал по четным.

При вычислении интеграла возьмем постоянные пределы интегрирования по $u(0 \le u \le 1)$. Тогда переменными пределами по v будут: u^2 – нижний, u – верхний. Таким образом, получим:

$$S = \iint\limits_{(D)} dxdy = \int_0^1 du \int_{u^2}^{u} \frac{ab}{2} dv = \frac{ab}{2} \int_0^1 [v]\Big|_{u^2}^{u} du = \frac{ab}{2} \int_0^1 \left(u - u^2\right) du = \frac{ab}{2} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{2} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{ab}{12}$$

Вычисление объемов тел

ПРИМЕР 1. Вычислить объем прямого бруса, ограниченного сверху параболоидом $z = 4 - x^2 - y^2$ и имеющего основанием квадрат, ограниченный в плоскости xOy прямыми $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

Решение

Прежде всего, делаем чертеж (рис.1.24). В данном случае подынтегральной функцией будет $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. Она всюду положительна на указанном квадрате.

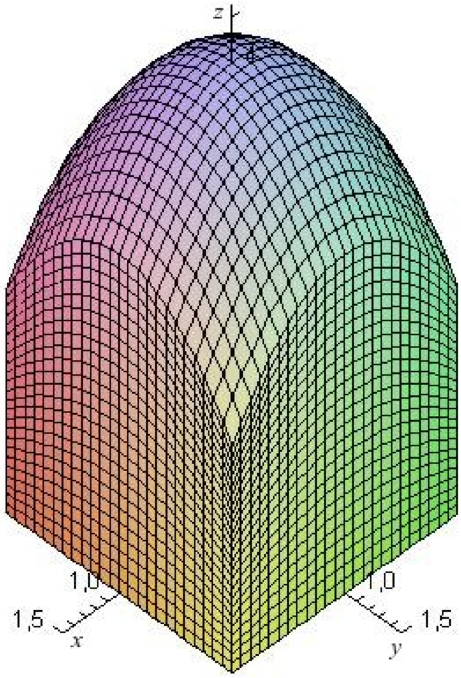


Рисунок. 1.24

Так как основанием бруса служит прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям Ox и Oy, то пределы интегрирования по обеим переменным постоянны. По формуле (1.2*)

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x, y) dxdy$$

получим:

$$V = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \left(4 - x^2 - y^2\right) dy = \int_{-1}^{1} \left[4y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]\Bigg|_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{1} \left(8 - 2x^2 - \frac{2}{3} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{22}{3} x - \frac{2}{3} x^3 \right]\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{44}{3} - \frac{4}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Задачу вычисления интеграла можно упростить, используя симметричность бруса относительно координатных плоскостей xOz и yOz, т.е. записав

$$V = 4\int_0^1 dx \int_0^1 \left(4 - x^2 - y^2\right) dy .$$

ПРИМЕР 2. Вычислить объем шара, ограниченного сферой

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Решение

В силу симметричности данного шара относительно координатных плоскостей, очевидно, достаточно ограничиться вычислением объема его восьмой части, расположенной в первой октанте (рис. 1.25).

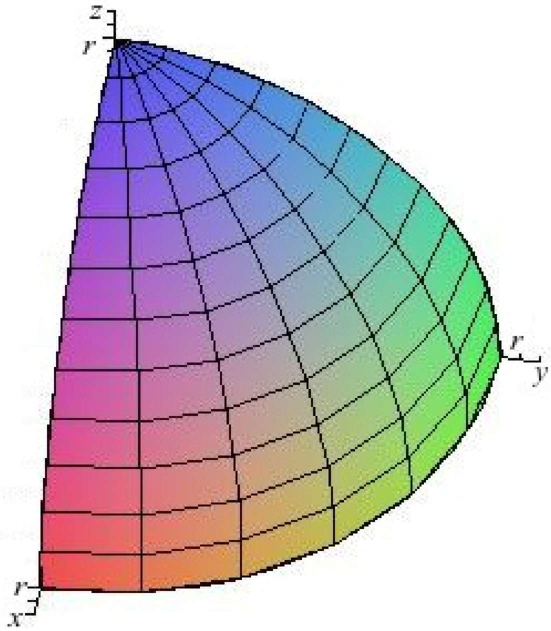


Рисунок. 1.25

Подынтегральной функцией будет $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (корень берем с положительным знаком потому, что рассматриваемая часть шара расположена над плоскостью xOy).

Чтобы установить пределы интегрирования в формуле (1.2*), необходимо сначала установить область интегрирования. Она ограничена пересечением плоскости xOy с поверхностью шара. Чтобы получить это пересечение, положим в уравнении поверхности шара z = 0.

Полученная окружность $x^2 + y^2 = R^2$ и будет контуром области задания функции $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

При нашем упрощении задачи областью интегрирования будет часть круга, расположенная в первой четверти плоскости xOy. Взяв постоянные пределы интегрирования по x ($0 \le x \le R$), получим пределы по y: 0 – нижний, $\sqrt{R^2 - x^2}$ - верхний. По формуле (6) будем иметь:

$$\frac{1}{8}V = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dy .$$

Для вычисления внутреннего интеграла сделаем подстановку $y = \sqrt{R^2 - x^2}\sin t$. Тогда

$dy = \sqrt{R^2 - x^2}\cos t dt$ и

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(R^2 - x^2\right)\cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{4}\left(R^2 - x^2\right)$$

(пока x постоянная!). Следовательно, $\frac{1}{8}V = \frac{\pi}{4}\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = \frac{\pi R^3}{6}$, откуда

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно было воспользоваться и переходом к полярной системе координат.

ПРИМЕР 3. Вычислить объем тела, ограниченного снизу плоскостью xOy, сверху плоскостью $2 - x - y - 2z = 0$, с боков цилиндрической поверхностью $y = x^2$ и плоскостью $y = x$.

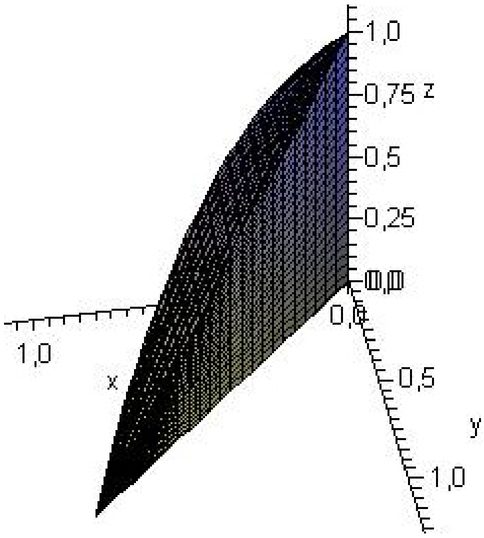


Рисунок. 1.26

Решение

Данное тело изображено на рисунке 1.26. Подынтегральная функция $f(x,y) = \frac{1}{2}\left(2 - x - y\right)$. Область интегрирования (D) ограничена прямой $y = x$ и параболой $y = x^2$. При определении пределов интегрирования пользуемся уже известным приемом. Получим $0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x$ и по формуле (1.2*)

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x \frac{1}{2}(2 - x - y)dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[2y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2x - \frac{7}{2}x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\right) = \frac{11}{120}.$$

ПРИМЕР 4. Оси двух круговых цилиндров с одинаковыми поперечными сечениями пересекаются под прямым углом. Вычислить объем общей части этих цилиндров.

Решение

Обозначим радиус поперечного сечения каждого из цилиндров через r. Выберем прямоугольную систему координат в пространстве таким образом, чтобы оси цилиндров совпадали с осями Oy и Oz. Тогда уравнения цилиндрических поверхностей будут иметь вид: $x^2+z^2=r^2$ - цилиндрическая поверхность с осью симметрии Oy, $x^2+y^2=r^2$ - цилиндрическая поверхность с осью симметрии Oz. На рисунке (1.27) отмечена одна восьмая часть тела, получаемого указанным сечением двух цилиндрических тел.

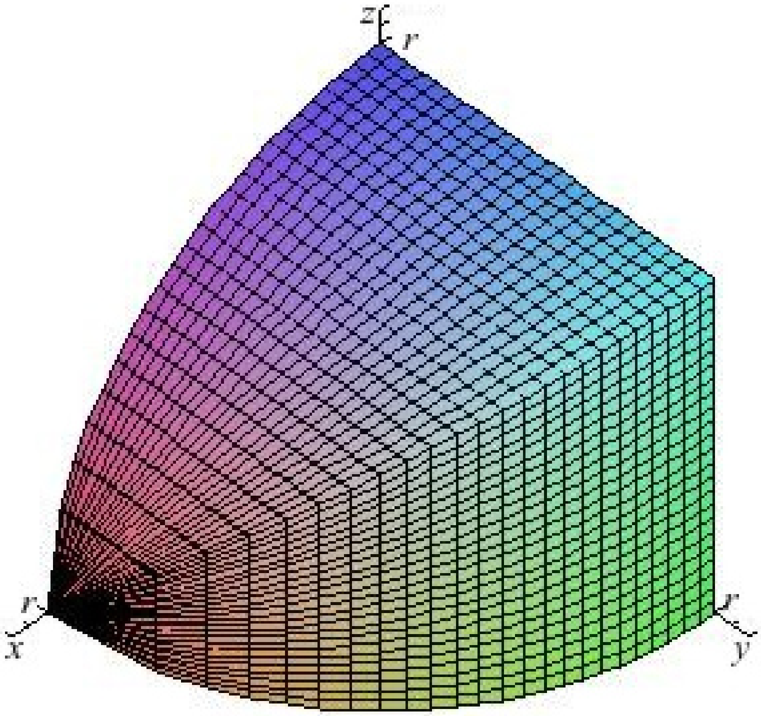


Рисунок. 1.27

Подынтегральной функцией будет, очевидно, разрешенное относительно y уравнение поверхности цилиндра с осью симметрии Oy, т.е. $f(x,y)=\sqrt{r^2-x^2}$. Проектируя ее часть, отрезанную второй поверхностью и содержащуюся в первом октанте, получим область интегрирования при вычислении объема выделенной на рисунке части тела. Ею будет часть круга $x^2+y^2\le r^2$, расположенная в первой четверти плоскости xOy. Если по x взять постоянные пределы ($0\le x\le r$), то по y будут пределами: 0 - нижний предел, а $\sqrt{r^2-x^2}$ - верхний. Тогда

$$\frac{1}{8}V=\int_0^r dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\sqrt{r^2-x^2}\,dy=\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=r^3-\frac{r^3}{3}=\frac{2}{3}r^3.$$

Следовательно, $V=8\cdot\frac{2}{3}r^3=\frac{16}{3}r^3$

ПРИМЕР 5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=4x, z=x, z=2x$

Решение

Поверхность $x^2+y^2=4x$ есть круговой цилиндр, ось которого совпадает с осью Oz, а $z=x$ и $z=2x$ - плоскости, проходящие через ось Oy под разными углами наклона к плоскости xOy. Эти плоскости, пересекая цилиндр, вырезают из него клинообразный слой (рис.1.28), объем которого и требуется вычислить.

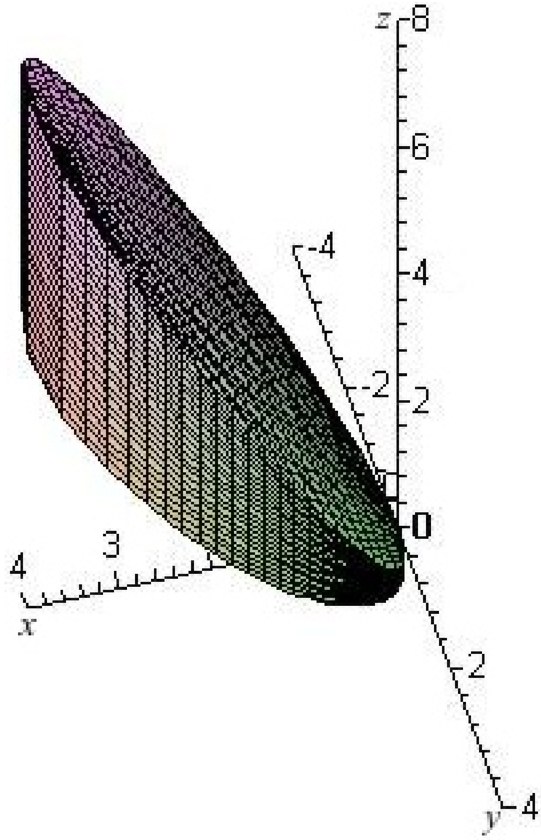


Рисунок. 1.28

Сам слой не является цилиндрическим брусом, и потому его объем не может быть вычислен непосредственно по формуле (1.2*). Однако его можно рассматривать как разность двух цилиндрических брусов, срезанных сверху плоскостями $z=2x\left[f(x,y)=2x\right]$ и $z=x\left[f(x,y)=x\right]$. Пределы изменения для x и y находим из уравнения контура области интегрирования $x^2+y^2=4x$. Здесь удобнее взять постоянные пределы по $x\left(0\le x\le 4\right)$. Тогда по y будут: 0 – нижний предел, $\sqrt{4x-x^2}$ - верхний предел, и искомая половина объема тела представится в виде:

$$\frac{1}{2}V=\int_0^4 dx\int_0^{\sqrt{4x-x^2}}2x\,dy-\int_0^4 dx\int_0^{\sqrt{4x-x^2}}x\,dy=4\pi$$

Следовательно, $V=8\pi$.

11. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ПРИМЕР 1. Вычислить площадь той части плоскости $6x+3y+2z=12$, которая заключена в первом октанте (рис.1.29).

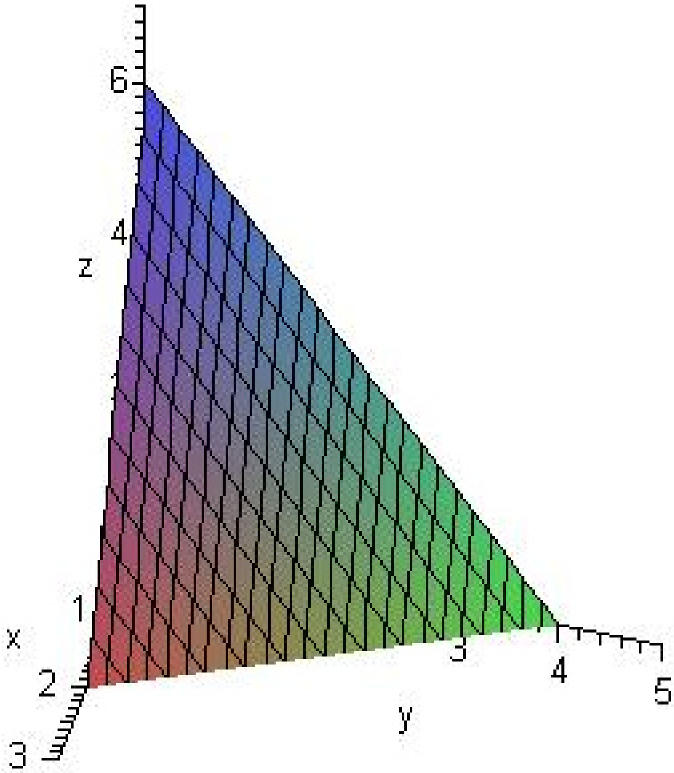


Рисунок. 1.29

Решение

Имеет место формула

$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \qquad (1.10)$$

Мы имеем: $z = 6 - 3x - \frac{3}{2}y,\ z'_x = -3,\ z'_y = -\frac{3}{2}$ и

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + 9 + \frac{9}{4}} = \frac{7}{2}.$$

Проекцией данной плоскости на плоскость xOy является треугольник, ограниченный координатными осями Ox, Oy и прямой $6x + 3y = 12$ (последняя получается из уравнения данной плоскости при $z = 0$). Получим:

$$S = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} \frac{7}{2} dy = \frac{7}{2}\int_0^2 [y]\Big|_0^{4-2x} dx = \frac{7}{2}\int_0^2 (4 - 2x)dx = \frac{7}{2}\left[4x - x^2\right]\Big|_0^2 = \frac{7}{2}\cdot 4 = 14.$$

ПРИМЕР 2. Вычислить площадь части поверхности $2z = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2$.

Решение

Контуром проекции вырезанной части на плоскость xOy является лемниската $\sqrt{1 + x^2 + y^2}$ (рис.1.30).

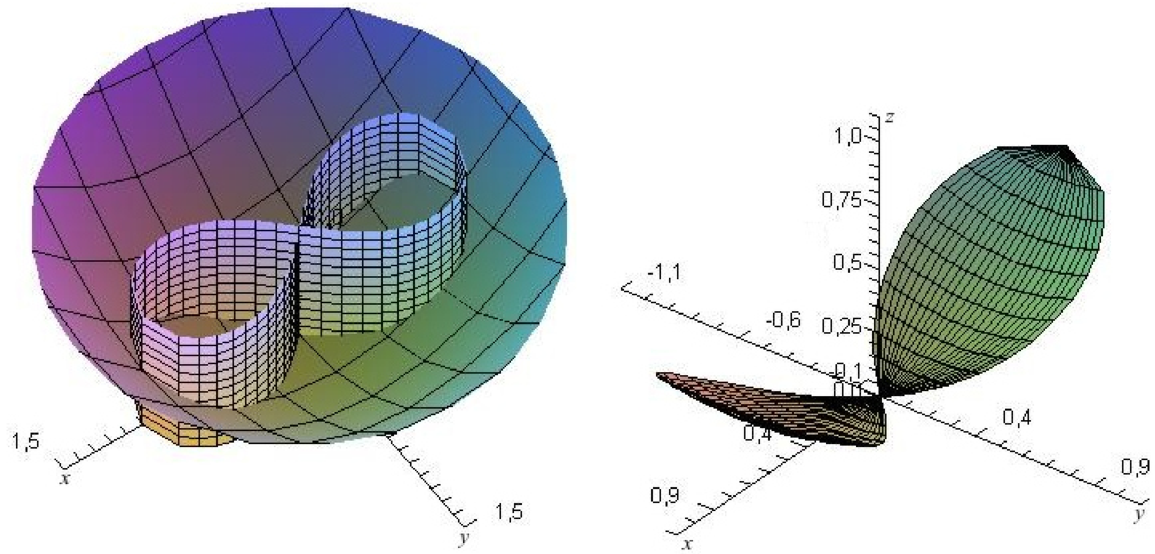


Рисунок. 1.30

Цилиндр вырезает из параболоида два равных куска поверхности. Чтобы вычислить их общую площадь, воспользуемся формулой (1.10). Для нее из уравнения параболоида $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ получим подынтегральную функцию. $z'_x=x,\ z'_y=y$, $\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}$. Следовательно, $S=\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$. Преобразуем интеграл к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$. Подынтегральная функция запишется в виде $\sqrt{1+x^2+y^2}=\sqrt{1+\rho^2}$, а уравнение лемнискаты – в виде $\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)^2=\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi$, или $\rho^4=\rho^2\cos 2\varphi,\ \rho=\pm\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Так как параболоид и цилиндр симметричны относительно плоскостей *xOz*, *yOz*, то достаточно вычислить интеграл по одной четвертой части лемнискаты, расположенной в первой четверти плоскости *xOz*. Следовательно, пределами интегрирования будут: $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ 0\le\rho\le\sqrt{\cos 2\varphi}$. Получим: $\frac{1}{4}S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{5}{9}-\frac{\pi}{12}$, откуда $S=4\cdot\left(\frac{5}{9}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{20}{9}-\frac{\pi}{3}$.

12. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ К МЕХАНИКЕ

ПРИМЕР 1. Найти массу квадратной пластинки со стороной $2a$, если плотность материала пластинки пропорциональна квадрату расстояния от точки пересечения диагоналей и на углах квадрата равна единице.

Решение

Пластинку естественно расположить в прямоугольной системе координат таким образом, чтобы точка пересечения диагоналей совпадала с началом координат, а стороны были параллельны координатным осям (рис. 1.31).

Масса плоской фигуры вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_{(D)} \rho(x, y)dxdy,$$

где $\rho(x,y)$ - плотности распределения массы по плоской фигуре.

Если плоская фигура однородная, то $\rho(x,y)$ есть величина постоянная.

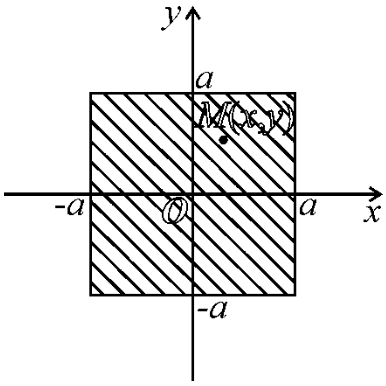


Рисунок. 1.31

После этого можно составить функцию плотности $\rho(x,y)$ материала пластинки по условиям задачи. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка квадрата $\left(|x| \le a, |y| \le a\right)$. Тогда квадрат расстояния от точки пересечения диагоналей (начало координат) будет равен $x^2 + y^2$. Следовательно, плотность в точке M представится в виде $\rho(M) = \rho(x,y) = k(x^2 + y^2)$, где k – коэффициент пропорциональности. Чтобы найти числовое значение этого коэффициента, используем известное значение плотности на углах квадрата. Возьмем, например, вершину угла (a, a). Тогда получим: $1 = k(a^2 + a^2)$, откуда $k = \dfrac{1}{2a^2}$.

Подставляя найденное значение k в выражение функции плотности, окончательно получим: $\rho(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2a^2}$. Теперь остается только вычислить двойной интеграл $m = \dfrac{1}{2a^2}\iint\limits_{(D)}\left(x^2 + y^2\right)dxdy$.

Учитывая, что подынтегральная функция четная относительно x и y (т.е. плотность симметрична относительно начала координат), можем ограничиться вычислением интеграла только по одной четвертой части области (D), расположенной в первой четверти

$$m = \frac{2}{a^2}\int_0^a dx \int_0^a \left(x^2 + y^2\right)dy = \frac{2}{a^2}\int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^a dx =$$

$$= \frac{2}{a^2}\int_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3}\right)dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{ax^3}{3} + \frac{a^3 x}{3}\right]_0^a = \frac{2}{a^2}\cdot\frac{2a^4}{3} = \frac{4}{3}a^2.$$

ПРИМЕР 2. Найти статические моменты относительно осей координат сегмента эллипса

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, ограниченного прямой $bx+ay=ab$ (рис. 1.32).

Решение

В данной задаче о плотности ничего не упоминается. Следовательно, она предполагается постоянной и равной единице и масса фигуры численно равна ее площади. Отсюда получаем:

$$M_x=\iint\limits_{(D)} ydxdy=\int\limits_0^a dx\int\limits_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} ydy=\frac{ab^2}{6},$$

$$M_y=\iint\limits_{(D)} xdxdy=\int\limits_0^a xdx\int\limits_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy=\frac{a^2b}{6}$$

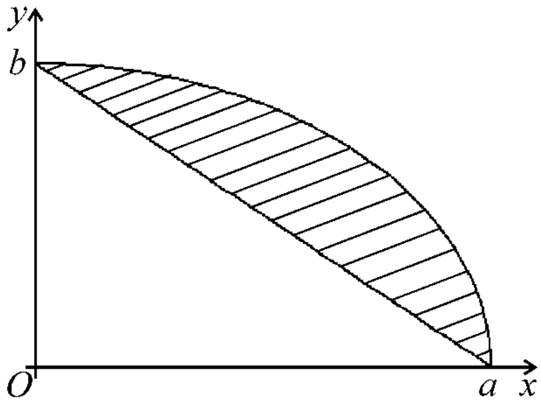


Рисунок. 1.32

ПРИМЕР 3. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной двумя параболами $y^2=x$ и $y=x^2$.

Решение

Для нахождения координат центр тяжести (ξ,η) достаточно вычислить по заданной области три интеграла, определяющие массу и статические моменты этой области (рис.1.33):

$$m=\iint\limits_{(D)} dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy=\frac{1}{3},$$

$$M_x=\iint\limits_{(D)} ydxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} ydy=\frac{3}{20},$$

$$M_y=\iint\limits_{(D)} xdxdy=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy=\frac{3}{20}.$$

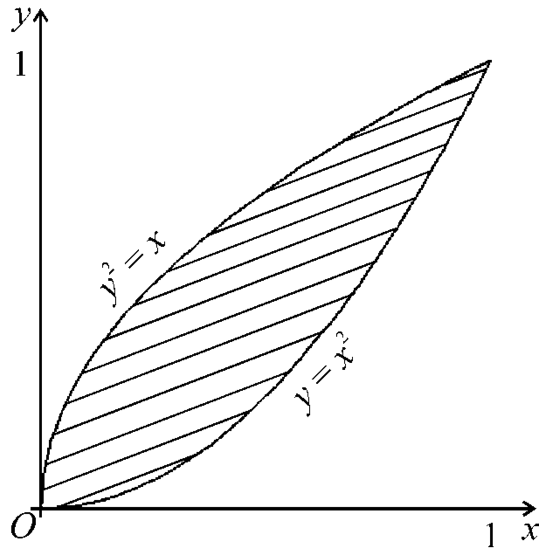


Рисунок. 1.33

Координаты $\xi;\eta$ центра тяжести равны:

$$\xi = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20},$$

$$\eta = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}.$$

Следовательно, $\xi = \eta = \dfrac{9}{20}$.

ПРИМЕР 4. Найти момент инерции круга радиуса r относительно точки, лежащей на окружности.

Решение

Составим уравнение окружности, проходящей через начало координат:

$$x^2 + y^2 = 2rx$$

и вычислим момент инерции I_O. Получим: $I_O = \iint\limits_{(D)} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$.

Вычислим интеграл I_O в полярных координатах.

В полярной системе координат уравнение данной окружности представится в виде $\rho = 2r\cos\varphi$. Получим:

$$I_O = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2r\cos\varphi} \rho^3 d\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2r\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16r^4\cos^4\varphi d\varphi = 2r^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= 2r^4\left([\varphi]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin\varphi]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}[\varphi]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8}[\sin 4\varphi]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{3}{2}\pi r^4.$$

ПРИМЕР 5. Вычислить момент инерции площади эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ относительно оси ординат.

Решение

$$I_y=\iint\limits_{(D)}x^2dxdy=4\int\limits_0^a x^2dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy=\frac{\pi a^3b}{4}$$

ПРИМЕР 6. Вычислить момент инерции площади, ограниченной параболой $y^2=ax$ и прямой $x=a$ относительно прямой $y=-a$.

Решение

Как видно из чертежа (рис. 1.34), расстояние любой точки (x,y) фигуры (D) до оси $O'x'$ будет равно $y+a$, а квадрат расстояния $(y+a)^2$. Следовательно,

$$I_{x'}=\iint\limits_{(D)}(y+a)^2dxdy=\int\limits_0^a dx\int\limits_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}}(y+a)^2dy=\frac{8}{5}a^4.$$

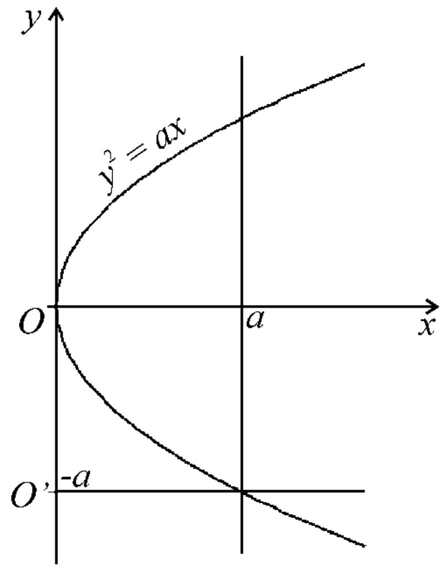


Рисунок. 1.34

Тройные интегралы

Пример 2. Вычислить: $\iiint\limits_{(V)}x^2\text{ch}(xy)dxdydz$, где тело (V) ограничено поверхностями x = 2, y = $\frac{x}{2}$, y = 0, z = 0, z = 2.

Решение

Выполним рисунок области интегрирования, ограниченной заданными в условии плоскостями (рис. 2.4).

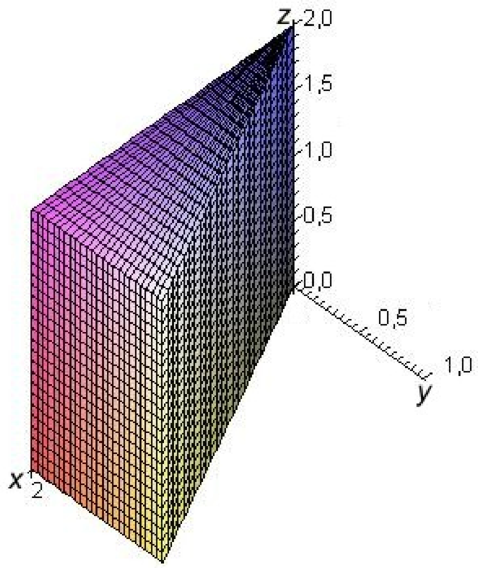


Рисунок. 2.4

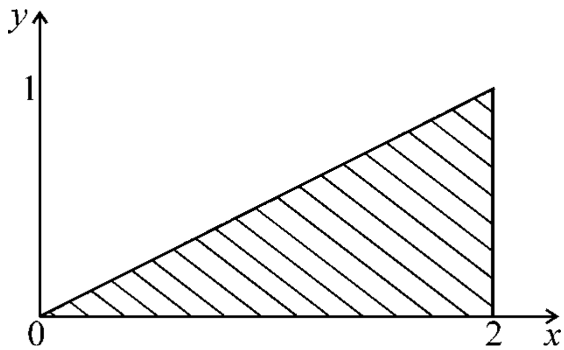


Рисунок. 2.5

Область является правильной относительно всех осей. Проектируем тело на плоскость xOy. Проекция области (V) на выбранную плоскость изображена на рис. 2.5. Тогда исходный интеграл сводится к повторному с пределами интегрирования (рис. 2.5) по переменной x от 0 до 2, по y от 0 до $\frac{x}{2}$, и, в соответствии с рис. 1, по оси z от 0 до 2.

$$\iiint\limits_{(V)} x^2 \operatorname{ch}(xy)\,dxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x/2} dy \int\limits_0^2 x^2 \operatorname{ch}(xy)\,dz = \int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_0^{x/2} \operatorname{ch}(xy)\cdot\left(z\Big|_0^2\right)dy =$$

$$= 2\int\limits_0^2 x^2\left(\frac{\operatorname{sh}(xy)}{x}\Bigg|_0^{x/2}\right)dx = 2\int\limits_0^2 x\operatorname{sh}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx = 2\int\limits_0^2 \operatorname{sh}\left(\frac{x^2}{2}\right)d\left(\frac{x^2}{2}\right) = 2\operatorname{ch}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 2(\operatorname{ch}2 - 1).$$

Пример 3. Вычислить: $\iiint\limits_{(V)} (xz)^2\,dxdydz$, где тело ($V$) ограничено поверхностями $x = 2$, $y = 2x$, $y = 0$, $z = 0$, $z = xy$.

Решение

Выполним рисунок области интегрирования, ограниченной заданными в условии поверхностью и плоскостями (рис. 2.6).

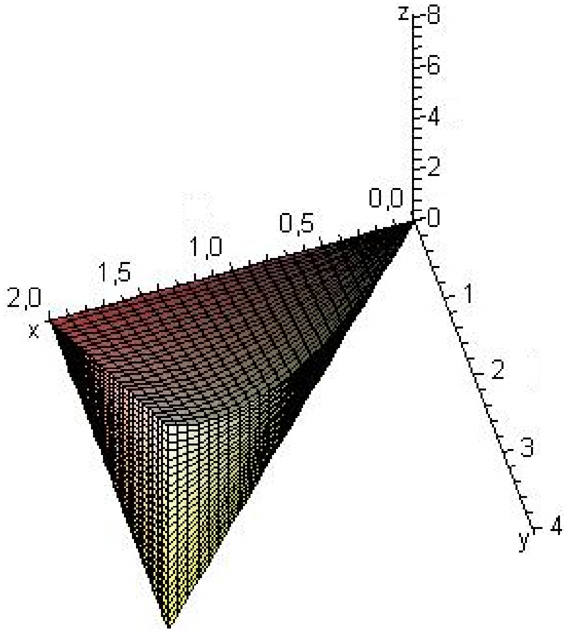


Рисунок. 2.6

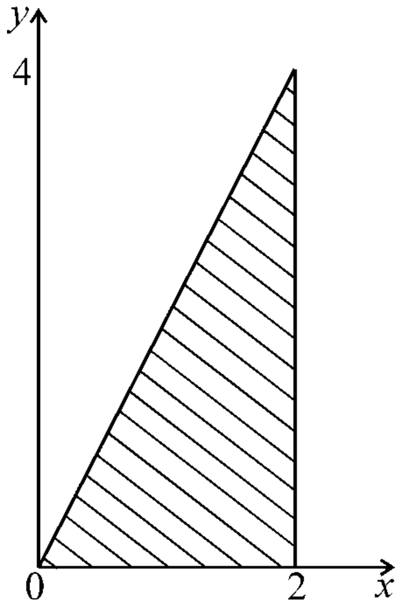


Рисунок. 2.7

Область является правильной относительно всех осей. Проектируем тело на плоскость xOy. Проекция области (V) на выбранную плоскость изображена на рис. 2.7. Тогда исходный интеграл сводится к повторному, с пределами интегрирования (рис. 2.6) по переменной x от 0 до 2, по y от 0 до $2x$, и, в соответствии с рис. 1, по оси z от плоскости $z = 0$ до «седла» xy.

$$\iiint\limits_{(V)} (xz)^2\, dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{xy} (xz)^2\, dz = \int_0^2 dx \int_0^{2x} x^2 \left(\left. \frac{z^3}{3} \right|_0^{xy} \right) dy = \frac{1}{3} \int_0^2 x^5 dx \int_0^{2x} y^3 dy =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 x^5 \left(\left. \frac{y^4}{4} \right|_0^{2x} \right) dx = \frac{4}{3} \int_0^2 x^9 dx = \frac{4}{3} \left. \frac{x^{10}}{10} \right|_0^2 = \frac{2 \cdot 2^{10}}{3 \cdot 5} = \frac{2048}{15}$$

Замена переменных в тройных интегралах

Пример 1. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x = 5\sqrt{y},\ x = \sqrt{3y},\ z = 0,\ z + y = \frac{3}{2}.$$

Решение

Воспользуемся следующей формулой для вычисления объема тела:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz. \qquad (2.11)$$

Таким образом, задача отыскания объема тела сводится к вычислению тройного интеграла по соответствующей фигуре.

Выполним рисунок области интегрирования, ограниченной заданными в условии поверхностями (рис. 2.10).

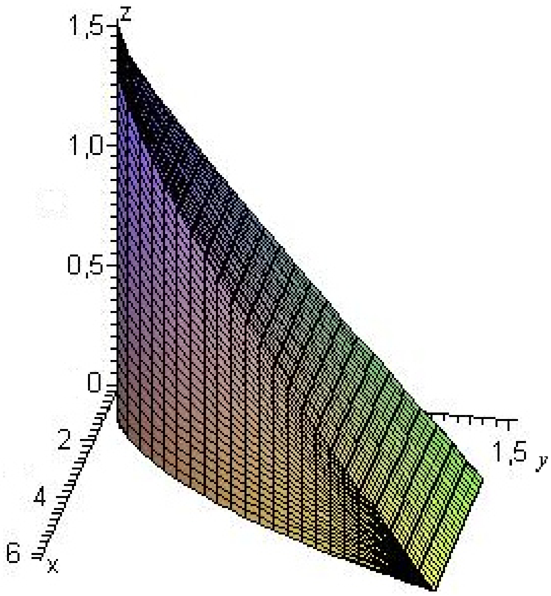


Рисунок. 2.10

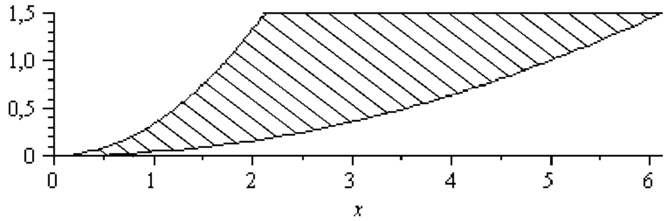


Рисунок. 2.11

Область является правильной относительно всех осей. Проектируем тело на плоскость xOy. Проекция области V на выбранную плоскость изображена на рис. 2.11. Тогда исходный интеграл сводится к повторному, с пределами интегрирования (рис. 2.11) по переменной y от 0 до $\frac{3}{2}$ (так как область не является простой относительно плоскости xOz), по x от $\sqrt{3y}$ до $5\sqrt{y}$, и, в соответствии с рис. 1 по оси z от плоскости $z = 0$ до плоскости $z = \frac{3}{2} - y$.

$$\iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{\frac{3}{2}} dy \int_{\sqrt{3y}}^{5\sqrt{y}} dx \int_0^{\frac{3}{2}-y} dz = \int_0^{\frac{3}{2}} dy \int_{\sqrt{3y}}^{5\sqrt{y}} \left(z\Big|_0^{\frac{3}{2}-y} \right) dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} - y \right) dy \int_{\sqrt{3y}}^{5\sqrt{y}} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} - y \right) \cdot \left(x\Big|_{\sqrt{3y}}^{5\sqrt{y}} \right) dy = \left(5 - \sqrt{3}\right) \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{y} - y\sqrt{y} \right) dy =$$

$$= \left(5 - \sqrt{3}\right) \left(y\sqrt{y} - \frac{2}{5} y^2 \sqrt{y} \right) \Bigg|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}} \left(5 - \sqrt{3}\right).$$

Пример 2. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $z = 7 - 4y^2$, $z = 1$.

Решение

Воспользуемся формулой (2.11) для вычисления объема тела и, таким образом, задача отыскания объема тела сводится к вычислению тройного интеграла по соответствующей фигуре.

Выполним рисунок области интегрирования, ограниченной заданными в условии поверхностями (рис. 2.12).

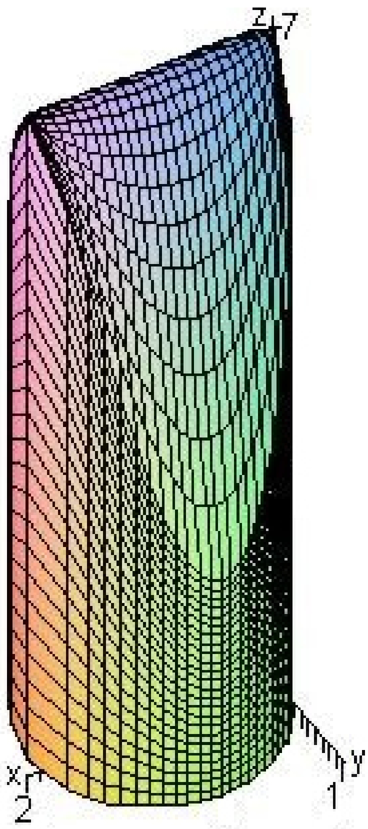


Рисунок. 2.12

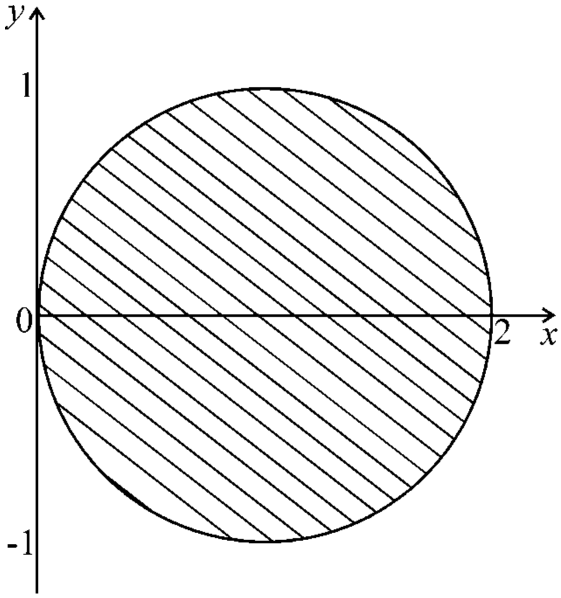


Рисунок. 2.13

Область является правильной относительно всех осей. Проектируем тело на плоскость *xOy*. Проекция области *V* на выбранную плоскость изображена на рис. 2.13.

Так как одна из образующих поверхности тела – цилиндр, то удобнее перейти в цилиндрическую систему координат. Уравнения поверхностей в цилиндрической системе координат имеют вид:

$\rho^2 - 2\rho\cos\varphi = 0$, $z = 7 - 4\rho^2\sin^2\varphi$, $z = 1$.

Тогда исходный интеграл сводится к повторному, с пределами интегрирования (рис. 2.12) по переменной z от 1 до $7 - 4\rho^2\sin^2\varphi$, по переменной ρ от 0 до 1, по φ от 0 до 2π (т.к. проекция на плоскость *xOy* – окружность с единичным радиусом, рис. 2.13). Тогда, с учетом якобиана перехода, имеем:

$$\iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_V \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_1^{7-4\rho^2\sin^2\varphi} \rho dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\left(z\Big|_1^{7-4\rho^2\sin^2\varphi}\right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(6\rho - 4\rho^3\sin^2\varphi\right) d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\frac{6\rho^2}{2} - 4\frac{\rho^4}{4}\sin^2\varphi \right)\Bigg|_0^1 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(3 - \sin^2\varphi\right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(3 - \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{5}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d(2\varphi) =$$

$$= \frac{5}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 5\pi.$$

Пример 3. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $y = -x^2 + 3$, $y = 2$, $z = 1 - x^2 + 2y^2$, $z = 5 - x^2 + 2y^2$.

Решение

Воспользуемся формулой (2.11) для вычисления объема тела и, таким образом, задача отыскания объема тела сводится к вычислению тройного интеграла по соответствующей фигуре.

Выполним рисунок области интегрирования, ограниченной заданными в условии поверхностями (рис. 2.14).

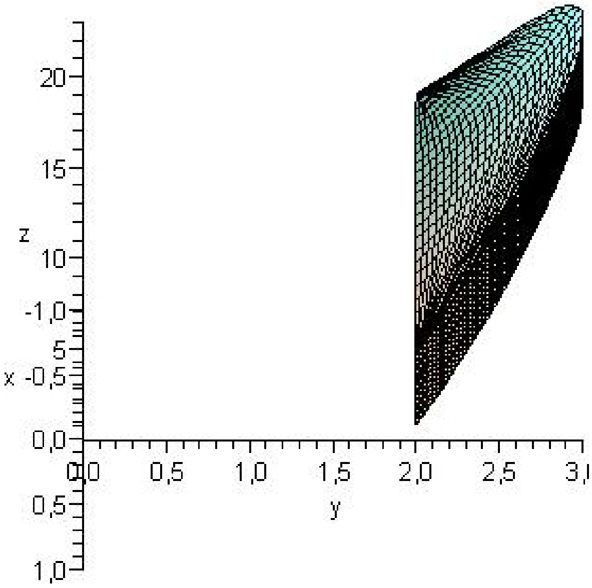


Рисунок. 2.14

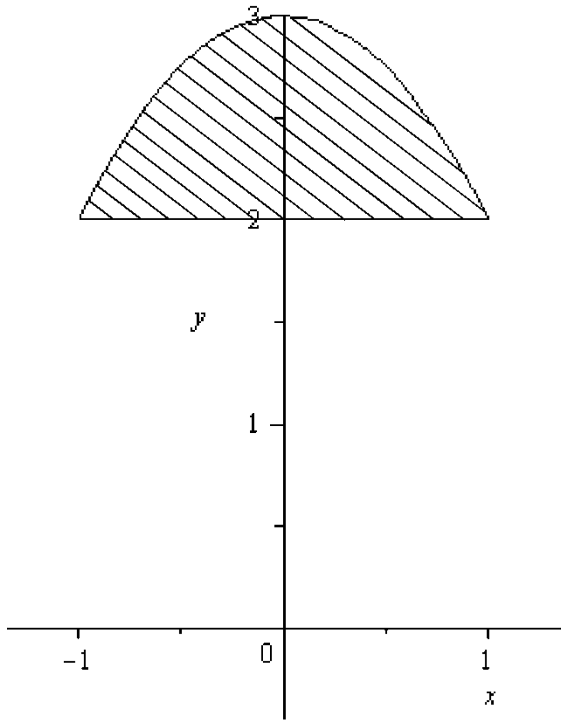


Рисунок. 2.15

Область является правильной относительно всех осей. Проектируем тело на плоскость xOy. Проекция области V на выбранную плоскость изображена на рис. 2.15.

Тогда исходный интеграл сводится к повторному, с пределами интегрирования (рис. 2.15) по переменной y от 2 до $-x^2 + 3$, по x от -1 до 1, и, в соответствии с рис. 1 по оси z от гиперболического параболоида $z = 1 - x^2 + 2y^2$ до такого же точно гиперболического параболоида, смещенного по оси z на четыре единицы вверх $z = 5 - x^2 + 2y^2$.

$$\iiint\limits_V dxdydz = \int_{-1}^{1} dx \int_{2}^{-x^2+3} dy \int_{1-x^2+2y^2}^{5-x^2+2y^2} dz = \int_{-1}^{1} dx \int_{2}^{-x^2+3} \left(z\Big|_{1-x^2+2y^2}^{5-x^2+2y^2} \right) dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2}^{-x^2+3} 4dy =$$

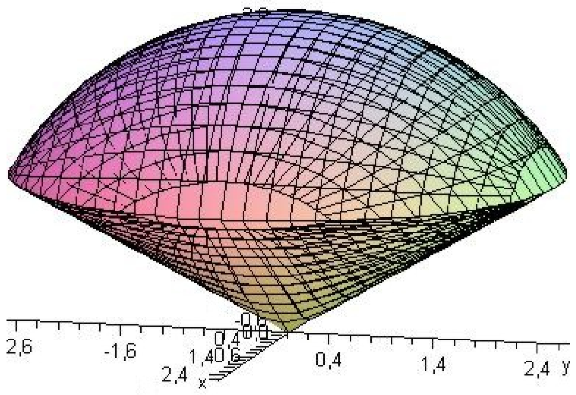
$$4\int_{-1}^{1} \left(y\Big|_{2}^{-x^2+3} \right) dx = 4\int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 1 \right) dx = 4 \cdot \left(-\frac{x^3}{3} + x \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{16}{3}.$$

Пример 4. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$.

Решение

Воспользуемся формулой (2.11) для вычисления объема тела и, таким образом, задача отыскания объема тела сводится к вычислению тройного интеграла по соответствующей фигуре.

Выполним рисунок области интегрирования, ограниченной заданными в условии поверхностями (рис. 2.16).



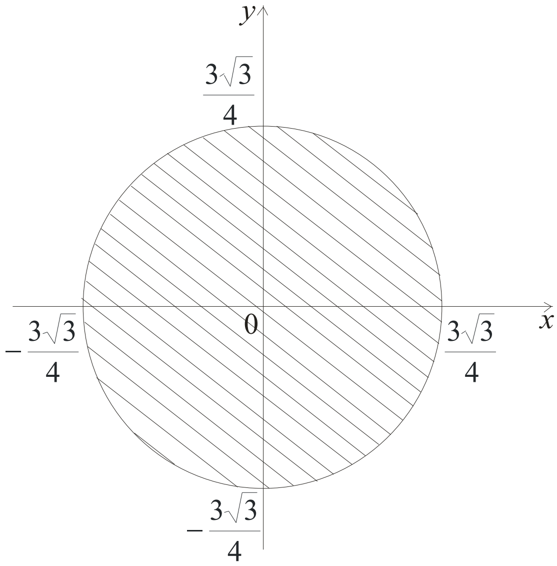


Рисунок. 2.16 Рисунок. 2.17

Область является правильной относительно всех осей. Проектируем тело на плоскость xOy. Проекция области V на выбранную плоскость изображена на рис. 2.17.

Так как одна из образующих поверхности тела – сфера, то удобнее перейти в сферическую систему координат. Уравнения поверхностей в сферической системе координат имеют вид:

$\rho = 3$ – уравнение сферы.

Уравнение конуса найдем следующим образом. Пусть $x = 0$, тогда:

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}|y|\text{, тогда } \frac{z}{|y|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{, но } \frac{z}{|y|} = ctg\Theta,$$

после этого, с учетом формулы приведения $tg\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение тригонометрического уравнения, соответствующее условию задачи, имеет вид:

$$\frac{\pi}{2} - \Theta = \frac{\pi}{6} \text{ или } \Theta = \frac{\pi}{3}.$$

Полученное решение является уравнением конуса в сферической системе координат.

Тогда исходный интеграл сводится к повторному, с пределами интегрирования (рис. 2.16) по переменной Θ от 0 до $\frac{\pi}{3}$, по переменной ρ от 0 до 3, по φ от 0 до 2π (т.к. проекция на плоскость xOy – окружность с единичным радиусом, рис. 2.17). Тогда, с учетом Якобиана перехода, имеем:

$$\iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_V \rho^2 \sin\Theta d\rho d\varphi d\Theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\Theta d\Theta \int\limits_0^3 \rho^2 d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\Theta \left(\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^3 \right) d\Theta = 9\int\limits_0^{2\pi} \left(-\cos\Theta\right)\Big|_0^{\pi/3} d\varphi = 9\left(1 - \frac{1}{2}\right)\varphi\Big|_0^{2\pi} = 9\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = 9\pi.$$

Пример 5. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $z = 5(x^2 + y^2) + 2$, $z = 2 + 10y$.

Решение

Воспользуемся формулой (2.11) для вычисления объема тела и, таким образом, задача отыскания объема тела сводится к вычислению тройного интеграла по соответствующей фигуре.

Выполним рисунок области интегрирования, ограниченной заданными в условии поверхностями (рис. 2.18).

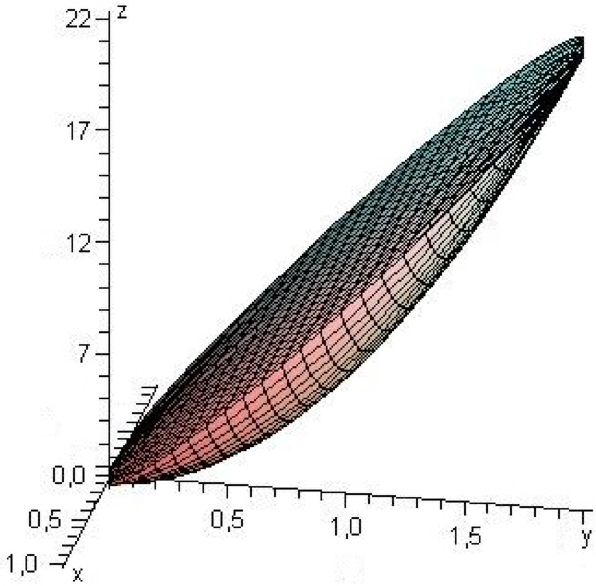


Рисунок. 2.18

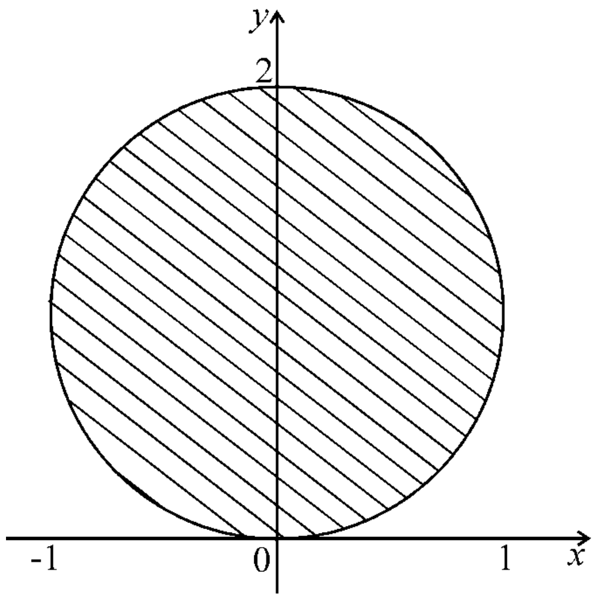


Рисунок. 2.19

Область является правильной относительно всех осей. Проектируем тело на плоскость xOy. Проекция области V на выбранную плоскость изображена на рис. 2.19.

Так как одна из образующих поверхности тела – параболоид вращения, то удобнее перейти в цилиндрическую систему координат. Уравнения поверхностей в цилиндрической системе координат имеют вид:

$z = 5\rho^2 + 2$ – уравнение параболоида вращения,

$z = 2 + 10\rho\sin\varphi$ – уравнение плоскости.

Тогда исходный интеграл сводится к повторному, с пределами интегрирования (рис. 2.18) по переменной z от $5\rho^2 + 2$ до $2 + 10\rho\sin\varphi$, по переменной ρ от 1 до 0, по φ от 0 до 2π (т.к. проекция на плоскость xOy – окружность с единичным радиусом и с центром в точке (0, –1), рис. 2.19). Тогда, с учетом якобиана перехода, имеем:

$$\iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_V \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^0 \rho d\rho \int_{5\rho^2+2}^{2+10\rho\sin\varphi} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^0 \rho \left(z \Big|_{5\rho^2+2}^{2+10\rho\sin\varphi} \right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^0 \rho \left(2 + 10\rho\sin\varphi - 5\rho^2 - 2 \right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^0 \left(10\rho^2 \sin\varphi - 5\rho^3 \right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(10\frac{\rho^3}{3}\sin\varphi - 5\frac{\rho^4}{4} \right) \Bigg|_1^0 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(-10\frac{1}{3}\sin\varphi + 5\frac{1}{4} \right) d\varphi =$$

$$= \left(10\frac{1}{3}\cos\varphi + 5\frac{1}{4}\varphi \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{5\pi}{2}.$$

Пример 6. Найти объем тела, заданного неравенствами:

$$9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81,\ 0 \le z \le \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{80}},\ y \le 0,\ y \le -x.$$

Решение

Воспользуемся формулой (2.11) для вычисления объема тела и, таким образом, задача отыскания объема тела сводится к вычислению тройного интеграла по соответствующей фигуре.

Выполним рисунок области интегрирования, ограниченной заданными в условии поверхностями (рис. 2.20).

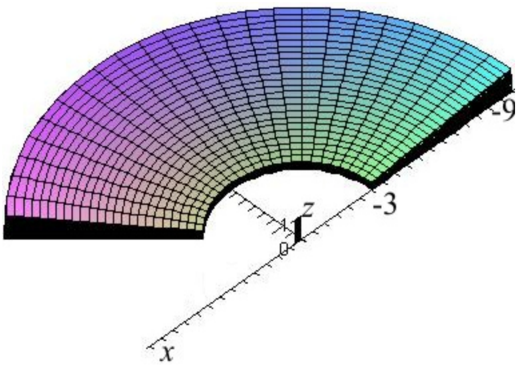


Рисунок. 2.20

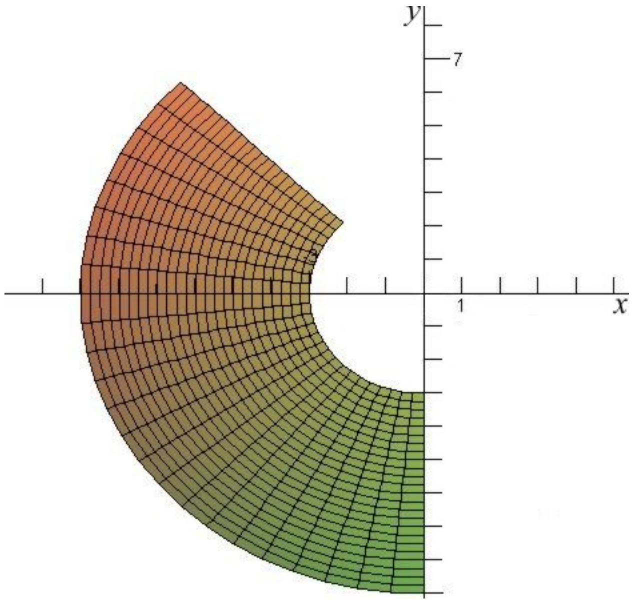


Рисунок. 2.21

Область является правильной относительно всех осей. Проектируем тело на плоскость xOy. Проекция области V на выбранную плоскость изображена на рис. 2.21.

Рассмотрим первое двойное неравенство $9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81$. Это пространство, заключенное между двумя сферами с радиусами 3 и 9, расположенными в начале координат.

Так как одна из образующих поверхности тела – сферы, то удобнее перейти в сферическую систему координат. Уравнения поверхностей в сферической системе координат имеют вид:

$9 \le \rho \le 81$ – сферы и пространство между ними.

Второе двойное неравенство $0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{80}}$ задает пространство между плоскость $z = 0$ и конусом $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{80}}$. Уравнение плоскости $z = 0$ в сферической системе координат получим исходя из формул связи между прямоугольной декартовой системой координат и сферической:

$$\rho\cos\Theta = 0,$$

откуда $\rho \in R$, $\Theta = \dfrac{\pi}{2}$ (без учета периода).

Уравнение конуса найдем следующим образом. Пусть $x = 0$, тогда:

$$z = \frac{1}{\sqrt{80}}|y|.$$

Следовательно $tg\left(\dfrac{\pi}{2} - \Theta\right) = \dfrac{1}{\sqrt{80}}$.

Для решения тригонометрического уравнения воспользуемся формулами приведения:

$$ctg(\Theta) = \frac{1}{\sqrt{80}}.$$

Следовательно, $tg(\Theta) = \sqrt{80}$.

Полученное решение является уравнением конуса в сферической системе координат.

Отсюда, решение, соответствующее условию задачи, имеет вид:

$$\Theta = \operatorname{arctg}(\sqrt{80}).$$

Полученное решение является уравнением конуса в сферической системе координат.

Следовательно, второе двойное неравенство, определяющее пространство между плоскостью и конусом, с учетом того, что угол Θ отсчитывается от оси z в направлении по часовой стрелке, имеет вид:

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{80}) \le \Theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Третье $y \le 0$ и четвертое неравенства $y \le -x$ задают полупространства, ограниченные соответствующими плоскостями $y = 0$, ниже оси x (отрицательные значения y) и $y = -x$, ниже соответствующей плоскости, их проекции изображены на рис. 2.21.

Исходя из связи между декартовой и сферической системами координат, учитывая положительное направление отсчета угла φ, эти неравенства можно сразу записать в сферической системе координат:

$$\varphi \ge \pi,\ \varphi \le \frac{7\pi}{4},$$

Тогда исходный интеграл сводится к повторному, с пределами интегрирования (рис. 2.20) по переменной Θ от $\operatorname{arctg}(\sqrt{80})$ до $\frac{\pi}{2}$, по переменной ρ от 3 до 9, по φ от π до $\frac{7\pi}{4}$. Тогда, с учетом якобиана перехода, имеем:

$$\iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_V \rho^2 \sin\Theta d\rho d\varphi d\Theta = \int\limits_{\pi}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\operatorname{arctg}(\sqrt{80})}^{\frac{\pi}{2}} \sin\Theta d\Theta \int\limits_3^9 \rho^2 d\rho =$$

$$\int\limits_{\pi}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\operatorname{arctg}(\sqrt{80})}^{\frac{\pi}{2}} \sin\Theta \left(\left. \frac{\rho^3}{3} \right|_3^9 \right) d\Theta = 234 \int\limits_{\pi}^{\frac{7\pi}{4}} \left(-\cos\Theta\right)\Big|_{\operatorname{arctg}(\sqrt{80})}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi =$$

$$= 26 \int\limits_{\pi}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi = 26\varphi\Big|_{\pi}^{\frac{7\pi}{4}} = \frac{39\pi}{2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Во время вычисления интеграла возникает необходимость вычислять $\cos(\operatorname{arctg}(\sqrt{80}))$. Оно осуществляется с применением формулы (справедливой только для положительных значений аргумента x):

$$\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \text{а}\ \cos(\arccos x) = x.$$

Пример 7. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ – плотность. Найти массу тела.

$$x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ y = 0,\ z = 0\ (y \ge 0,\ z \ge 0);\ \mu = 5(x^2 + y^2).$$

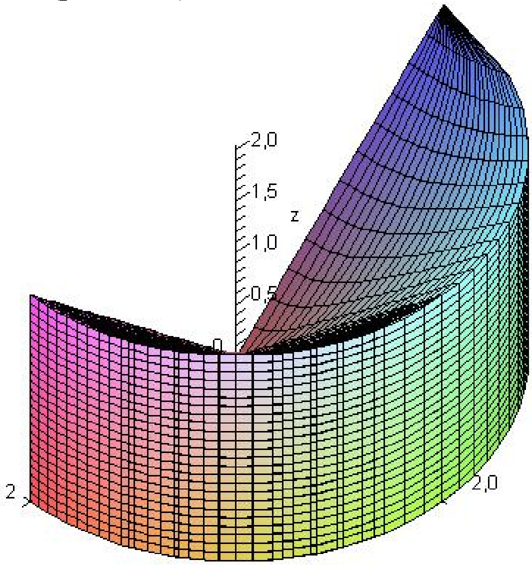
Решение

Так как, масса тела равна тройному интегралу от плотности:

$$m = \iiint\limits_V \mu dxdydz,$$

следовательно, задача отыскания массы тела сводится к вычислению тройного интеграла от функции плотности по соответствующей фигуре.

Выполним рисунок области интегрирования, ограниченной заданными в условии поверхностями (рис. 2.22).



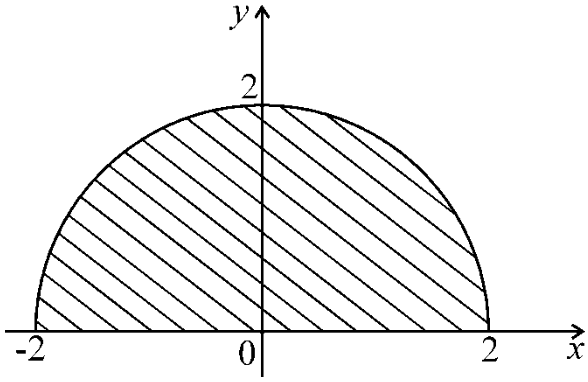


Рисунок. 2.22 Рисунок. 2.23

Область является правильной относительно всех осей. Проектируем тело на плоскость xOy. Проекция области V на выбранную плоскость изображена на рис. 2.23.

Так как одна из образующих поверхности тела – цилиндр, то удобнее перейти в цилиндрическую систему координат. Уравнения поверхностей в цилиндрической системе координат имеют вид:

$\mu = 5\rho^2$ – функция плотности,

$z = \rho$ – уравнение конуса,

$\rho = 2$ – уравнение цилиндра,

$\rho\sin\varphi = 0$ – уравнение плоскости,

$z = 0$ – уравнение плоскости.

Тогда исходный интеграл сводится к повторному, с пределами интегрирования (рис. 2.22) по переменной z от 0 до ρ, по переменной ρ от 0 до 2, по φ от 0 до π (т.к. проекция на плоскость xOy – верхняя часть окружности с радиусом равным 2, рис. 2.23). Тогда, с учетом якобиана перехода, имеем:

$$\iiint\limits_V \mu\cdot dxdydz = \iiint\limits_V \mu\rho d\rho d\varphi dz = \iiint\limits_V 5\rho^2\rho d\rho d\varphi dz = 5\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^2 \rho^3 d\rho\int_0^{\rho} dz =$$

$$= 5\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^2 \rho^3\left(z\Big|_0^{\rho}\right)d\rho = 5\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^2 \rho^4 d\rho = 5\int_0^{\pi}\left(\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^2\right)d\varphi = 32\int_0^{\pi} d\varphi = 32\,\varphi\Big|_0^{\pi} = 32\pi.$$

Пример 8. Найти массу и момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$ и $x^2 + y^2 = z^2$ относительно прямой $x = 0$, $z = 4$.

Решение

Проекцией данного тела, образованного пересечением параболоида вращения и конуса, на плоскость XOY является круг с центром в начале координат и радиусом 2.

Масса M тела равна

$$M=\rho\iiint\limits_V dxdydz=\rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 dr\int\limits_{r^2/2}^{r} rdz=2\pi\rho\int\limits_0^2\left(r^2-\frac{r^3}{2}\right)dr=2\pi\rho\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{8}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4\pi\rho}{3}.$$

Момент инерции I данного тела найдем по формуле

$$I=\iiint\limits_V \rho r^2 dxdydz,$$

где r – расстояние от точки (x, y, z) тела V до прямой $x = 0$, $z = 4$. Квадрат этого расстояния находится по формуле $r^2 = x^2 + (z-4)^2$, поэтому

$$I=\rho\iiint\limits_V\left(x^2+(z-4)^2\right)dxdydz=\rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 dr\int\limits_{r^2/2}^{r} r\left(r^2\cos^2\varphi+(z-4)\right)^2 dz=$$

$$=\rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 dr\left(r^4\cos^2\varphi-\frac{r^5}{2}\cos^2\varphi+r\frac{(r-4)^3}{3}-r\frac{\left(\frac{r^2}{2}-4\right)^3}{3}\right)=$$

$$=\rho\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{r^5}{5}\cos^2\varphi-\frac{r^6}{12}\cos^2\varphi+\frac{(r-4)^5}{15}+\frac{4(r-4)^4}{4\cdot3}-\frac{\left(\frac{r^2}{2}-4\right)^4}{2\cdot3\cdot4}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi=\frac{40\pi\rho}{3}.$$

Пример 9. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z$ и $x + y + z = 0$.

Решение

Проекцией данного тела, образованного пересечением плоскости и параболоида вращения на плоскость XOY является область D: $x^2 + y^2 \le -x-y$, т.е. круг $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}$.

Поэтому в силу симметрии тела относительно плоскости $x = y$ имеем $x_0 = y_0$.

Положим $x = r\cos\varphi - 1/2$, $y = r\sin\varphi - 1/2$. Масса данного тела равна

$$M=\rho\iiint\limits_V dxdydz=\rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt2}} rdr\int\limits_{r^2-r(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac12}^{1-r(\cos\varphi+\sin\varphi)} dz=$$

$$=\rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt2}} r\left(1-r(\cos\varphi+\sin\varphi)-r^2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)-\frac12\right)dr=$$

$$=2\pi\rho\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt2}}\left(r-r^3-\frac{r}{2}\right)dr=2\pi\rho\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt2}}=\frac{\pi\rho}{8}.$$

Далее

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho x dxdydz =$$

$$= \frac{1}{M}\rho\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\left(r\cos\varphi - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - r^2\right)dr = \frac{1}{M}\rho 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{r}{2} - r^3\right)dr =$$

$$= -\frac{\pi\rho}{M}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2},$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho z dxdydz = \frac{\rho}{M}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dr \int_{r^2 - r(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{2}}^{1 - r(\cos\varphi + \sin\varphi)} r\cdot z dz =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\left(1 - 2r(\cos\varphi + \sin\varphi) + r^2 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - r^2 - \frac{1}{2}\right)dr =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(r - r\left(r^2 + \frac{1}{2}\right)^2\right)dr = \frac{5}{6}.$$

Итак, координаты центра тяжести: $x_0 = y_0 = -\frac{1}{2}$, $z_0 = \frac{5}{6}$.

Тема 9. Дифференциальные уравнения. Практические занятия 19-25.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

1.1. Уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения вида $f(x)dx = g(y)dy$ (1.1.1) называются уравнениями с *разделёнными переменными*. Функции $f(x)$ и $g(y)$ будем считать непрерывными. Решение этого уравнения может быть получено интегрированием $\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$, где C – произвольная постоянная. Вполне возможно, что в некоторых задачах неопределенные интегралы $\int f(x)dx$ или $\int g(y)dy$ нельзя выразить в элементарных функциях, тем не менее мы и в этом случае будем считать задачу интегрирования дифференциального уравнения выполненной в том смысле, что свели ее к более простой и уже изученной в курсе интегрального исчисления задаче вычисления неопределенных интегралов.

Если надо выделить частное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, то оно, очевидно, определяется из уравнения $\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{y_0}^{y} g(y)dy$

Пример 1.1.1. $xdx + ydy = 0$ Переменные разделены, так как коэффициент при dx является функцией только *x*, а коэффициент при dy является функцией только от *y*. Интегрируя, получим $\int xdx = -\int ydy + c$, или $x^2 + y^2 = C_1$ - семейство окружностей с центром в начале координат.

Пример 1.1.2. $e^{x^2}dx = \frac{dy}{\ln y}$. Интегрируя, получаем $\int e^{x^2}dx = \int \frac{dy}{\ln y} + C$. Интегралы $\int e^{x^2}dx$ и $\int \frac{dy}{\ln y}$ не берутся в элементарных функциях, тем не менее исходное уравнение считается проинтегрированным, так как задача доведена до квадратур.

Уравнения вида $f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(y)dy$ (1.1.2) в которых коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от *x* и только от *y*, называются дифференциальными *уравнениями с разделяющимися переменными*, так как путём деления на $f_2(x)g_1(y) \neq 0$ они приводятся к уравнениям с разделёнными переменными $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy$.

Заметим, что деление на $f_2(x)g_1(y)$ может привести к потере частных решений, обращающих в нуль произведение $f_2(x)g_1(y)$.

Пример 1.1.3. Найти общее решение дифференциального уравнения $4(xy^2 - x)dx + \sqrt{5 + x^2}dy = 0$.

Преобразуем его к виду удобному для разделения переменных:

$$4x(y^2 - 1)dx = -\sqrt{5 + x^2}dy.$$

Разделяя переменные и интегрируя: $2\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2 + 5}} = -\int \frac{dy}{y^2 - 1}$, $\quad (y \neq \pm 1)$

имеем $\quad 2\int (x^2 + 5)^{-\frac{1}{2}} d(x^2 + 5) = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C$, или общий интеграл

$$8\sqrt{x^2 + 5} - \ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = C_1.$$

К полученному общему решению следует добавить потерянные решения $y = 1$ и $y = -1$, которые не могут быть получены из общего решения ни при каких значениях константы C_1.

1.2. Однородные дифференциальные уравнения и уравнения приводящиеся к ним.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется *однородным*, если оно приводится к виду $y' = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (1.2.1). Это уравнение введением новой переменной $z = \dfrac{y}{x}$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными. А именно: $y = zx$, $y' = z'x + z$, $\dfrac{dz}{dx}x + z = g(z)$, $\dfrac{dz}{z + g(z)} = \dfrac{dx}{x}$.

Иногда бывает уместна замена $z = \dfrac{x}{y}$.

Пример 1.2.1. Найти общий интеграл уравнения $y' = \dfrac{2y^3 + 3x^2 y}{xy^2 + 2x^3}$.

Поделив на x^3 числитель и знаменатель дроби, получим однородное уравнение: $y' = \dfrac{2\left(\dfrac{y}{x}\right)^3 + 3\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 2}$, положим $z = \dfrac{y}{x}$. Тогда исходное уравнение сведётся к уравнению $z'x + z = \dfrac{2z^3 + 3z}{z^2 + 2}$ с разделяющимися переменными. Откуда $\dfrac{dz}{dx}x = \dfrac{z^3 + z}{z^2 + 2}$ или, после разделения переменных, $\dfrac{z^2 + 2}{z(z^2 + 1)}dz = \dfrac{dx}{x}$, получаем уравнение с разделенными переменными, при условии $z \neq 0$. Но $z = 0$ при $y = 0$, а это есть решение исходного уравнения (убеждаемся проверкой).

Для интегрирования левой части разложим дробь на простейшие: $\dfrac{z^2 + 2}{z(z^2 + 1)} = \dfrac{A}{z} + \dfrac{Bz + C}{z^2 + 1} = \ldots = \dfrac{2}{z} - \dfrac{z}{z^2 + 1}$, (здесь коэффициенты A, B, C определяются методом неопределённых коэффициентов). После интегрирования левой и правой частей $\int\left(\dfrac{2}{z} - \dfrac{z}{z^2 + 1}\right)dz = \int\dfrac{dx}{x} + C$, получим $2\ln|z| - \dfrac{1}{2}\ln\left|1 + z^2\right| = \ln|x| + \ln|C_1|$, и общий интеграл $\dfrac{z^2}{x\sqrt{1 + z^2}} = C_1$, $C_1 \neq 0$. Полагая $z = \dfrac{y}{x}$, имеем $\dfrac{y^2}{x^2\sqrt{x^2 + y^2}} = C$. В этот общий интеграл входит и найденное ранее решение $y = 0$ при $C = 0$.

Уравнение вида $y' = g\left(\dfrac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right)$ (1.2.2), где $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in R$, решается по одному из трёх вариантов:

1) $c = c_1 = 0$, тогда $\dfrac{dy}{dx} = g\left(\dfrac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right) = g\left(\dfrac{a+b\dfrac{y}{x}}{a_1+b_1\dfrac{y}{x}}\right) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (1.2.3), то есть сводится к однородному (1.2.1);

2) $c \neq 0$ или $c_1 \neq 0$ и $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1}$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) = \begin{bmatrix} a = \lambda a_1 \\ b = \lambda b_1 \end{bmatrix} = g\left(\frac{\lambda a_1x+\lambda b_1y+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) = g\left(\frac{\lambda(a_1x+b_1y)+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$$

Введём обозначения $a_1x+b_1y = u$, $y = \dfrac{u-a_1x}{b_1}$, $y' = \dfrac{1}{b_1}\dfrac{du}{dx} - \dfrac{a_1}{b_1}$ и уравнение перепишется в виде: $\dfrac{1}{b_1}\dfrac{du}{dx} - \dfrac{a_1}{b_1} = g\left(\dfrac{\lambda u+c}{u+c_1}\right) \Leftrightarrow \dfrac{du}{dx} = f(u)$ - то есть сводится к уравнению с разделяющимися переменными;

3) $c \neq 0$ или $c_1 \neq 0$ и $\dfrac{a}{a_1} \neq \dfrac{b}{b_1}$, тогда система $\begin{cases} ax+by+c=0, \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ имеет единственное решение $\begin{cases} x=h \\ y=k \end{cases}$, и введение новых переменных $\begin{cases} x_1 = x-h \\ y_1 = y-k \end{cases}$ приводит исходное уравнение к виду (1.2.3) $\dfrac{dy_1}{dx_1} = g\left(\dfrac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}\right)$

Пример 1.2.2. Найти общий интеграл уравнения $y' = \dfrac{2y-2}{2x+y-3}$

Здесь $\dfrac{a}{a_1} \neq \dfrac{b}{b_1}$ поэтому решаем систему $\begin{cases} 2y-2=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Вводим новые переменные $x_1 = x-1$, $y_1 = y-1$, в которых исходное уравнение имеет вид $y_1' = \dfrac{2y_1}{2x_1+y_1}$. Разделив числитель и знаменатель дроби на x_1, получим однородное уравнение $y_1' = \dfrac{2\dfrac{y_1}{x_1}}{2+\dfrac{y_1}{x_1}}$. Вводим переменную $z = \dfrac{y_1}{x_1}$ и получаем уравнение с разделяющимися переменными $z'x_1 + z = \dfrac{2z}{2+z}$, $x_1\dfrac{dz}{dx_1} = -\dfrac{z^2}{z+2}$. Разделяя переменные $\dfrac{2+z}{z^2}dz = -\dfrac{dx_1}{x_1}$ и интегрируя полученное уравнение имеем $-\frac{2}{z}+\ln|z|=-\ln|x_1|+\ln|C|$, или $\frac{2}{z}=\ln\left|\frac{zx_1}{C}\right|$, или $zx_1=Ce^{\frac{2}{z}}$. Заметим, что здесь $C\neq 0$, но, допуская и $C=0$, включаем в конечную формулу потерянное решение $z=0$. Переходя от переменной z к x_1 и y_1, получим $y_1=Ce^{\frac{2x_1}{y_1}}$. Подставим $x_1=x-1, \quad y_1=y-1$ и найдём искомый общий интеграл $(y-1)e^{-2\frac{x-1}{y-1}}=C$.

1.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида: $y'+p(x)y=q(x)$ (1.3.1), где $p(x)$ и $q(x)$ - непрерывные функции от x.

Если $q(x)\equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*. Заметим что линейное однородное уравнение $y'+p(x)y=0$ является уравнением с разделяющимися переменными $\frac{dy}{dx}=-p(x)y$, $\frac{dy}{y}=-p(x)dx$.

Будем искать решение линейного неоднородного уравнения в виде $y=U\cdot V$, где $U=U(x)$ и $V=V(x)$ некоторые дифференцируемые функции от x. Тогда $y'=U'V+UV'$. С учётом сделанных подстановок уравнение $y'+p(x)y=q(x)$ перепишется в виде $U'V+UV'+p(x)UV=q(x)$ или $[U'+p(x)U]V+UV'=q(x)$.

Возьмём в качестве $U(x)$ некоторое частное решение линейного однородного уравнения $U'+p(x)U=0$, тогда для отыскания $V(x)$ получим уравнение с разделяющимися переменными $UV'=q(x)$, $\frac{dV}{dx}=\frac{q(x)}{U(x)}$.

Пример 1.3.1. Найти решение задачи Коши: $y'-y\cdot ctgx=\cos x$, при $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Полагая $y=UV$, приходим к уравнению $U'V+UV'-UVctgx=\cos x$, $[U'-Uctgx]V+UV'=\cos x$ $\langle * \rangle$. Решаем уравнение $U'-Uctgx=0$:

$\frac{dU}{dx}=Uctgx$, $\frac{dU}{U}=ctgxdx$, $\ln|U|=\ln|\sin x|$, $U=\sin x$ (так как достаточно найти частное решение, то полагаем $C=0$). Подставляя найденное U в уравнение $\langle * \rangle$, получаем: $\sin xV'=\cos x$, $\frac{dV}{dx}=tgx$, $\int dV=\int ctgxdx$, $V=\ln|\sin x|+C$.

Общее решение исходного уравнения имеет вид $y=UV=\sin x(\ln|\sin x|+C)$.

Для нахождения решения задачи Коши с заданным начальным условием $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ подставим в найденное общее решение $x=\frac{\pi}{2}$ и $y=2$: $2=1\cdot(\ln 1+C)$, откуда $C = 2$. Итак, искомое решение задачи Коши $y=\sin x(\ln|\sin x|+2)$.

Замечание. Некоторые уравнения, не являющиеся линейными относительно y' и y, становятся линейными относительно x' и x, если рассматривать x как функцию от y, то есть приводятся к виду $x'+p(y)x=q(y)$ (1.3.2). Решение таких уравнений можно искать в виде $x=UV$, где $U=U(y)$ и $V=V(y)$ некоторые функции от y.

Пример 1.3.2. Решить задачу Коши: $(x+\ln^2 y-\ln y)y'=\frac{y}{2}$, при $y(3)=1$.

Перепишем уравнение в виде $x+\ln^2 y-\ln y=\frac{y}{2}\frac{dx}{dy}$ или $x'-\frac{2}{y}x=2\frac{\ln^2 y-\ln y}{y}$ - уравнения (1.3.2) линейного относительно x' и x.

Положим $x=UV$, тогда

$$U'V+UV'-\frac{2}{y}UV=2\frac{\ln^2 y-\ln y}{y},$$

$$\left[U'-\frac{2}{y}U\right]V+UV'=2\frac{\ln^2 y-\ln y}{y}.$$

Решаем отдельно уравнение $U'-\frac{2}{y}U=0$:

$$\frac{dU}{dy}=\frac{2U}{y},\quad \int\frac{dU}{U}=2\int\frac{dy}{y},\quad \ln U=2\ln y,\ U=y^2.$$

Получаем $y^2V'=2\frac{\ln^2 y-\ln y}{y}$

и решаем: $\frac{dV}{dy}=\frac{2\ln^2 y-2\ln y}{y^3}$, $\int dV=\int d\left(-\frac{\ln^2 y}{y^2}\right)$, $V=-\frac{\ln^2 y}{y^2}+C$.

Тогда $x=y^2\left(-\frac{\ln^2 y}{y^2}+C\right)=Cy^2-\ln^2 y$.

Используя начальное условие $3=C\cdot 1^2-\ln^2 1$, найдём $C=3$. Решение задачи Коши при этом имеет вид $x=3y^2-\ln^2 y$

4. Уравнения Бернулли.

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$ (1.4.1), где $\alpha \in R$ и $\alpha \neq 1$ называется уравнением Бернулли. Решение уравнения Бернулли можно искать так же как решение линейного дифференциального уравнения, то есть в виде $y = UV$.

Пример 1.4.1. Решить уравнение $x^2 y^2 y' + xy^3 = 1$.

Разделим обе части уравнения на $x^2 y^2$: ($y = 0$, очевидно, не решение): $y' + \frac{1}{x} y = x^{-2} y^{-2}$. Это уравнение Бернулли с $\alpha = -2$. Положим $y = UV$, получим $U'V + UV' + \frac{1}{x}UV = \frac{1}{x^2U^2V^2}$,

$$\left[U' + \frac{1}{x}U\right]V + UV' = \frac{1}{x^2U^2V^2}.$$

Как и выше сначала находим $U(x)$:

$$U' + \frac{1}{x}U = 0,\ \frac{dU}{dx} = -\frac{U}{x},\ \int\frac{dU}{U} = -\int\frac{dx}{x},\ \ln|U| = -\ln|x|,\ U = \frac{1}{x}.$$

Затем находим $V(x)$ решив уравнение $\frac{1}{x}\frac{dV}{dx} = \frac{1}{V^2}$:

$$\int V^2 dV = \int x dx,\ \frac{V^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C,\ V = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}.$$

Искомое общее решение $y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}$.

1.5. Уравнения в полных дифференциалах.

Уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (1.5.1) называется уравнением *в полных дифференциалах*, если выполняется тождество $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$. При выполнении этого тождества существует такая функция $U(x,y)$, что $dU = Pdx + Qdy$, и исходное уравнение примет вид $dU = 0$, то есть $U(x,y) = C$. Значит, решение уравнения в полных дифференциалах сводится к отысканию функции $U(x,y)$, которая может быть найдена как решение системы $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$ и $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$. Покажем на примере способ нахождения этой функции.

Пример 1.5.1. Решить уравнение $(x + \ln y)dx + \left(1 + \frac{x}{y} + \sin y\right)dy = 0$.

Здесь $P(x,y) = x + \ln y$, $Q(x,y) = 1 + \frac{x}{y} + \sin y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ - значит данное уравнение в полных дифференциалах.

Для нахождения функции $U(x,y)$ воспользуемся равенствами:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)=x+\ln y \text{ и } \frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)=1+\frac{x}{y}+\sin y.$$

Считая в первом равенстве постоянной y, а во втором x, находим интегрированием первого равенства по x, а второго по y функцию $U(x,y)$ с точностью до произвольных слагаемых, зависящих от y в первом случае и от x во втором:

$$\begin{array}{l|l} U=\int(x+\ln y)dx=\dfrac{x^2}{2}+x\ln y+C_1(y), & \\ & \Rightarrow \begin{cases} C_1(y)=y-\cos y, \\ C_2(x)=\dfrac{x^2}{2}. \end{cases} \\ U=\int\left(1+\dfrac{y}{x}+\sin y\right)dy=y+x\ln y-\cos y+C_2(x). & \end{array}$$

Поэтому $U(x,y)=\frac{x^2}{2}+x\ln y+y-\cos y$, а общий интеграл исходного уравнения имеет вид: $\frac{x^2}{2}+x\ln y+y-\cos y=C$.

2. НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДОПУСКАЮЩИХ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА.

I. Уравнение вида $y^{(n)}(x)=f(x)$ решается n- кратным интегрированием, то есть $y^{(n)}(x)=\left(y^{(n-1)}(x)\right)'$ и $y^{(n-1)}(x)=\int f(x)dx+C_1$ и т.д.

Пример 2.1. Найти общее решение уравнения $y''=2x$.

$$y'=\int 2xdx+C_1=x^2+C_1,\quad y=\int\left(x^2+C_1\right)dx+C_2=\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$$

II. Если уравнение n- ого порядка не содержит явно искомой функции $y(x)$ и её производных до порядка $k-1$ включительно: $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ \dots\ ,y^{(n)})=0$, то замена $y^{(k)}(x)=t(x)$ понижает порядок уравнения на k единиц.

Пример 2.2. Найти общее решение уравнения $y'''=2ctgx\, y''$.

Полагая $y''=t$, значит $y'''=t'$, сведём это уравнение к виду $t'=2ctgx\, t$. Полученное уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dt}{dx}=2ctgx\, t$, $\frac{dt}{t}=2ctgxdx$, $\ln t=2\ln|\sin x|+\ln C_1$, $t=C_1\sin^2 x$. Заменим t на y'' и интегрируя получим: $y''=C_1\sin^2 x$,

$$y'=\int C_1\sin^2 xdx+C_2=C_1\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx+C_2=C_1\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)+C_2,$$

$$y=\int\left[C_1\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)+C_2\right]dx=C_1\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{8}\cos 2x\right)+C_2x+C_3.$$

III. Пусть уравнение не содержит явно независимой переменной x, но содержит явно y:

$F(y,y',y'', \ \ldots \ ,y^{(n)})=0$. В этом случае удобно взять y за независимую переменную, сделав подстановку $y'=p(y)$, где $p(y)$- некоторая функция от y. Тогда $\dfrac{dy}{dx}=p$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$ и далее дифференцируя, таким образом, мы понизим порядок уравнения на единицу.

Пример 2.3. Найти решение задачи Коши: $y^2y''=\left(y^2-1\right)y'$, $y(0)=1, \quad y'(0)=2$.

Уравнение не содержит явно x. Делаем замену $p=y'$, тогда $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ и уравнение принимает вид $y^2p\dfrac{dp}{dy}=\left(y^2-1\right)p$. Сокращая на $p\neq 0$ и разделяя переменные, получим $dp=\dfrac{y^2-1}{y^2}dy$, или после интегрирования $p=y+\dfrac{1}{y}+C_1$, то есть $y'=y+\dfrac{1}{y}+C_1$. Целесообразно сразу найти C_1, используя начальные условия $y(0)=1, \quad y'(0)=2$: $2=1+1+C_1 \quad \Rightarrow$ $C_1=0$.

Итак $y'=y+\dfrac{1}{y}$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+1}{y}$, $\int\dfrac{ydy}{y^2+1}=\int dx$, $\dfrac{1}{2}\ln(1+y^2)=x+C_2$. Используя начальное условие $y(0)=1$, находим C_2: $\dfrac{1}{2}\ln 2=C_2$. Итак, искомое решение задачи Коши: $x=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y^2}{2}\right)$.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Уравнение вида $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+ \ \ldots \ +a_ny=f(x)$ (3.1)

где $a_1,a_2,\ldots,a_n$ - действительные числа, называется *линейным дифференциальным уравнением* (ЛДУ) с постоянными коэффициентами. Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (3.1) называется *однородным* (ОЛДУ), в противном случае – *неоднородным* (НЛДУ).

Общее решение ОЛДУ строится с учётом корней алгебраического уравнения $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\ldots+a_n=0$ (3.2), называемого *характеристическим* уравнением для ЛДУ (3.1).

Каждому действительному корню и каждой паре мнимых сопряжённых корней характеристического уравнения в общем решении ОЛДУ соответствует слагаемое, определяемое таблицей 3.1.

Таблица 3.1.

Вид корней характеристического уравнения	**Вид слагаемого в общем решении ОЛДУ**

λ - действительный корень кратности 1	$Ce^{\lambda x}$
λ - действительный корень кратности K	$(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_{K-1}x^{K-1})e^{\lambda x}$
$\alpha \pm \beta i$ - пара мнимых корней кратности 1	$e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$
$\alpha \pm \beta i$ - пара мнимых корней кратности K	$e^{\alpha x}\left[\left(A_0 + A_1x + \ldots + A_{K-1}x^{K-1}\right)\cos\beta x + \right.$ $\left. + \left(B_0 + B_1x + \ldots + B_{K-1}x^{K-1}\right)\sin\beta x\right]$

Здесь $C, C_0, C_1, \ldots, C_{K-1}, A, A_0, A_1, \ldots, A_{K-1}, B, B_0, B_1, \ldots, B_{K-1}$ - произвольные постоянные. Напомним что общее решение дифференциального уравнения порядка n содержит n произвольных констант.

Пример 3.1. Найти решение ОЛДУ

а) $y''' - 6y'' + 9y = 0$ (3.3)

Записываем характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda\cdot(\lambda - 3)^2 = 0$. Его корни: $\lambda_1 = 0$ - кратности 1, $\lambda_2 = 3$ - кратности 2. Первому корню в общем решении соответствует слагаемое $C_1e^{\lambda_1 x}$, то есть C_1, второму - $(C_2 + C_3x)e^{\lambda_2 x}$, то есть $(C_2 + C_3x)e^{3x}$. Общее решение ОЛДУ: $y_{о.о.} = C_1 + (C_2 + C_3x)e^{3x}$.

б) $y''' - 5y'' + 17y - 13 = 0$ (3.4)

Характеристическое уравнение :

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$$

Его корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$ - все кратности 1. Им соответствуют в общем решении ОЛДУ слагаемые Ce^x и $e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$.

Итак $y_{о.о.} = C_1e^x + e^{2x}(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x)$.

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения (3.1) используем теорему о структуре общего решения НЛДУ: $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$, где $y_{о.н.}$ - общее решение НЛДУ, $y_{о.о.}$ - общее решение соответствующего ОЛДУ, $y_{ч.н.}$ - какое-нибудь частное решение НЛДУ. Нахождение $y_{о.о.}$ описано выше. Для нахождения $y_{ч.н.}$ будем использовать метод подбора. Этот метод применим в случае, когда правая часть $f(x)$ уравнения (3.1) имеет специальный вид. В таблице 3.2. для некоторых случаев указано, в каком виде следует искать частное решение НЛДУ.

Таблица 3.2.

Вид правой части	Связь с корнями характеристического уравнения	Вид частного решения
$f(x) = P_m(x)e^{ax}$	a - не корень характер. Уравнения	$y_{ч.н.} = \widetilde{P}_m(x)e^{ax}$
	a - корень характер. Уравнения кратности K	$y_{ч.н.} = x^K\widetilde{P}_m(x)e^{ax}$

$f(x)=e^{\sigma x}\left[P_m(x)\cos\tau x+\right.$ $\left.+Q_s(x)\sin\tau x\right]$	$\sigma\pm\tau i$ - не корни характ. Уравнения	$y_{ч.н.}=e^{\sigma x}\left[\widetilde{P}_r(x)\cos\tau x+\right.$ $\left.+\widetilde{Q}_r(x)\sin\tau x\right]$
	$\sigma\pm\tau i$ - корни характ. Уравнения кратности K	$y_{ч.н.}=x^K e^{\sigma x}\left[\widetilde{P}_r(x)\cos\tau x+\right.$ $\left.+\widetilde{Q}_r(x)\sin\tau x\right]$

Здесь $P_m(x), Q_s(x)$ - заданные многочлены, $\widetilde{P}_m(x), \widetilde{P}_r(x), \widetilde{Q}_r(x)$ - многочлены с неопределёнными коэффициентами; индекс указывает степень многочлена, $r=\max\{m,s\}$.

Пример 3.2. Найти общее решение НЛДУ.

а) $y'''-6y''+9y'=(4x+8)e^x$ (3.5)

Общее решение соответствующего ОЛДУ найдено в примере 3.1.: $y_{о.о.}=C_1+(C_2+C_3x)e^{3x}$. Правая часть данного уравнения имеет вид $P_m(x)e^{ax}$, m=1, a=1. Так как a=1 не корень характеристического уравнения, то $y_{ч.н.}$ ищем в виде: $y_{ч.н.}=(A+Bx)e^x$. Для нахождения неопределённых коэффициентов A и B подставим эту функцию в уравнение (3.5). В результате подстановки получим: $y'''_{ч.н.}-6y''_{ч.н.}+9y'_{ч.н.}=(4x+8)e^x$, то есть

$(Ax+3A+B)e^x-6(Ax+2A+B)e^x+9(Ax+A+B)e^x=(4x+8)e^x$. Сокращаем обе части равенства на e^x и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях: $4A$=4, $4B$=8 $\Rightarrow A$=1, B=2.

Итак: $y_{ч.н.}=(2+x)e^x$, а $y_{о.н.}=C_1+(C_2+C_3x)e^{3x}+(x+2)e^x$.

<u>Замечание</u>. Для проверки правильности нахождения частного решения рекомендуется подставить найденное $y_{ч.н.}$ в исходное уравнение: решение найдено верно, если в результате такой подстановки получим тождество.

б) $y'''-6y''+9y'=3x^2+5x+\dfrac{2}{3}$ (3.6)

Правая часть имеет вид $P_m(x)e^{ax}$, причём m=2, a=0. Нуль является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому $y_{ч.н.}$ ищем в виде: $y_{ч.н.}=x\widetilde{P}_m(x)$, то есть $y_{ч.н.}=x(Ax^2+Bx+C)=Ax^3+Bx^2+Cx$. Подставляем в исходное уравнение и приводим подобные:

$27Ax^2+(18B-36A)x+(6A-12B+9C)=3x^2+5x+\dfrac{2}{3}$, отсюда

$$\begin{cases} 27A = 3, \\ 18B - 36A = 5, \\ 6A - 12B + 9C = \dfrac{2}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{9}, \\ B = \dfrac{1}{2}, \\ C = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Следовательно $y_{ч.н.} = \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x$.

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{3x} + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x.$$

в) $y'' + 2y' + 5y = 15e^{2y}\sin x$.

Находим общее решение соответствующего ОЛДУ, для чего решаем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Его кони $\alpha \pm \beta i = -1 \pm 2i$ кратности 1, поэтому $y_{о.о.} = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$ (см. таблицу 3.1).

Правая часть НЛДУ имеет вид $e^{\sigma x}\left[P_m(x)\cos\tau x + Q_s(x)\sin\tau x\right]$, причём $P_m(x) = 0$, $Q_s(x) = 15$, $m = s = 0$, $\sigma = 2$, $\tau = 1$. Так как $\sigma \pm \tau i = 2 \pm i$ не корни характеристического уравнения, то, согласно таблице 3.2, $y_{ч.н.}$ ищем в виде: $y_{ч.н.} = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$, $\widetilde{P}_r(x), \widetilde{Q}_r(x)$ - многочлены нулевой степени с неопределёнными коэффициентами. Находим $y'_{ч.н.}$, $y''_{ч.н.}$ и, подставляя в исходное уравнение, приводим подобные:

$$y'_{ч.н.} = e^{2x}([2A + B]\cos x + [2B - A]\sin x),\ y''_{ч.н.} = e^{2x}([3A + 4B]\cos x + [3B - 4A]\sin x),$$

$$e^{2x}([12A + 6B]\cos x + [12B - 6A]\sin x) \equiv 15e^{2x}\sin x.$$

Сокращаем обе части на e^{2x} и приравниваем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в левой и правой частях:

$$\begin{cases} 12A + 6B = 0 \\ 12B - 6A = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = 1 \end{cases}, \text{ значит } y_{ч.н.} = e^{2x}(-\frac{1}{2}\cos x + \sin x),$$

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + e^{2x}(-\frac{1}{2}\cos x + \sin x).$$

Метод подбора применим и в том случае, когда правая часть уравнения (3.1) не имеет вида, представленного в таблице 3.2, но является суммой функций такого вида. Согласно теореме суперпозиции, если $y_1(x)$ есть решение ЛНДУ $L[y] = f_1(x)$, а $y_2(x)$ - решение ЛНДУ $L[y] = f_2(x)$, то $y_1(x) + y_2(x)$ есть решение ЛНДУ $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$.

Поэтому для нахождения частного решения последнего уравнения достаточно найти какие-нибудь частные решения двух предыдущих уравнений и сложить их.

Пример 3.3. Найти общее решение НЛДУ $y'' + 2y' + 5y = 15e^{2y}\sin x + 16e^x$.

Здесь $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $\quad f_1(x) = 15e^{2y}\sin x, \quad f_2(x) = 16e^x$.

Для уравнения $L[y] = 15e^{2y}\sin x$ частное решение найдено в примере 3.2(в):

$y_1 = e^{2x}(-\frac{1}{2}\cos x + \sin x)$. Найдём $y_2(x)$ - частное решение уравнения $L[y] = f_2(x)$, то есть $y'' + 2y' + 5y = 16e^x$ (3.7)

Правая часть этого уравнения имеет вид $P_m(x)e^{ax}$, причём m=0, a=1. Так как a=1 не является корнем характеристического уравнения, то $y_2(x)$ ищем в виде: $y_2 = Ae^x$. Подставляя $y_2(x)$ в (3.7), легко найдём A=2.

Итак $y_2 = 2e^x$ и $y_{ч.н.} = y_1 + y_2 = e^{2x}(-\frac{1}{2}\cos x + \sin x) + 2e^x$,

$$y_{о.н.} = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^{2x}(-\frac{1}{2}\cos x + \sin x) + 2e^x.$$

4. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ.

Пусть имеем дифференциальное уравнение второго порядка $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$, (4.1)

$p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ - непрерывные функции. И пусть известна фундаментальная система решений $\{y_1(x), y_2(x)\}$ соответствующего однородного уравнения $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ (4.2)

тогда $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ - есть общее решение уравнения (4.2).

Будем искать решение уравнения (4.1) в виде $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ (4.3), где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - неизвестные функции от x.

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

На $C_1(x)$ и $C_2(x)$ наложим следующее условие $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$. (4.4)

Тогда $y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$. (4.5)

$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) \quad (4.6)$$

Подставляя (4.3), (4.5), (4.6) в (4.1) получим:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) + p_1(x)C_1(x)y_1'(x) +$$
$$+ p_1(x)C_2(x)y_2'(x) + p_2(x)C_1(x)y_1(x) + p_2(x)C_2(x)y_2(x) = f(x) \qquad \Leftrightarrow$$
$$C_1(x)[y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1] + C_2(x)[y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2] + C_1'(x)y_1'(x) +$$
$$+ C_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ есть решение однородного уравнения (4.2) получаем: $C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x)$ (4.7)

Значит функция $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ будет решением уравнения (4.1), если функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ будут удовлетворять одновременно уравнениям (4.4) и (4.7), то есть системе:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \qquad (4.8)$$

Определитель системы (4.8) – есть определитель Вронского линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (4.2), то есть отличен от нуля. Поэтому система (4.8) имеет единственное решение:

$$\begin{cases} C_1'(x) = \varphi_1(x), \\ C_2'(x) = \varphi_2(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + C_1, \\ C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + C_2. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (4.3), найдём частное решение (при $C_1 = 0$, $C_2 = 0$) уравнения (4.1)

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = y_1(x)\int \varphi_1(x)dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)dx.$$

Общее решение дифференциального уравнения (4.1) будет

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_1(x)\int \varphi_1(x)dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)dx.$$

Пример 4.1. Решить уравнение $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

Найдём решение характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$, запишем $y_{о.о.} = e^{0x}(C_1\cos x + C_2\sin x) = C_1\cos x + C_2\sin x$.

$y_{ч.н.}$ будем искать в виде $y_{ч.н.} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$, для этого рассмотрим и решим систему (4.8) для данного уравнения

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)\cos' x + C_2'(x)\sin' x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}C_2'(x), \\ C_2'(x)\dfrac{\sin x}{\cos x} + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}C_2'(x), \\ C_2'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -1, \\ C_2'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = -x \\ C_2(x) = \ln|\sin x| \end{cases}$, получим $y_{ч.н.} = -x\cos x + \ln|\sin x|\sin x$.

Итак $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \ln|\sin x|\sin x$.

Тема 10. Ряды. Практические занятия 26-31.

1.1. Вычисление суммы числового ряда.

Рассмотрим числовой ряд:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1.1)$$

Сумма S_n первых членов ряда (1.1) называется его n-ой *частичной суммой*: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Ряд называется *сходящимся*, если *существует конечный предел последовательности* $\{S_n\}$ его частичных сумм. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

Число S называют суммой ряда и обозначают $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Ряд называется *расходящимся*, если *не существует или бесконечен предел последовательности* частичных сумм $\{S_n\}$.

Теорема. Необходимый признак сходимости. *Если числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то предел его общего члена равен нулю* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

При исследовании ряда на сходимость необходимый признак обычно используют в следующей эквивалентной форме: *если предел общего члена отличен от нуля или не существует, то ряд расходится.*

Пример 1.1. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Применим необходимый признак сходимости. Для этого найдем предел общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, так как он отличен от нуля, делаем вывод - искомый ряд расходится.

Пример 1.2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Воспользуемся определением сходимости ряда, предварительно упростив S_n. Общий член ряда – правильная рациональная дробь. Применим метод неопределенных коэффициентов и представим общий член ряда как сумму элементарных дробей:

$$a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3} = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\\
a_2 &= \frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\\
a_3 &= \frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\\
a_4 &= \frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n-2} &= \frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\\
a_{n-1} &= \frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\\
a_n &= \frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}
\end{aligned}
$$

Суммируя члены ряда (выделенные пунктиром слагаемые в суме дают нуль), получим:

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3},\qquad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{6}.$$

Значит, ряд сходится и его сумма $S=\dfrac{1}{6}$.

1.2. Сходимость знакоположительных рядов.

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (1.2) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ (1.3) – знакоположительные ряды, то есть, $a_n>0$ и $b_n>0$.

Первый признак сравнения. Если существует такое число N, что для всех n>N выполняется неравенство $a_n\le b_n$, то

1) из сходимости ряда (1.3) следует сходимость ряда (1.2);

2) из расходимости ряда (1.2) следует расходимость ряда (1.3).

Второй признак сравнения. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k\ne 0$, то ряды (1.2) и (1.3) сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$, то:

1) при $l<1$ ряд (1.2) сходится;

2) при $l>1$ ряд (1.2) расходится;

3) при $l = 1$ признак не решает вопроса о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$, то:

1) при $l < 1$ ряд (1.2) сходится;

2) при $l > 1$ ряд (1.2) расходится;

3) при $l = 1$ признак не решает вопроса о сходимости ряда.

Интегральный признак. Если для ряда (1.2) существует функция $f(x)$ такая, что на промежутке $[c; +\infty)$, где $c \geq 1$:

1) непрерывна; 2) не возрастает; 3) $f(n) = a_n$ при $n > c$

то ряд (1.2) и $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечания.

1) При использовании признаков сравнения обычно применяются следующие ряды:

обобщенный гармонический $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, который при $\alpha > 1$ сходится, при $\alpha \leq 1$ расходится;

геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$, $a \neq 0$, который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$

2) Полезно помнить теорему о замене эквивалентных бесконечно малых в пределах, в том числе таблицу эквивалентных бесконечно малых, при $\alpha \to 0$: $\sin\alpha \approx \alpha$, $tg\alpha \approx \alpha$, $1-\cos\alpha \approx \frac{\alpha^2}{2}$, $\arcsin\alpha \approx \alpha$, $e^{\alpha} - 1 \approx \alpha$, $a^{\alpha} - 1 \approx \alpha\ln a$, $arctg\alpha \approx \alpha$, $\ln(1+\alpha) \approx \alpha$, $\log_a(1+\alpha) \approx \frac{\alpha}{\ln a}$, $(1+\alpha)^m - 1 \approx m\alpha$.

3) Если общий член ряда содержит факториалы, то к исследованию ряда на сходимость обычно применяют признак Даламбера; если содержит n-ые степени – то признак Коши.

Пример 1.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{arctg\left(2+\sin\frac{\pi n}{2}\right)}{2^n + n}$

Используя ограниченность функций $arctg(x)$, $\sin(x)$ и свойства дробей, имеем:

$$0 < \frac{arctg\left(2+\sin\frac{\pi n}{2}\right)}{2^n + n} < \frac{\pi}{2(2^n + n)} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходится как геометрический со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$. В силу полученного неравенства и первого признака сравнения исходный ряд сходится.

Пример 1.4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt[3]{3n^3+2n^2+3n+1}\cdot arctg\frac{1}{1+n^3}$$

Используя известную эквивалентность:

$$arctg\frac{1}{n^3+1}\approx\frac{1}{n^3+1} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{3n^3+2n^2+3n+1}\approx\sqrt[3]{3n^3}, \quad \text{при } n\to\infty,$$

подберем ряд для сравнения:

$$\sqrt[3]{3n^3+2n^2+3n+1}\cdot arctg\frac{1}{1+n^3} \quad\to\quad \sqrt[3]{3}n\cdot\frac{1}{n^3+1} \quad\to\quad \frac{1}{n^2}$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - это есть обобщенный гармонический ряд с $\alpha=2>1$ следовательно сходящийся.

Применим к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ и к исходному ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt[3]{3n^3+2n^2+3n+1}\cdot arctg\frac{1}{1+n^3}$ второй признак сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{3n^3+2n^2+3n+1}\cdot arctg\frac{1}{1+n^3}}{\frac{1}{n^2}}=\sqrt[3]{3}\neq 0$$

- ряды имеют одинаковый характер сходимости, а значит исходный ряд сходится.

Пример 1.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n)!\,arctg\left(n^{-n}\right)}{(4n)!\,\sin\left(n^{-1}\right)}$

Очевидно, что этот ряд знакоположительный, применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(5(n+1))!\,arctg\left((n+1)^{-(n+1)}\right)}{(4(n+1))!\,\sin\left((n+1)^{-1}\right)}}{\dfrac{(5n)!\,arctg\left(n^{-n}\right)}{(4n)!\,\sin\left(n^{-1}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+5)!\,arctg\left(\frac{1}{(n+1)^{(n+1)}}\right)(4n)!\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(4n+4)!\,\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)(5n)!\,arctg\left(\frac{1}{n^n}\right)}=$$

$$\left[\begin{array}{l} arctg\left(\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}\right)\approx\dfrac{1}{(n+1)^n(n+1)}, \quad \sin\dfrac{1}{n}\approx\dfrac{1}{n}, \quad \text{\textit{при}} \quad n\to\infty \\ arctg\left(\dfrac{1}{n^n}\right)\approx\dfrac{1}{n^n}, \quad \sin\dfrac{1}{n+1}\approx\dfrac{1}{n+1}, \qquad \text{\textit{при}} \quad n\to\infty \end{array}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(5n+5)!\,(4n)!\,(n+1)\,n^n}{(4n+4)!\,(5n)!\,(n+1)^n\,(n+1)n} =$$

$$\left[\begin{array}{l}(5n+5)! = (5n)!\,(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)(5n+5)\\(4n+4)! = (4n)!\,(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)\end{array}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{5^5}{4^4}\frac{1}{e} > 1$$

По признаку Даламбера ряд расходится.

Пример 1.6. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{5n+3}\right)^{2n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+5}{3n+3}\right)^{2n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+3}\right)^{2n}$

Решение.

а) Применим признак Коши к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{5n+3}\right)^{2n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+5}{5n+3}\right)^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{5n+3}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 < 1$, данный ряд сходится.

б) Применим признак Коши к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+5}{3n+3}\right)^{2n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n+5}{3n+3}\right)^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+5}{3n+3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 > 1$, данный ряд расходится.

в) Применим признак Коши к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+3}\right)^{2n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+5}{3n+3}\right)^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+3}\right)^2 = \left(\frac{3}{3}\right)^2 = 1$, вопрос о сходимости данного ряда открыт. Применяем другие признаки, например необходимый признак сходимости. Для этого найдем предел общего члена данного ряда, имеем:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+3}\right)^{2n} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+3}-1\right)\cdot 2n} = e^{\frac{4}{3}} \neq 0$, ряд расходится (не выполняется необходимый признак сходимости).

Пример 1.7. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{(5n^2-3)\cdot\ln^2\left(\sqrt{2}n+1\right)}$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{2}n+1\right)\cdot\ln^2\left(\sqrt{2}n+1\right)}$ $(*)$

Применим к исходному ряду и ряду $(*)$ второй признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3n+5}{\left(5n^2-3\right)\cdot\ln^2\left(\sqrt{2}n+1\right)}}{\frac{1}{\left(\sqrt{2}n+1\right)\cdot\ln^2\left(\sqrt{2}n+1\right)}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+5)(\sqrt{2}n+1)}{5n^2-3}=\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

Эти ряды имеют одинаковый характер сходимости, сходятся или расходятся одновременно.

Применим к ряду $(*)$ интегральный признак сходимости.

Функция $f(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{2}x+1\right)\cdot\ln^2\left(\sqrt{2}x+1\right)}$ $\left[f(n)=\frac{1}{\left(\sqrt{2}n+1\right)\cdot\ln^2\left(\sqrt{2}n+1\right)}\right]$

удовлетворяет на $[1\,;+\infty)$ всем условиям интегрального признака сходимости.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\left(\sqrt{2}x+1\right)\cdot\ln^2\left(\sqrt{2}x+1\right)}=\lim_{a\to+\infty}\int_1^{a}\frac{dx}{\left(\sqrt{2}x+1\right)\cdot\ln^2\left(\sqrt{2}x+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{a\to+\infty}\int_1^{a}\frac{d\left(\sqrt{2}x+1\right)}{\left(\sqrt{2}x+1\right)\cdot\ln^2\left(\sqrt{2}x+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{a\to+\infty}\int_1^{a}\frac{d\ln\left(\sqrt{2}x+1\right)}{\ln^2\left(\sqrt{2}x+1\right)}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{\ln\left(\sqrt{2}x+1\right)}\Bigg|_1^a=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{\ln\left(\sqrt{2}a+1\right)}-\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}\right)=$$

$\frac{1}{\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}$ - несобственный интеграл сходится.

На основании интегрального признака утверждаем, что ряд $(*)$ сходится, а значит сходится и исходный ряд.

1.3. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов.

Числовой ряд называется *знакопеременным,* если он содержит бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *абсолютно* сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *условно* сходящимся, если:

1) сам он сходится,

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ у которого $\forall n \in N, \quad a_n \cdot a_{n+1} < 0$, то есть последовательные члены ряда чередуются по знаку, называется знакочередующимся. Знакочередующийся ряд представим в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+k} a_n \text{, где } a_n > 0, \quad k = 0, 1. \qquad (1.4)$$

Для исследования знакочередующихся рядов на абсолютную сходимость к ряду из модулей можно применять достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами, изложенные в разделе 1.2. При этом, если расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ установлена по признаку Даламбера $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \right)$ или Коши $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \right)$, то исходный ряд расходится (не выполняется необходимый признак сходимости).

Если же расходимость ряда из абсолютных величин установлена другими признаками, то для исследования условной сходимости знакочередующегося ряда вида (1.4) можно применять *признак Лейбница*:

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+k} a_n$, где $a_n > 0, \quad k = 0, 1$ таковы, что

1) $a_n \ge a_{n+1}, \quad \forall n \in N$,
2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

тогда ряд сходится.

Напомним, что для знакочередующихся рядов, удовлетворяющих признаку Лейбница, справедлива оценка разности между суммой ряда и частичной суммой ряда: $|S - S_n| \le a_{n+1}$ (1.5)

Ряды Лейбница вида $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+k} \frac{1}{n^\alpha}$, где $k = 0, 1$ - сходятся при $\alpha > 0$.

Пример 1.8. Исследовать ряды на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} tg \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} tg \frac{1}{n^2}$.

Исследуем на абсолютную сходимость, составив ряды из абсолютных величин: $\sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{1}{n^2}$.

Использовав соотношения эквивалентности: $tg \frac{1}{n} \approx \frac{1}{n}, \quad n \to \infty$ и $tg \frac{1}{n^2} \approx \frac{1}{n^2}, \quad n \to \infty$, в силу второго признака сравнения имеем: $\sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{1}{n}$ - расходится, а $\sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{1}{n^2}$ - сходится. Значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} tg\frac{1}{n^2}$ - абсолютно сходится.

Исследуем на условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} tg\frac{1}{n}$. Очевидно, что

1) в силу монотонного возрастания функции tgx на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ из неравенства $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$ следует $tg\frac{1}{n}>tg\frac{1}{n+1}$, $\forall\ n\in N$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} tg\frac{1}{n}=0$

По признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} tg\frac{1}{n}$ сходится.

Итак, ряд сходится условно.

Пример 1.9. Вычислить сумму S ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{5^n(n+1)}$ с точностью $\alpha=0{,}01$.

Очевидно, $\frac{\cos\pi n}{5^n(n+1)}=\frac{(-1)^n}{5^n(n+1)}$, то есть ряд знакочередующийся и абсолютно сходящийся, так как $\left|\frac{\cos\pi n}{5^n(n+1)}\right|\le\frac{1}{5^n(n+1)}<\left(\frac{1}{5}\right)^n$

Применив оценку (1.5), получим: $|S-S_n|\le\frac{1}{5^{n+1}(n+2)}$. Потребуем чтобы $\frac{1}{5^{n+1}(n+2)}<\alpha=0{,}01$, тогда $5^{n+1}(n+2)>100$. Это неравенство выполняется при $n\ge 2$.

Значит $S\approx S_2=1-\frac{1}{5\cdot 2}+\frac{1}{25\cdot 3}=\frac{137}{150}\approx 0{,}91$ (с точностью $\alpha=0{,}01$)

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.

2.1. Сходимость функциональных рядов.

Рассмотрим функциональный ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x) \qquad (2.1)$$

где $f_n(x)$, $n=1,2,\ldots$ – функции, определенные на некотором множестве G .

Областью сходимости ряда (2.1) называется множество всех $x=x_0\in$G, при которых числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится (хотя бы условно). Отыскание области сходимости можно производить по схеме:

1) находим, при каких фиксированных $x \in G$ сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, составленный из модулей членов ряда (2.1) (это точки абсолютной сходимости), используя достаточные признаки сходимости числовых знакоположительных рядов;

2) для тех x, при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ *расходится*, исследуем на условную сходимость исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Пример 2.1. Найти область сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{(n+1)^{2x}\left(n^2+a^x\right)} \tag{2.2}$$

Так как $(n+1)^{2x} > 0$, $\left(n^2+a^x\right) > 0$ при любых действительных x и $n \in N$, то исследуем ряд (2.2) как числовой знакоположительный ряд. Видим, что при $n \to \infty$

$$\frac{\sqrt{n+2}}{(n+1)^{2x}\left(n^2+a^x\right)} = \frac{n^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{n^{2x}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x} n^2\left(1+\frac{a^x}{n^2}\right)} \approx \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{2x+2}} = \frac{1}{n^{2x+\frac{3}{2}}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(2x+\frac{3}{2})}$ сходятся как обобщённый гармонический при $2x+\frac{3}{2} > 1$, т.е. $x > -\frac{1}{4}$, и расходится при $x \le -\frac{1}{4}$. Значит, по II признаку сравнения, в силу соотношения эквивалентности, исходный ряд сходится при $x > -\frac{1}{4}$ и расходится при $x \le -\frac{1}{4}$.

Таким образом, область сходимости ряда (2.2) – множество x, удовлетворяющих неравенству $x > -\frac{1}{4}$.

Пример 2.2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\left(x^2-5x+4\right)^n}\cdot\frac{n}{n+1}$$

Очевидно, область определения ряда $x\in R\setminus\{1;4\}$.

Применив признак Коши к ряду из абсолютных величин, получим, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{|x^2-5x+4|^n}\cdot\frac{n}{n+1}}=\frac{2}{|x^2-5x+4|}$$

ряд будет сходится если $\frac{2}{|x^2-5x+4|}<1$, то есть

$$|x^2-5x+4|>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-5x+4>2\\ x^2-5x+4<-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\frac{5+\sqrt{17}}{2}\\ x<\frac{5-\sqrt{17}}{2}\\ 2<x<3.\end{array}\right.$$

При $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$; 2; 3 признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Дополнительно исследуем исходный ряд в этих точках.

При x=2; 3 имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$, при $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ - ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$, полученные ряды расходятся , т.к. не выполняется необходимый признак сходимости ($\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$).

Значит, область сходимости исходного ряда есть множество D= $\left(-\infty,\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)\cup(2;3)\cup\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$, причем сходимость абсолютная.

Пример 2.3. Найти область сходимости ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt[5]{n}}x^{2n}\sin(x+\pi n).$$

При $x=\pi\kappa,\kappa\in\mathrm{Z},\sin x=0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt[5]{n}}\left[x^{2n}\sin(x+\pi n)\right]=0$, т.е. ряд сходится. Пусть $x\neq\pi\kappa,\ \kappa\in\mathrm{Z}$. Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt[5]{n}}x^{2n}\left|\sin(x+\pi n)\right|}=2x^2<1,\text{ если } |x|<\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ , то есть : }-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ , ряд сходится .}$$

При $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ признак Коши не решает вопроса о сходимости ряда. Исследуем исходный ряд в этих точках. Так как $\sin(x+\pi n)=(-1)^n\sin x$ то для $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt[5]{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}\sin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{5}}}\sin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Это ряды типа Лейбница, сходящиеся условно. Таким образом, область сходимости исходного ряда – множество

$$D=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\{x=\pi\kappa;\kappa=0,\pm1,\pm2...\},\text{ при } x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ сходимость условная.}$$

Пример 2.4. Найти область сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n\sqrt{x}}}{\ln(e-x)}arctg\frac{x}{3^{n\sqrt{x}}}$$

Область определения ряда: $0\le x<e,\quad x\ne e-1$. Применив признак Коши, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{n\sqrt{x}}}{\ln(e-x)}\left|arctg\frac{x}{3^{n\sqrt{x}}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{n\sqrt{x}}}{|\ln(e-x)|}*\frac{|x|}{3^{n\sqrt{x}}}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{3^{n\sqrt{x}}}=\left(\frac{e}{3}\right)^{\sqrt{x}}$$

т.к. $arctg\dfrac{x}{3^{n\sqrt{x}}}\approx\dfrac{x}{3^{n\sqrt{x}}},n\to\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\ln(e-x)|}=1$. Очевидно, что $\left(\dfrac{e}{3}\right)^{\sqrt{x}}<1$, при $x>0$.

При $x=0\quad f_n(x)=0,\quad n=1,2,...,$ т.е. ряд сходится. Значит, с учетом области определения, имеем область сходимости $D=\{x:0\le x<e,x\ne e-1\}$.

Пример 2.5. Найти область сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(n+2)\ln(n+2)}.$$

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+5|^{n+1}(n+2)\ln(n+2)}{(n+3)\ln(n+3)|x+5|^n}=\lim_{n\to\infty}|x+5|\frac{(n+2)}{(n+3)}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)}=|x+5|,$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)}=\lim_{t\to\infty}\frac{[\ln(t+2)]'}{[\ln(t+3)]'}=\lim_{t\to\infty}\frac{t+3}{t+2}=1.\right)$$

Значит, при $|x+5|<1$, т.е. при $-6<x<-4$ ряд сходится абсолютно. При $x=-4$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$, который расходится по интегральному признаку. При $x=-6$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}$, который сходится по признаку Лейбница (условно). Значит , область сходимости – множество $D=\{x:-6\le x<-4\}$; при $x=-6$ сходимость условная.

2.2 Равномерная сходимость функциональных рядов.

Пусть функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (2.3)$$

имеет область сходимости *G*. Ряд (2.3) называется равномерно сходящимся на $D\subset G$ к своей сумме $S(x)$, если для любого числа $\varepsilon>0$ (сколь угодно малого) найдется номер $N(\varepsilon)$(не зависящий от $x\in D$), такой, что для всех номеров $n>N(\varepsilon)$ и сразу для всех $x\in D$ выполняется неравенство $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$. Для исследования на равномерную сходимость можно использовать *признак Вейерштрасса*: если для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ найдется такой числовой знакоположительный сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, что сразу для всех *x* из некоторого множества *D* выполняются неравенства $|f_n(x)|\le a_n$, $n=1,2,3,...$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ равномерно и абсолютно сходится на *D*.

Пример 2.6. Доказать, исходя из определения, равномерную сходимость на отрезке [0,1] функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+2}. \qquad (2.4)$$

При каких *n* абсолютная величина остаточного члена ряда не превосходит 0,01 для всех

$x \in [0;1]$. Воспользуемся определением равномерной сходимости. Заметим, что для всех $x \in [0;1]$. и $n \in N$ выражение $\dfrac{x^n}{n+2} \ge 0$.Функция $y = x^n$ на [0;1] монотонно возрастает от 0 до 1 и ряд (2.4) при каждом фиксированном $x \in (0;1]$ - знакочередующийся.

Для $\forall x \in (0;1]$ выполнены условия признака Лейбница:

1) из неравенства $0 < \dfrac{x^n}{n+2} \le \dfrac{1}{n+2}$ и теоремы о пределе промежуточной функции следует , что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n+2} = 0;$

2) $\dfrac{x^n}{n+2} \ge \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)+2}$. Значит, ряд (2.4) сходится в любой точке промежутка $(0,1]$.

Очевидно, он сходится при $x = 0$. На интервале $(0,1]$ – это ряд типа Лейбница, поэтому можно применить оценку (1.11): $|S(x) - S_n(x)| \le \dfrac{|x|^{n+1}}{n+3} \le \dfrac{1}{n+3}$.

Эта оценка справедлива и при $x = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\dfrac{1}{n+3} < \varepsilon$ при $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 3$.Возьмем номер $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. Очевидно, для всех $n > N(\varepsilon)$ и сразу для всех $x \in [0;1]$.

$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, т.е. по определению ряд (2.4) сходится равномерно на [0;1].

Положим $\varepsilon = 0{,}01$, тогда из $\dfrac{1}{n+3} < 0{,}01$.

Имеем $n + 3 > 100$. Значит, для $\forall n > 97$ абсолютная величина остаточного члена ряда не превосходит 0,01.

Пример 2.7. Доказать равномерную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx) \cdot x^n}{\sqrt{3n^7 + 1} \cdot 2^{n!}} \quad \text{на отрезке [-2;2].}$$

Воспользуемся признаком Вейерштрасса. Заметим, что $|\sin nx| \le 1$ для любых x, функция $y = |x|$ на отрезке [-2;2] принимает наибольшее значение на концах отрезка.

$$\left|\frac{\sin(nx)x^n}{\sqrt{3n^7+12^{n!}}}\right| < \frac{2^n}{n^{\frac{7}{5}}2^n} = \frac{1}{n^{\frac{7}{5}}}$$

т.е. $|f_n(x)|$ не превосходит n-го члена сходящегося числового знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^7}}$.

Значит, по признаку Вейерштрасса исходный ряд на [-2;2] равномерно и абсолютно сходится.

2.3 Нахождение сумм степенных рядов.

Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \tag{2.5}$$

называется степенным.

Если ряд (2.5) расходится хотя бы в одной точке, то существует такое число R,

$0 \le R < +\infty$, что

3) для $x \in (-R, R)$ ряд (2.5) сходится;

4) для $x \notin (-R, R)$ ряд (2.5) расходится.

Это число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а интервал $(-R,R)$ - *интервалом сходимости*. Радиус сходимости ряда (2.5) удобно находить:

3) по формулам $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $R = \left[\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right]^{-1}$, если пределы существуют;

4) При помощи признаков Даламбера и Коши.

Полезно запомнить следующие свойства степенных рядов:

- на любом отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости, степенной ряд сходится абсолютно и равномерно;

- на любом отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости, степенной ряд можно почленно интегрировать любое число раз;

- в любой точке интервала сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз.

Напомним, что на интервале $|x| < 1$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

(сумма геометрической прогрессии).

Пример 2.7. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}$$

Легко убедиться, что интервал сходимости ряда - $(-1;1)$. На этом интервале

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+6}}{(2n+3)(2n+4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4}\right] x^{2n+6} =$$

$$= x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{2n+3} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+4}}{2n+4} \qquad (2.6)$$

Ряды, стоящие в правой части (2.6), можно получить интегрированием рядов

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2}, \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+3}$; при этом

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+2}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^{2n+2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{2n+3}, \qquad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+3}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^{2n+3} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+4}}{2n+4}.$$

Заметим, что $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2\right)^n = \frac{x^2}{1-x^2}, \ \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+3} = \frac{x^3}{1-x^2}, |x| < 1$. Значит,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{2n+3} &= \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt = \int_0^x \left[\frac{1}{1-t^2} - 1\right] dt = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x, |x| < 1. \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+4}}{2n+4} &= \int_0^x \frac{t^3}{1-t^2} dt = \int_0^x \left[\frac{t}{1-t^2} - t\right] dt = -\frac{1}{2} \ln\left(1-x^2\right) - \frac{x^2}{2}, |x| < 1. \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Поэтому, с учетом (2.6), (2.7),имеем

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{2n+3} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+4}}{2n+4} =$$

$$= x^3 \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x\right] - x^2 \left[-\frac{1}{2} \ln\left(1-x^2\right) - \frac{x^2}{2}\right] =$$

$$= -\frac{x^4}{2} + \frac{x^2 \cdot [(x+1)\ln(x+1) + (1-x)\ln(1-x)]}{2}, \quad |\, x \,| < 1$$

Пример 2.8. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(6n^2-3n+7)x^n$$

При последовательном дифференцирование ряда $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ на интервале сходимости |x|<1 получим:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n.$$

Значит, $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n=\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Представим многочлен $6n^2-3n+7$ в виде: $6n^2-3n+7=A(n+2)(n+1)+B(n+1)+C$,

где A, B, C – неопределённые коэффициенты, которые найдём, решив систему:

$$\begin{cases}A=6\\3A+B=-3\\2A+B+C=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=6\\B=-21.\\C=16\end{cases}$$

Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}(6n^2-3n+7)x^n=6\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n-21\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+16\sum_{n=0}^{\infty}x^n=$$

$$=\frac{12}{(1-x)^3}-\frac{21}{(1-x)^2}+\frac{16}{1-x}=\frac{16x^2-11x+7}{(1-x)^3},\quad |x|<1.$$

2.4 Разложение функций в ряды.

Если функция $f(x)$ определена вместе со своими производными в некоторой окрестности точки $x=a$, то она разложима в ряд Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)\qquad(2.8)$$

при условии, что остаток ряда

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}+\frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}\cdot(x-a)^{n+2}+\ldots+\frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!}\cdot(x-a)^{n+k}+\ldots=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}\to 0$$

(стремится к нулю) при $n\to\infty$. Здесь $0<\theta<1$, а остаток записан в форме Лагранжа.

Разложение (2.8), в частности, имеет место в промежутке $-R+a<x<R+a$, если функция $f(x)$ имеет в нём ограниченные производные всех порядков, то есть если $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ при всех n.

При $a=0$ ряд Тейлора имеет вид:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

и называется рядом Маклорена.

Основными табличными разложениями являются:

1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $(-\infty<x<\infty)$,

2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(-\infty<x<\infty)$,

3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}$, $(-\infty<x<\infty)$,

4) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, $(-1<x<1)$,

5) $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+$

$+\ldots=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$, $(-1<x<1)$,

6) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot x^{n+1}}{n+1}$, $(-1<x\le 1)$,

7) $arctgx=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{2n-1}$,

$(-1\le x\le 1)$.

Используя эти разложения, можно довольно просто находить разложения многих других функций.

Пример 2.9. Разложить в функцию $f(x)=\sin\frac{x^2}{3}$ в ряд Маклорена.

Решение. Полагаем $\frac{x^2}{3}=y$. Тогда

$$\sin\frac{x^2}{3}=\sin y=y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+\ldots=\frac{x^2}{3}-\frac{x^6}{3!\cdot 3^3}+\frac{x^{10}}{5!\cdot 3^5}-\frac{x^{14}}{7!\cdot 3^7}+\ldots$$

Разложение имеет место при всех x.

Иногда разложение функции в ряд получается суммированием табличных рядов.

Пример 2.10. Разложить в ряд функцию $f(x)=\ln\left(6+x-x^2\right)$

Решение:

Так как $6+x-x^2=(3-x)(2+x)$, то

$$\ln(6+x-x^2)=\ln(3-x)(2+x)=\ln(3-x)+\ln(2-x)=$$

$$=\ln 3+\ln(1-\frac{x}{3})+\ln 2+\ln(1+\frac{x}{2}),\ \text{при}\ x\in(-2;3)$$

Учитывая, что $\ln(1+y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{n+1}}{n+1}$, $(-1<y\le 1)$, получим:

$$f(x)=\ln 3+\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(-\frac{x}{3}\right)^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{n+1}=$$

$$=\ln 3+\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}=\ln 3+\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{n+1}-2^{n+1}}{(n+1)6^{n+1}}x^{n+1}.$$

Разложение имеет место при

$$\begin{cases}-1<-\frac{x}{3}\le 1\\ -1<\frac{x}{2}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x<3\\ -2<x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-2;\,2]$$

Для разложения функции в ряд Тейлора в окрестности точки a (то есть, по степеням $(x-a)$), находят коэффициенты непосредственно, т.е. вычисляют значения производных, либо преобразуют функцию.

Пример 2.11. Разложить в ряд функцию $f(x)=\dfrac{1}{4+3x}$ по степеням $(x+2)$ и указать интервал сходимости полученного разложения.

Решение.

$$\frac{1}{4+3x}=\frac{1}{-2+3(x+2)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3(x+2)}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\left[\frac{3(x+2)}{2}\right]+\left[\frac{3(x+2)}{2}\right]^2+\ldots+\left[\frac{3(x+2)}{2}\right]^n+\ldots\right)=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n(x+2)^n.$$

Полученное разложение верно для всех x , удовлетворяющих неравенству:

$$-1<\frac{3(x+2)}{2}<1 \text{ или } -\frac{2}{3}<(x+2)<\frac{2}{3}.$$

Вычитая из каждой части неравенства по 2 , получаем:

$$-\frac{8}{3}<x<-\frac{4}{3}\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{8}{3};-\frac{4}{3}\right)$$

область сходимости ряда к своей функции.

Тема 11. Криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля. Практические занятия 32-36.

Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент

Говорят, что в области *D* (пространственной или плоской) задано ***скалярное поле***, если каждой точке *M* из *D* поставлено в соответствие некоторое число. Тем самым в области *D* определена скалярная функция *u(M)*. Если ввести некоторую систему координат, например, трехмерную декартову, то точка *M* будет определяться тройкой чисел *x*, *y*, *z*, а задание поля *u(M)* сведется к заданию функции от трех переменных, которую будем обозначать той же буквой *u*: *u(x,y,z)*.

Термином «поле» подчеркивается тот факт, что значение функции *u* зависит только от точек *M* и не зависит от того, в каких координатах задаются эти точки.

Пусть *u(M)* – некоторое скалярное поле в области *D* и M_0 – внутренняя точка из *D*. Возьмем вектор (луч) $\vec{\ell}$ с началом в точке M_0 и произвольную точку $M\neq M_0$ на $\vec{\ell}$ (так, чтобы отрезок M_0M целиком принадлежал области *D*).

Определение. *Производной* скалярного поля ***u*** *в точке* M_0 *по направлению* $\vec{\ell}$ называется предел отношения разности $u(M)-u(M_0)$ к длине отрезка M_0M, когда M стремится к M_0

по лучу $\vec{\ell}$:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = \lim_{M \to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{|M_0 M|}.$$

Пусть поле ***u*** задано в декартовой системе координат, т.е. $u = u(x, y, z)$.

Теорема 1. *Если функция* $u = u(x, y, z)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, *то в этой точке существует производная поля* ***u*** *по любому направлению, причем*

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (1)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *- направляющие косинусы вектора* $\vec{\ell}$.

Пример 1. Найти производную скалярного поля $u = x^2 y + 2y + yz$ в точке $M_0(-1, 2, 0)$ в направлении вектора $\overrightarrow{M_0 M}$, $M\ (3, 1, 1)$.

Решение. Находим частные производные функции $u(x, y, z)$ и вычисляем их значения в точке $M_0(-1, 2, 0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy,\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 2 + z,\ \frac{\partial u}{\partial z} = y;$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = -4,\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = 3,\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 2.$$

Вектор $\vec{\ell} = \overrightarrow{M_0 M}$ имеет вид: $\vec{\ell} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, а единичный вектор того же направления представим в виде:

$$\vec{\ell}^0 = \frac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|} = \frac{4}{\sqrt{18}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{18}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{18}}\vec{k}.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{18}},\ \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{18}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{18}}.$$

По формуле (1) получим:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell} = -4\cdot\frac{4}{\sqrt{18}} + 3\cdot(-\frac{1}{\sqrt{18}}) + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{18}} = -\frac{17}{\sqrt{18}}.$$

Определение. *Градиентом* скалярного поля $u = u(x,y,z)$ в точке M_0 называется вектор $grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, где частные производные вычисляются в точке M_0 (предполагается, что они существуют).

Это определение использует декартову систему координат. Можно дать другое, инвариантное определение градиента. Действительно, из формулы (1) следует, что $\frac{\partial u}{\partial \ell} = (grad\, u, \vec{\ell}^{\,0}) = Пр_{\vec{\ell}}\, grad\, u$, где $(grad\, u, \vec{\ell}^{\,0})$ - скалярное произведение.

Таким образом, градиент скалярного поля *u* в точке M_0 - это вектор, проекция которого на любое направление $\vec{\ell}$ равна производной поля u в точке M_0 в направлении $\vec{\ell}$.

Отсюда, в частности, можно сделать следующий вывод: если поверхность *S* задана уравнением $V(x,y,z) = 0$, то единичная нормаль к этой поверхности в точке M_0 может быть найдена через градиент скалярного поля *V* по формуле

$$\vec{n}^{\,0}(M_0) = \pm\frac{grad\, V(M_0)}{|grad\, V(M_0)|}. \qquad (2)$$

Знак «+» берется в случае, когда направление искомой нормали и градиента совпадают, а «-» - в противном случае.

Пример 2. Найти производную скалярного поля $u = -x^2 y + z^2$ в точке $M_0(2,2,8)$ в направлении нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$, образующей острый угол с положительным направлением оси *OZ*.

Решение. Воспользуемся формулой $\frac{\partial u}{\partial l} = (grad\, u, \vec{\ell}^{\,0})$, где $\vec{\ell}^{\,0} = \vec{n}^{\,0}$ - указанная единичная нормаль к поверхности *S* в точке M_0.

Найдем градиент поля *u* в т. M_0 (в координатной форме):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2xy,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -x^2,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2z;$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = -8\,,\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = -4\,,\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 16\,;$$

$$grad\ u(M_0) = -8\vec{i} - 4\vec{j} + 16\vec{k}\,.$$

Для нахождения нормали $\vec{n}^0$ воспользуемся формулой (2). В нашем случае поверхность S задана уравнением $z = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - z = 0$. Поэтому возьмем $V = x^2 + y^2 - z$.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2x\,,\ \frac{\partial V}{\partial y} = 2y\,,\ \frac{\partial V}{\partial z} = -1\,;$$

$$\frac{\partial V(M_0)}{\partial x} = 4\,,\ \frac{\partial V(M_0)}{\partial y} = 4\,,\ \frac{\partial V(M_0)}{\partial z} = -1\,;$$

$$grad\ V(M_0) = 4\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}\,,$$

$$\left|\ grad\ V(M_0)\ \right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{33}\,.$$

$\dfrac{grad\ V(M_0)}{\left|grad\ V(M_0)\right|} = \dfrac{4}{\sqrt{33}}\vec{i} + \dfrac{4}{\sqrt{33}}\vec{j} - \dfrac{1}{\sqrt{33}}\vec{k}$ - это одна из двух противоположных по направлению единичных нормалей к S.

По условию нормаль образует с осью OZ острый угол и, значит, ее проекция на ось OZ положительна; у последнего вектора она отрицательна. Следовательно, в формуле (2) нужно взять знак минус:

$$\vec{n}^0 = -\frac{4}{\sqrt{33}}\vec{i} - \frac{4}{\sqrt{33}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{33}}\vec{k}\,.$$

Окончательно находим:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = (grad\ u, \vec{n}^0) = (-8)\cdot\left(-\frac{4}{\sqrt{33}}\right) + (-4)\cdot\left(-\frac{4}{\sqrt{33}}\right) + 16\cdot\frac{1}{\sqrt{33}} = \frac{64}{\sqrt{33}}\,.$$

<u>Пример 3</u>. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \dfrac{x^2 z}{y^2}$ и $V = -\dfrac{x^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}y^2 + 3\sqrt{2}z^2$ в точке $M_0(2, \sqrt{\dfrac{2}{3}}, \dfrac{1}{3})$.

Решение. Известно, что угол φ между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится из формулы

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Воспользуемся этой формулой для $\vec{a} = grad\, u$ и $\vec{b} = grad\, V$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xz}{y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x^2 z}{y^3},\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x^2}{y^2};$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 2,\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = -4\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 6;$$

$$grad\, u(M_0) = 2\vec{i} - 4\sqrt{\frac{3}{2}}\vec{j} + 6\vec{k},$$

$$\left|\ grad\, u(M_0)\ \right| = \sqrt{2^2 + \left(4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 6^2} = 8.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\sqrt{2}x,\ \frac{\partial V}{\partial y} = -6\sqrt{2}y,\ \frac{\partial V}{\partial z} = 6\sqrt{2}z;$$

$$\frac{\partial V(M_0)}{\partial x} = -2\sqrt{2},\ \frac{\partial V(M_0)}{\partial y} = -4\sqrt{3},\ \frac{\partial V(M_0)}{\partial z} = 2\sqrt{2};$$

$$grad\, V(M_0) = -2\sqrt{2}\vec{i} - 4\sqrt{3}\vec{j} + 2\sqrt{2}\vec{k},$$

$$\left|\ grad\, V(M_0)\ \right| = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 8.$$

$$\cos\varphi = \frac{(grad\, u, grad\, V)}{|grad\, u|\cdot|grad\, V|} = \frac{-4\sqrt{2} + 24\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{8\cdot 8} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

2. Векторное поле. Векторные линии

Говорят, что в области D (пространственной или плоской) задано векторное поле, если каждой точке M из D поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$. Если введена прямоугольная декартова система координат, то векторное поле определит в D некоторую векторную функцию от координат точки M: $\vec{a}\,(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ - для пространственной области или $\vec{a}\,(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ - для плоской области. В дальнейшем будем предполагать, что скалярные функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ имеют непрерывные частные производные в D, т.е. поле $\vec{a}\,(x,y,z)$ непрерывно дифференцируемое. Для геометрической характеристики векторного поля вводят понятие векторной линии.

Определение. *Векторной линией* поля $\vec{a}$ называется гладкая кривая, в каждой точке M которой касательная имеет то же направление, что и вектор $\vec{a}(M)$.

Векторные линии поля $\vec{a}\,(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \qquad (3)$$

Аналогично, если поле имеет вид $\vec{a}\,(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, то уравнение векторных линий имеет вид:

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}. \qquad (4)$$

Пример 4. Найти векторные линии поля $\vec{a}\,(x,y,z) = (y+z)\vec{i} - x\vec{j} - x\vec{k}$.

Решение. В данном случае $P(x,y,z) = y+z$, $Q(x,y,z) = -x = R(x,y,z)$ и система (3) принимает вид:

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y+z}{-x} \\[2ex] \dfrac{dz}{dy} = 1, \end{cases},$$

где $x = x(y)$, $z = z(y)$ - неизвестные функции. Из второго уравнения получаем: $dz = dy \Leftrightarrow z = y + c_1$. Подставим в первое уравнение: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2y+c_1}{-x}$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Решаем его:

$$-xdx=(2y+c_1)dy \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2}=y^2+c_1y+c_2 \Leftrightarrow x^2+2y^2+2c_1y+2c_2=0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2+y^2)+(y^2+2c_1y+c_1^{\,2})=c_1^2-2c_2 \Leftrightarrow (x^2+y^2)+(y+c_1)^2=c_1^2-2c_2.$$

Но $y+c_1=z$, следовательно, $x^2+y^2+z^2=c_1^2-2c_2$. Обозначив $c_1^2-2c_2=c$, получим $x^2+y^2+z^2=c$.

Итак, векторные линии поля $\vec{a}$ определяются системой алгебраических уравнений $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=c \\ z=y+c_1 \end{cases}$.

Это семейство пространственных кривых, которые получаются пересечением сфер $x^2+y^2+z^2=c$ и плоскостей $z=y+c_1$, параллельных оси *OX*.

<u>Пример 5</u>. Найти векторные линии поля $\vec{a}=(y-1)\vec{i}-(x-2)\vec{j}$.

<u>Решение</u>. Воспользуемся уравнением (4), которое в данном случае принимает вид: $\dfrac{dx}{y-1}=\dfrac{dy}{2-x}$.

Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получим:

$$(2-x)dx=(y-1)dy \Leftrightarrow -\frac{(x-2)^2}{2}=\frac{(y-1)^2}{2}+c_1 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=c.$$

Таким образом, векторные линии представляют собой окружности в плоскости *XOУ* с центром в точке (2; 1).

3. Поток векторного поля

<u>Определение</u>. *Потоком векторного поля* $\vec{a}$ через поверхность *S* в направлении нормали $\vec{n}^0$ к поверхности *S* называется поверхностный интеграл первого рода

$$\Pi=\iint\limits_S(\vec{a},\vec{n}^0)ds, \qquad (5)$$

<u>Решение</u>. Поверхность *S* представляет собой круговой конус, ось которого совпадает с осью *OУ* (рис. 1).

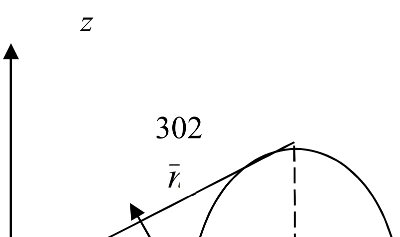


Рис. 1

Найдем единичную нормаль к поверхности *S* по формуле (2), для чего рассмотрим скалярное поле $V = x^2 + z^2 - y^2$:

$$grad\ V = 2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 2z\vec{k},$$

$$|grad\ V| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Так как интеграл (5) берется по поверхности *S*, а на ней $x^2 + z^2 = y^2$, то $|grad\ V| = 2\sqrt{2y^2} = 2\sqrt{2}y$.

$$\vec{n}^0 = \pm\frac{grad\ V}{|grad\ V|} = \pm\frac{2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{2\sqrt{2}y} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}\vec{i} - \vec{j} + \frac{z}{y}\vec{k}\right).$$

Нормаль к внешней стороне конуса *S* образует с осью *OУ* тупой угол, т.е. ее проекция на ось *OУ* отрицательна. Следовательно, в последней формуле нужно взять знак «+»:

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}\vec{i} - \vec{j} + \frac{z}{y}\vec{k}\right).$$

$$(\vec{a}, \vec{n}^0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x+z)\frac{x}{y} - (y-2) + (z-x)\frac{z}{y}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^2}{y} + \frac{xz}{y} + 2 - y + \frac{z^2}{y} - \frac{xz}{y}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^2 + z^2}{y} - y + 2\right) = \sqrt{2} \text{ (на } S\ x^2 + z^2 = y^2\text{)}.$$

Итак, $\prod = \iint\limits_S \sqrt{2}ds = \sqrt{2}\iint\limits_S ds$. Последний интеграл равен площади $S_б$ боковой поверхности конуса *S*. Так как $S_{á} = \pi R\ell = \pi \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$, то $\prod = 8\pi$.

В последнем примере вычисление поверхностного интеграла свелось к вычислению площади поверхности *S*. В более общем случае приходится использовать ту или иную формулу вычисления поверхностных интегралов.

Пусть, например, поверхность *S* однозначно проектируется на плоскость *XOY*. Тогда ее можно задать уравнением $z = z(x, y)$, а поверхностный интеграл (5) можно свести к двойному интегралу по формуле:

$$\Pi = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}^0) ds = \iint_{D_{x,y}} \frac{(\vec{a}, \vec{n}^0) dxdy}{|\cos \gamma|}, \tag{6}$$

где $D_{x,y}$ - проекция поверхности *S* на плоскость *XOY*, а γ - угол единичной нормали к S с осью *OZ*. Заметим, что $\vec{n}^0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$, поэтому $\cos\gamma$ получаем при нахождении нормали $\vec{n}^0$.

Если поверхность S не проектируется однозначно ни на одну из координатных плоскостей, то ее разбивают на части, каждая из которых однозначно проектируется на ту или иную координатную плоскость.

Пример 7. Найти поток поля $\vec{a} = (x - 6z)\vec{i} + (2y + x)\vec{j} + z\vec{k}$ через часть плоскости $x - 2y + 3z - 6 = 0$, вырезаемую координатными плоскостями (нормаль образует острый угол с осью *OZ*).

Решение. Нормаль к поверхности S можно найти по формуле (2), но проще учесть, что в уравнении плоскости коэффициенты при *x, y, z* являются координатами некоторого перпендикулярного к плоскости вектора, т.е. вектор $\vec{n}^0 = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ является нормалью к S. Тогда $\vec{n}^0 = \pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm\frac{\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{14}}$. Отсюда, в частности, получаем: $|\cos\gamma| = \frac{3}{\sqrt{14}}$, а так как по условию нормаль образует острый угол с осью *OZ*, то нужно взять знак «+», т.е.

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k};$$

$$(\vec{a}, \vec{n}^0) = \frac{1}{\sqrt{14}}(x - 6z - 2(2y + x) + 3z) = -\frac{x + 4y + 3z}{\sqrt{14}}.$$

В данном примере поверхность S (треугольник) однозначно проектируется на каждую из координатных плоскостей. Возьмем для определенности проекцию на плоскость *XOY* (см. рис. 2).

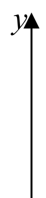


Рис. 2

Уравнение плоскости запишем в виде $z=\dfrac{6-x+2y}{3}$ и подставим правую часть вместо z в $(\vec{a},\vec{n}^{\,0})$:

$$(\vec{a},\vec{n}^{\,0})=-\frac{1}{\sqrt{14}}(x+4y+6-x+2y)=-\frac{6}{\sqrt{14}}(y+1).$$

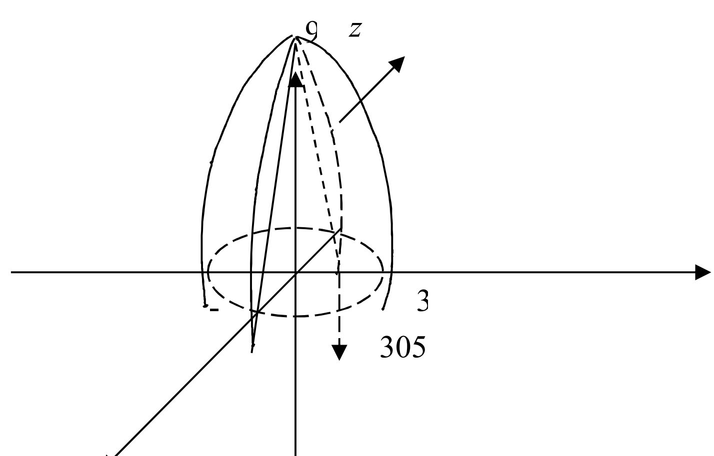
По формуле (6) получим:

$$\iint\limits_{D_{x,y}}\frac{(\vec{a},\vec{n}^{\,0})dxdy}{|\cos\gamma|}dxdy=-2\iint\limits_{D_{xy}}(y+1)dxdy=-2\int\limits_0^6 dx\int\limits_{\frac{x-6}{2}}^{0}(y+1)dy=-2\int\limits_0^6 dx\left.\frac{(y+1)^2}{2}\right|_{\frac{x-6}{2}}^{0}=$$

$$\int\limits_0^6\left[\frac{(x-6)^2}{4}+(x-6)\right]dx=\left[\frac{(x-6)^3}{12}+\frac{(x-6)^2}{2}\right]\Bigg|_0^6=0.$$

<u>Пример 8</u>. Найти поток поля $\vec{a}=2x\vec{i}-y\vec{j}+z\vec{k}$ через замкнутую поверхность $S:\begin{cases}x^2+y^2=9-z\\ z=0\end{cases}$ (нормаль внешняя).

<u>Решение</u>. Поверхность $x^2+y^2=9-z$ представляет собой параболоид вращения (рис. 3), т.е. поверхность S состоит из части S_1 параболоида и части S_2 плоскости $z=0$.



3 y

x

Рис. 3

Поток через поверхность S будет равен сумме потоков $\Pi_1 + \Pi_2$ через S_1 и S_2 соответственно. Для нахождения нормали $\vec{n}_1^0$ к S_1 рассмотрим скалярное поле $V = x^2 + y^2 + z - 9$ и воспользуемся формулой (2).

$$grad\, V = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}, \quad |grad\, V| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1};$$

$$\vec{n}_1^{\,0} = \frac{grad\, V}{|grad\, V|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$ (при выборе знака нормали учли, что ее проекция на ось *OZ* положительна для внешней стороны S_1).

Заметим, что поверхность S_1 однозначно проектируется на плоскость *XOУ*, поэтому воспользуемся формулой (6):

$$\Pi_1 = \iint_{S_1} \frac{(\vec{a}, \vec{n}_1^{\,0})}{|\cos\gamma|} dxdy.$$

$$(\vec{a}, \vec{n}_1^{\,0}) = \frac{4x^2 - 2y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \frac{3x^2 - 3y^2 + 9}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \quad |\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Следовательно, $\Pi_1 = \iint\limits_{D_1} (3x^2 - 3y^2 + 9) dxdy$,

где D_1 – проекция S_1 на плоскость *XOУ* – круг $x^2 + y^2 \le 9$. Очевидно, последний интеграл удобнее вычислить в полярных координатах: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

$$\Pi_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 [3\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 9]\rho d\rho = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (\rho^3 \cos 2\varphi + 3\rho) d\rho =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4}\cos 2\varphi + \frac{3}{2}\rho^2\right)\Bigg|_0^3 d\varphi = 3\int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{4}\cos 2\varphi + \frac{27}{2}\right) d\varphi = \frac{81}{2}\left(\frac{3}{4}\sin 2\varphi + \varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 81\pi.$$

На поверхности S_2 $\vec{n}_2^0 = -\vec{k}$ и $z = 0$, поэтому $(\vec{a}, \vec{n}_2^{\,0}) = -z = 0$ и $\Pi_2 = 0$.

Таким образом, суммарный поток равен 81π.

4. Дивергенция. Формула Остроградского-Гаусса

Пусть $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ - непрерывно дифференцируемое векторное поле.

Определение. *Дивергенцией* векторного поля $\vec{a}$ называется скалярное поле $div\vec{a}$, определяемое формулой

$$div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Теорема 2. *Пусть* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *- непрерывно дифференцируемые функции в некоторой пространственной замкнутой области D, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью* S. *Тогда справедлива формула*

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz, \tag{6}$$

или, в векторной форме,

$$\iint_S (\vec{a}, \vec{n}^0)ds = \iiint_D div\vec{a}dv, \tag{6.1}$$

где $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, $\vec{n}^0$ *- внешняя нормаль к поверхности* S.

Формулу (6) – (6.1) называют *формулой* ***Остроградского-Гаусса***. Эта формула **часто существенно упрощает нахождение потока через замкнутую поверхность.**

Пример 9. Найти поток поля $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ через замкнутую поверхность S: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 4 \quad (z \geq 0) \end{cases}$ (нормаль внешняя).

Решение. Можно применить метод, использованный при решении примера 8. Но значительно проще воспользоваться формулой Остроградского-Гаусса. Заметим, что левая часть формулы (6) – (6.1) представляет собой поток поля $\vec{a}$ через поверхность S изнутри.

Следовательно, $\Pi = \iiint_D div\vec{a}dv = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$. В данном случае $div\vec{a} = 1 + 2 + 1 = 4$ и $\Pi = \iiint_D div\vec{a}dv = 4 \cdot V_D$, где V_D - объем пространственной области *D*. Так как *D* представляет собой круговой конус с радиусом основания $R = 4$ и высотой $h = 4$, то

$V_D = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{64}{3}\pi$ и поток $\prod = \frac{256}{3}\pi$.

Заметим, что в примере 8 также применима формула Остроградского-Гаусса, но она не дает столь ощутимых преимуществ, как в предыдущем примере.

Так, в примере 8 $div\vec{a} = 2 - 1 + 1 = 2$. $\prod = \iiint\limits_D div\vec{a}dv = 2\iiint\limits_D dxdvdz = 2V_D$. Но в данном случае область D ограничена параболоидом вращения $z = 9 - x^2 - y^2$ и плоскостью $z = 0$, а формулу объема для такого тела мы не знаем. Поэтому приходится вычислять тройной интеграл:

$$\iiint\limits_D dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \cdot \int\limits_0^{9-x^2-y^2} dz = \iint\limits_{D_{xy}} (9 - x^2 - y^2) = \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 (9 - \rho^2)\rho d\rho = \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot (9\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4})\Big|_0^3 = \frac{81}{2}\pi.$$

Тогда $\prod = 2V_D = 81\pi$.

Формулу Остроградского-Гаусса иногда целесообразно применять и для нахождения потока через незамкнутую поверхность.

Пример 10. Найти поток поля $\vec{a} = (2z + 1)\vec{i} + y\vec{j}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенную в 4-ом октанте (нормаль – внешняя к сфере).

Решение. Рассмотрим *замкнутую* поверхность S, ограничивающую часть *шара* $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, лежащую в 4-ом октанте. Она состоит из четырех частей S_1, S_2, S_3, S_4, где S_1 - указанная в задаче часть сферы, S_2, S_3, S_4 - четверти кругов, расположенные соответственно в плоскостях *XOZ, XOY,* *YOZ* (рис. 4).

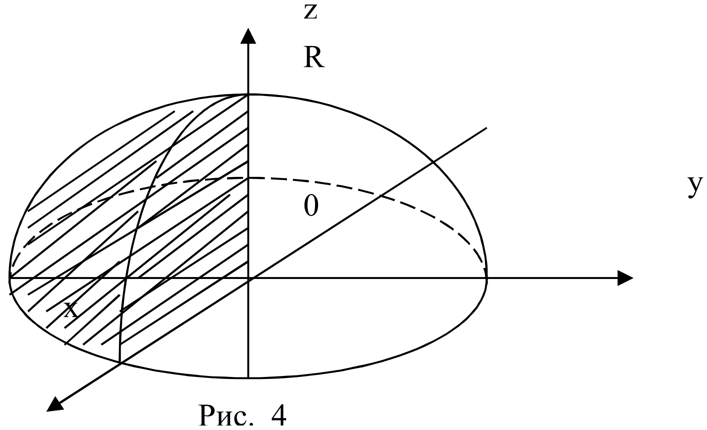


Рис. 4

Поток $\prod$ через поверхность S будет равен сумме потоков $\prod_1$, $\prod_2$, $\prod_3$, $\prod_4$ через соответствующие части: $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4$. Отсюда

$$\Pi_1 = \Pi - \Pi_2 - \Pi_3 - \Pi_4 \qquad (7)$$

Поток Π через замкнутую поверхность S найдем по формуле Остроградского-Гаусса:

$$div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1,\ \Pi = \iiint\limits_D dxdydz = \frac{1}{8} \cdot V_{шара} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi R^3}{6}.$$

На поверхности S_2 нормаль $\vec{n}_2^0$ равна $\vec{j}$, поэтому $(\vec{a}, \vec{n}_2{}^0) = y = 0$ (на S_2 $y = 0$) и Π_2 =0.

На поверхности S_3 нормаль $\vec{n}_3^0$ равна $(-\vec{k})$, поэтому $(\vec{a}, \vec{n}_3{}^0) = 0$ (у вектора $\vec{a}$ $R(x, y, z) = 0$) и Π_3=0.

Найдем поток Π_4. Нормаль к S_4 равна $(-\vec{i})$, поэтому $(\vec{a}, \vec{n}_4{}^0) = -(2z + 1)$;

$$\Pi_4 = \iint\limits_{S_4} (\vec{a}, \vec{n}_4^0) ds = -\iint\limits_{S_4} (2z + 1) dydz.$$

Здесь поверхность S_4 совпадает со своей проекцией на плоскость *YOZ* и $ds = dy \cdot dz$.

Так как S_4 - четверть круга радиуса *R*, то перейдем к полярным координатам:

$$\Pi_4 = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R (2\rho \sin\varphi + 1)\rho d\rho = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{2}{3}\rho^3 \sin\varphi + \frac{\rho^2}{2}\right)\Big|_0^R =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3}R^3 \sin\varphi + \frac{R^2}{2}\right) d\varphi = \left(\frac{2}{3}R^3 \cos\varphi - \frac{1}{2}R^2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi R^2}{4} - \frac{2R^3}{3}.$$

Окончательно по (7) получаем: $\Pi_1 = \frac{\pi R^3}{6} + \frac{\pi R^2}{4} + \frac{2R^3}{3}$.

5. Линейный интеграл и циркуляция

Определение. *Линейным интегралом* векторного поля $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ *вдоль кривой AB* называется криволинейный интеграл второго рода:

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \qquad (8)$$

Если ввести обозначение $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ ($d\vec{r}$ - дифференциал радиус-вектора точек кривой *AB*), то интеграл (8) можно записать в виде $\int\limits_{AB}(\vec{a},d\vec{r})$, где $(\vec{a},d\vec{r})$ - скалярное произведение. Если кривая *AB* задана параметрически: $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ или в векторной форме: $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ ($\vec{r}(t)$ - параметрическое задание радиус-вектора точек кривой *AB*), то линейный интеграл примет вид:

$$\int\limits_{AB}(\vec{a},d\vec{r})=\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\vec{a},\frac{d\vec{r}}{dt})dt, \qquad (9)$$

где α и β - значения параметра, соответствующие начальной и конечной точкам кривой *AB*.

В случае, когда $\vec{a}$ - силовое поле, линейный интеграл выражает работу, совершаемую полем $\vec{a}$ при перемещении материальной точки по кривой *AB*.

Пример 11. Найти работу W силы $\vec{a}=x\vec{i}+x\vec{j}-\vec{k}$ вдоль одного витка *AB* винтовой линии: $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ $(0\le t\le 2\pi)$.

Решение. Кривая *AB* задана параметрически: $\vec{r}(t)=a\cos t\vec{i}+a\sin t\vec{j}+bt\vec{k}$. Воспользуемся формулой (9).

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}=-a\sin t\vec{i}+a\cos t\vec{j}+b\vec{k};$$

$$\vec{a}=x\vec{i}+x\vec{j}-\vec{k}=a\cos t\vec{i}+a\cos t\vec{j}-\vec{k};$$

$$(\vec{a},\frac{d\vec{r}}{dt})=-a^2\sin t\cos t+a^2\cos^2 t-b,\ \alpha=0,\ \beta=2\pi;$$

$$W=\int\limits_0^{2\pi}(-a^2\sin t\cos t+a^2\cos^2 t-b)dt=(-a^2\frac{\sin^2 t}{2}+\frac{1}{2}a^2t+\frac{a^2}{4}\sin 2t-bt)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\pi(a^2-2b).$$

Определение. *Циркуляцией* поля $\vec{a}$ по *замкнутой* ориентированной кривой (контуру) L называется линейный интеграл поля $\vec{a}$ вдоль L.

Пример 12. Вычислить циркуляцию поля $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}$ вдоль контура L: $x=\cos t, y=\sin t$, $z=1-\cos t-\sin t$ в направлении возрастания параметра.

Решение. Контур L задан параметрически, но не указаны пределы изменения параметра *t*. Найдем их. Если точка $M(x,y)$ пробегает контур L, то точка $M'(x,y)$ - проекция точки M на плоскость *XOУ* – пробегает единичную окружность: $x=\cos t, y=\sin t$. Таким образом, можно считать, что параметр t меняется от 0 до 2π (циркуляция ищется в направлении возрастания параметра!). Заметим, что при $t=0$ и $t=2\pi$ соответствующие точки на контуре L совпадают, т.е. контур L обходится полностью (L есть линия пересечения кругового цилиндра $x^2+y^2=1$ с плоскостью $z=1-x-y$).

Воспользуемся формулой (9):

$$\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}=\sin t\vec{i}-\cos t\vec{j},$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+(1-\cos t-\sin t)\vec{k},$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=-\sin\vec{i}+\cos t\vec{j}+(\sin t-\cos t)\vec{k};$$

$$(\vec{a},\frac{d\vec{r}}{dt})=-\sin^2 t-\cos^2 t=-1;$$

$$Ц=\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\vec{a},\frac{d\vec{r}}{dt})dt=\int\limits_{0}^{2\pi}(-1)dt=-t\Big|_0^{2\pi}=-2\pi.$$

Пример 13. Найти модуль циркуляции поля $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}+(x+y)\vec{k}$ вдоль контура $L:\begin{cases}z=x^2+(y+1)^2\\ 4y-z+4=0\end{cases}$.

Решение: В данном примере контур L задан как линия пересечения параболоида $z=x^2+(y+1)^2$ и плоскости $4y-z+4=0$.

Зададим контур L параметрически (такое задание неоднозначно, но выберем одно из простейших).

Найдем проекцию контура L на плоскость XOY, для чего исключим переменную z из системы, задающей L:

$$\begin{cases}z=x^2+(y+1)^2\\ 4y-z+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=x^2+(y+1)^2\\ z=4y+4\end{cases}\Rightarrow x^2+(y+1)^2=4y+4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1=4\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=4.$$

Очевидно, что проекция представляет собой окружность радиуса 2 с центром в точке (0;1), поэтому естественно взять $x=2\cos t$, $y-1=2\sin t$, $0\le t\le 2\pi$. Тогда $z=4y+4=4(1+2\sin t)+4$, т.е. $x=2\cos t$, $y=1+2\sin t$, $z=8+8\sin t$.

Применим формулу (9):

$$\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + (x+y)\vec{k} = (1+2sint)\vec{i} \text{ - } 2cost\vec{j} + (2cost + 2sint + 1)\vec{k}\ ,$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k} = 2\cos t\vec{i} + (1+2\sin t)\vec{j} + (8+8\sin t)\vec{k}\ ,$$

$$\frac{dr}{dt} = -2\sin t\vec{i} + 2\cos t\vec{j} + 8\cos t\vec{k}\ ,$$

$$(\vec{a}, \frac{d\vec{r}}{dt}) = -2\sin t - 4\sin^2 t - 4\cos^2 t + 16\cos^2 t + 16\sin t\cos t + 8\cos t =$$

$$= -2\sin t + 8\cos t + 16\cos^2 t + 16\sin t\cos t - 4\ ;$$

$$Ц = \int_0^{2\pi} [-2\sin t + 8\cos t + 16\cos^2 t + 16\sin t\cos t - 4]dt =$$

$$= (2\cos t + 8\sin t + 8t + 4\sin 2t + 8\sin^2 t - 4t)\Big|_0^{2\pi} = 8\pi\ .$$

6. Ротор. Формула Стокса

Определение. *Ротором* (вихрем) векторного поля $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ называется векторное поле $rot\vec{a}$, определяемое равенством:

$$rot\vec{a} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}\ .$$

Для нахождения ротора поля $\vec{a}$ удобно использовать формальный определитель:

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

причем под произведениями вида $\frac{\partial}{\partial x}\cdot Q, \ldots,$ понимаются частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}, \ldots$.

Например, $rot\vec{a}$, где $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$, равен:

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = (\frac{\partial}{\partial y}xz - \frac{\partial}{\partial z}yz)\vec{i} - (\frac{\partial}{\partial x}xz - \frac{\partial}{\partial z}xy)\vec{j} + (\frac{\partial}{\partial x}yz - \frac{\partial}{\partial y}xy)\vec{k} =$$

$$= -y\vec{i} - z\vec{j} - x\vec{k}\ .$$

Теорема 3. *Пусть функции* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *непрерывно дифференцируемы в некоторой пространственной области и* S *- некоторая кусочно-гладкая поверхность в этой области, ограниченная кусочно-гладким контуром* L. *Тогда имеет место равенство:*

$$\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S[(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta++(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma]ds, \tag{10}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *- направляющие косинусы нормали* $\vec{n}^0$ *к поверхности* S, *причем направление нормали выбирается так, чтобы из ее конца обход контура наблюдался против часовой стрелки.*

Если $\vec{a}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$, а $\vec{r}$ - радиус-вектор точек контура L, то формулу (10) можно записать в векторной форме:

$$\int\limits_L(\vec{a},d\vec{r})=\iint\limits_S(rot\vec{a},\vec{n}^0)ds. \tag{10.1}$$

Формулу (10) – (10.1) называют *формулой Стокса.*

Формулу Стокса можно использовать для вычисления циркуляции:

$$Ц=\iint\limits_S(rot\vec{a},\vec{n}^0)ds.$$

Пример 13. (См. условие выше). Найдем циркуляцию с использованием формулы (10.1). В качестве поверхности S, ограниченной контуром L, возьмем часть плоскости $4y-z+4=0$. Нормаль $\vec{n}$ к этой поверхности имеет проекции (0, 4, -1), а единичная нормаль $\vec{n}^0$ имеет вид

$$\vec{n}^0=\frac{4}{\sqrt{17}}\vec{j}-\frac{1}{\sqrt{17}}\vec{k}.$$

$$rot\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & -x & x+y\end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k},$$

$$(rot\vec{a},\vec{n}^0)=-\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{2}{\sqrt{17}}=-\frac{2}{\sqrt{17}}.$$

$$Ц = \iint_S (rot\vec{a}, \vec{n}^0) ds = \iint_{D_{xy}} (rot\vec{a}, \vec{n}^0) \frac{dxdy}{|\cos\gamma|},\ |\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{17}},$$ D_{xy} - проекция S на плоскость ХОУ – круг радиуса 2.

Следовательно,

$$Ц = \iint_{D_{xy}} (-\frac{2}{\sqrt{17}}) \frac{dxdy}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = -2 \iint_{D_{xy}} dxdy = -2 \cdot S_{круга} = -8\pi;\ |Ц| = 8\pi.$$

Пример 14. Найти модуль циркуляции вектора $\vec{a} = z^2\vec{i}$ по границе L части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, расположенной в 1-ом октанте.

Решение. В качестве поверхности S, ограниченной контуром L, возьмем соответствующую часть сферы (часть плоскости брать нельзя, так как контур L не лежит в одной плоскости). Единичную нормаль $\vec{n}^0$ к S найдем по формуле (2), $V = x^2 + y^2 + z^2 - 16$:

$$grad\,V = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k},$$

$$|\ grad\,V\ | = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{16} = 8 \text{ на } S;$$

$\vec{n}^0 = \frac{1}{4}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ (здесь направление нормали не существенно, так как ищется модуль циркуляции).

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2z\vec{j},\ (rot\vec{a}, \vec{n}^0) = \frac{yz}{2},\ Ц = \iint_S \frac{yz}{2} ds.$$

Последний интеграл сведем к двойному, спроектировав, например, поверхность S на плоскость ХОУ; проекция D_{xy} - четверть круга $x^2 + y^2 \le 16$.

Так как $\vec{n}^0 = \frac{x}{4}\vec{i} + \frac{y}{4}\vec{j} + \frac{z}{4}\vec{k}$, то $|\cos\gamma| = \frac{z}{4}$ $(z > 0\ на\ S)$ и

$$Ц = \iint_S (rot\vec{a}, \vec{n}^0) ds = \iint_{D_{xy}} \frac{yz}{2 \cdot \frac{z}{4}} dxdy = 2\iint_D ydxdy.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$Ц=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^4 2\rho\sin\varphi\cdot\rho d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\cdot\int_0^4\rho^2 d\rho=-2\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^4=\frac{128}{3}.$$

__Пример 15__. Вычислить модуль циркуляции поля $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$ вдоль контура $L=\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ x^2+y^2=5\ (z>0)\end{cases}$.

__Решение:__

Контур L получен пересечением сферы $x^2+y^2+z^2=9$ с цилиндром $x^2+y^2=5$ и представляет собой окружность, лежащую в плоскости $z=2$. Поэтому в качестве поверхности S естественно взять круг. Тогда нормалью $\vec{n}^0$ к S будет орта $\vec{k}$. На S $z=2$ и $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}=2y\vec{i}+2x\vec{j}+xy\vec{k}$,

$$rot\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2y & 2x & xy\end{vmatrix}=x\vec{i}-y\vec{j},$$

$$(rot\vec{a},\vec{n}^0)=(x\vec{i}-y\vec{j},\vec{k})=0.$$

Следовательно, циркуляция равна нулю: $Ц=0$.

Тема 12. Теория функций комплексного переменного. Практические занятия 37-47.

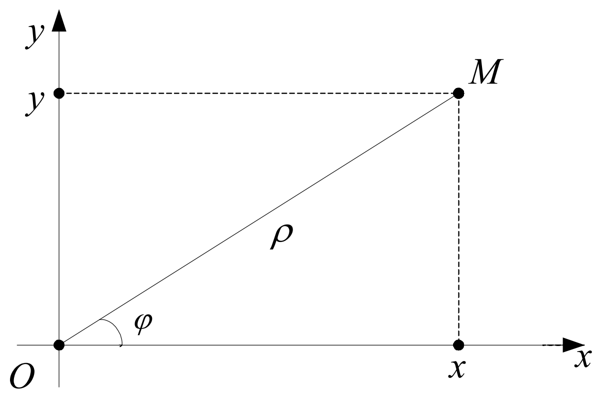
Комплексные числа и действия над ними.

Комплексным числом z называется выражение $z=a+iy$, где x, y-действительные числа, i - мнимая единица $(i^2=-1)$. При этом число x называется *действительной* частью, а y - *мнимой* частью числа *z* и обозначаются: $x=Rez,\quad y=\operatorname{Im}z$.

Комплексное число $\bar{z}=x-iy$ называется *сопряженным* числу $z=x+iy$.

Действия над комплексными числами $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ определяются следующими формулами:

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2),$$
$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$
$(z_2\neq 0)$.



Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости точкой *M* с координатами (x, y) или вектором $\overrightarrow{OM}$. Длина ρ этого вектора называется <u>модулем</u> комплексного числа *z*, обозначается $|z|$ и вычисляется $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Угол φ между положительным направлением оси Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$ называется <u>аргументом</u> комплексного числа *z* и обозначается $Argz$; он определен с точностью до слагаемого, кратного 2π. Значение аргумента φ, удовлетворяющего условию $-\pi < \varphi \le \pi$ (или $0 \le \varphi < 2\pi$), называется <u>главным</u> и обозначается $\arg z$. Таким образом,

$$Argz = \arg z + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Комплексное число Z можно записать с помощью модуля и аргумента:

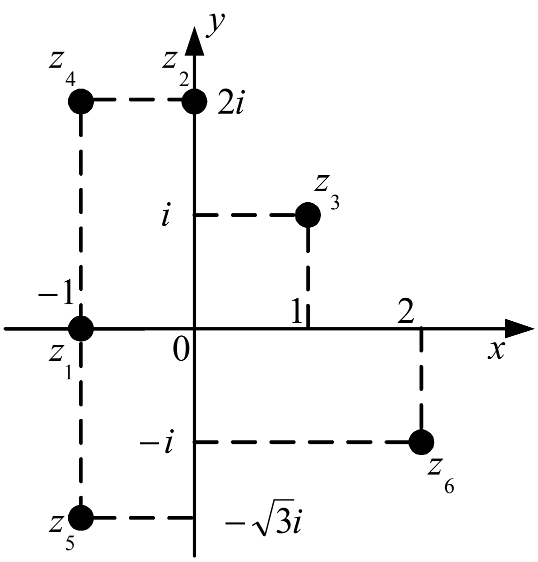
$z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ - тригонометрическая форма, $z = |z|e^{i\varphi}$ - показательная форма. Запись $z = x + iy$ называется алгебраической формой комплексного числа *z*.

Задача 1.1. Заданы комплексные числа: а) $z_1 = -1$, б) $z_2 = 2i$, в) $z_3 = 1 + i$, г) $z_4 = -1 + 2i$, д) $z_5 = -1 - i\sqrt{3}$, е) $z_6 = 2 - i$. Представить z_1, z_2, z_3 в тригонометрической форме, а z_4, z_5, z_6 - в показательной форме и изобразить точками на комплексной плоскости.

Решение.

а) для $z_1 = -1$ имеем $\rho = |z_1| = 1$, $\varphi = \pi$, тогда $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$

б) для $z_2 = 2i$ имеем $\rho = |z_2| = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тогда $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$



в) для $z_3 = 1 + i$ имеем $\rho = |z_3| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $tg\varphi = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, тогда $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

г) для $z_4 = -1 + 2i$ имеем $\rho = |z_4| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $tg\varphi = -2$, $\varphi = \pi - arctg2$, тогда $-1 + 2i = \sqrt{5}e^{i(\pi - arctg2)}$

д) для $z_5 = -1 - i\sqrt{3}$ имеем $\rho = |z_5| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$, $tg\varphi = -\sqrt{3}$, $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$ или $\left(\varphi = \frac{4\pi}{3}\right)$, тогда

$$-1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

е) для $z_6 = 2 - i$ имеем $\rho = |z_6| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$, $tg\varphi = -\frac{1}{2}$, $\varphi = arctg\left(-\frac{1}{2}\right)$, тогда

$$2 - i = \sqrt{5}e^{i\,arctg\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

Над комплексными числами z, z_1, z_2 заданными в тригонометрической форме

$$z = |z|(\cos\varphi) + i \cdot \sin\varphi,$$

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1),$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2),$$

действия можно выполнять по правилам:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $n \in N$ - формула Муавра.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

(под $\sqrt[n]{|z|}$ понимается арифметический корень)

Из последней формулы видно, что $\sqrt[n]{z}$ при $z \neq 0$ имеет ровно *n* различных значений.

Задача 1.2. Найти все значения корня: а) $\sqrt[3]{-64}$, б) $\sqrt[4]{1-i}$.

Решение.

а) для $z = -64$, $|z| = 64$, $\arg z = \pi$, так что в тригонометрической форме это число имеет вид $z = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$. Согласно формуле для $\sqrt[n]{z}$ имеем:

$$\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right),\quad k = 0, 1, 2$$ то есть:

$$\sqrt[3]{-64} = \begin{cases} 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2 + i2\sqrt{3}, & при \quad k = 0 \\ 4\left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3}\right) = -4, & при \quad k = 1 \\ 4\left(\cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3}\right) = 2 - i2\sqrt{3}, & при \quad k = 2 \end{cases}$$

Ответ: $\{2 + i2\sqrt{3},\quad -4,\quad 2 - i2\sqrt{3}\}$

б) для $z = 1 - i$, $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = -\dfrac{\pi}{4}$. В тригонометрической форме

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\sqrt[4]{1-i} = \begin{cases} \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{16}\right)\right), & \textit{при} \quad k = 0 \\ \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\dfrac{-\frac{\pi}{4}+2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\frac{\pi}{4}+2\pi}{4}\right)\right), & \textit{при} \quad k = 1 \\ \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\dfrac{-\frac{\pi}{4}+4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\frac{\pi}{4}+4\pi}{4}\right)\right), & \textit{при} \quad k = 2 \\ \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\dfrac{-\frac{\pi}{4}+6\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\frac{\pi}{4}+6\pi}{4}\right)\right), & \textit{при} \quad k = 3 \end{cases}$$

Ответ:

$$\sqrt[4]{1-i} = \begin{cases} \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{16} - i\sin\dfrac{\pi}{16}\right), \\ \sqrt[8]{2}\left(\sin\dfrac{\pi}{16} + i\cos\dfrac{\pi}{16}\right), \\ \sqrt[8]{2}\left(-\cos\dfrac{\pi}{16} + i\sin\dfrac{\pi}{16}\right), \\ -\sqrt[8]{2}\left(\sin\dfrac{\pi}{16} + i\cos\dfrac{\pi}{16}\right). \end{cases}$$

Задача 1.3. Вычислить степень и представить результат в алгебраической форме:

а) $\left(-\dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^{10}$ б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{9}$

Решение.

а) запишем $z = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$ в тригонометрической форме: $|z| = \frac{1}{2}$, $\arg z = -\frac{2\pi}{3}$.

$-\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ По формуле Муавра:

$$\left(-\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\cdot 10\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\cdot 10\right)\right) = \frac{1}{2^{10}}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^{-10}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{-11}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

б) пусть $z_1 = \sqrt{3} + i$ и $z_2 = 1 - i$. Тогда $|z_1| = 2$, $|z_2| = \sqrt{2}$, $\varphi_1 = \arg z_1 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \arg z_2 = -\frac{\pi}{4}$. По правилу деления $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) =$

$= \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$. По формуле Муавра:

$$z^9 = \left(\sqrt{2}\right)^9\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\cdot 9\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\cdot 9\right)\right) = 16\sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right) =$$

$$= 16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 16(1 - i)$$

Задача 1.4. Найти множества точек z на плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $\begin{cases} |z - 1 + i| \le 2 \\ |z| > 1 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2\operatorname{Re}(z + 1) + \operatorname{Im}\bar{z} < 3 \\ -\frac{\pi}{4} < \arg(z - i) \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$

При решении задач такого типа можно от комплексной переменной z перейти к двум действительным переменным x и y. Тогда исходные условия для z сведутся к соответствующим условиям для действительных переменных x и y. Так неравенство $\operatorname{Im} z > 0$, учитывая $z = x + iy$, преобразуется к неравенству $y > 0$.

$$2\operatorname{Re}(z + 1) + \operatorname{Im}\bar{z} < 3 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(x + iy + 1) + \operatorname{Im}(x - iy) < 3 \Leftrightarrow 2(x + 1) - y < 3$$

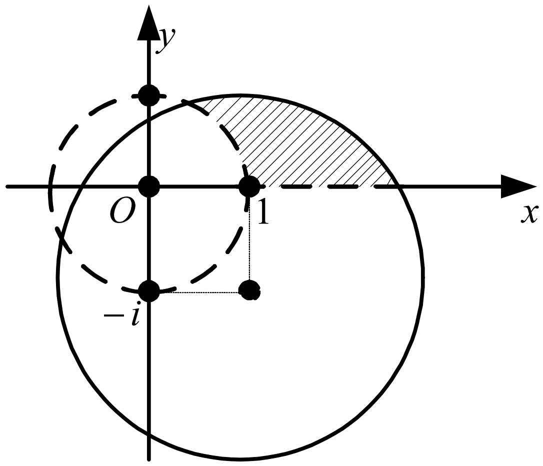
Однако в ряде случаев нецелесообразно переходить к x и y, а лучше использовать геометрический смысл уравнений или неравенств с комплексной переменной.

Так, уравнение $|z - z_0| = r$ задает окружность с центром в точке z_0 и радиусом r, а неравенства $|z - z_0| < r$ и $|z - z_0| > r$ соответственно внутреннюю и внешнюю открытые области круга ограниченные данной окружностью.

Неравенство $r_1 \le |z - z_0| \le r_2$ задаёт кольцо ограниченное окружностями радиусов r_1 и r_2 с центром в точке z_0, причем границы кольца, окружности $|z - z_0| = r_1$ и $|z - z_0| = r_2$, принадлежат этой кольцевой области.

Уравнение $\arg(z - z_0) = \alpha$ задаёт луч, исходящий из точки z_0 под углом α к оси Ox.

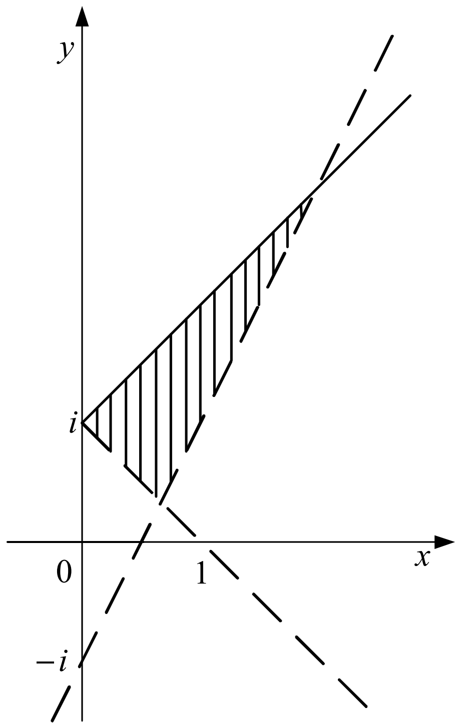
Решение.



а) в соответствии с вышеизложенным, неравенство $|z-1+i|\le 2$ определяет круг с центром $z_0=1-i$ и радиусом 2. Неравенство $|z|>1$ внешность круга с центром $z_0=0$ радиуса 1. Неравенство $\operatorname{Im} z>0 \Leftrightarrow y>0$ определяет верхнюю полуплоскость плоскости xOy

Изображаем все три указанные области и находим их пересечение. Это и будет искомое множество. Пунктир означает, что граница не принадлежит множеству.

б) $2\operatorname{Re}(z+1)+\operatorname{Im}\bar{z}<3$ $\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(x+iy+1)+\operatorname{Im}(x-iy)<3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $2(x+1)-y<3$ $\Leftrightarrow y>2x-1$.



Уравнение $y=2x-1$ определяет прямую, разбивающую плоскость на две полуплоскости. Очевидно, та из них, которая содержит начало координат, задаётся неравенством $y>2x-1$. Уравнение $\arg(z-i)=\alpha$ определяет луч с началом в точке $z_0=i$, наклоненный к оси Ox под углом α. Неравенство $-\frac{\pi}{4}<\arg(z\text{-}i)\le\frac{\pi}{4}$ задаёт все те лучи с началом в точке $z_0=i$, для которых α удовлетворяет неравенству $-\frac{\pi}{4}<\alpha\le\frac{\pi}{4}$, то есть задаёт угловой сектор с вершиной $z_0=i$ и сторонами, образующими с Ox углы $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$ (при этом первая сторона не принадлежит сектору, а вторая принадлежит). Пересечение соответствующих областей образует искомое множество.

2. Функции комплексного переменного.

Если D - некоторое множество точек комплексной плоскости и каждому числу $z=x+iy$ из D поставлено в соответствие единственное комплексное число $\omega=u+iv$, то говорят, что на множестве D определена однозначная функция комплексного переменного (ФКП), и пишут $\omega=f(z)=u+iv=u(x;\,y)+i\,v(x;\,y)$, где $u(x;\,y)=\operatorname{Re}f(z)$ - действительная часть функции $f(z)$, $v(x;\,y)=\operatorname{Im}f(z)$ - мнимая её часть.

(Если каждому числу $z=x+iy$ из D поставлено в соответствие неединственное комплексное число $\omega=u+iv$, то говорят, что на множестве D задана многозначная функция комплексного переменного).

Основные элементарные ФКП определяются следующими формулами:

$$z^n=(x+iy)^n,\quad n\in N$$

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

$$chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}; \quad chz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2};$$

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}; \quad thz = \frac{shz}{chz}; \quad cthz = \frac{chz}{shz};$$

$Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in Z$, это многозначная функция, главное значение логарифмической функции берётся при $k = 0$ и обозначается $\ln z = \ln|z| + i \arg z$

Задача 2.1. Доказать, что функция e^{Z} имеет период $2\pi i$.
Решение.

$$e^{Z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+(y+2\pi)i} = e^{x}\left(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)\right) = = e^{x}\left(\cos y + i \sin y\right) = e^{Z}$$

Замечание. ФКП $\cos z$ и $\sin z$ могут принимать значения, которые по модулю превосходят единицу.

Задача 2.2. Найти $|\cos 2i|$
Решение.

$\cos 2i = \dfrac{e^{i2i} + e^{-i2i}}{2} = \dfrac{e^{-2} + e^{2}}{2}$. Поэтому $|\cos 2i| \approx 3{,}7$

Задача 2.3. Вычислить $Ln(-1)$ и $\ln(-1)$.
Решение.
Так как $|-1| = 1$, а $\arg(-1) = \pi$, получаем $Ln(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = (2k+1)\pi i,$ где $k \in Z$. $\ln(-1) = \pi i$

Задача 2.4. Найти действительную и мнимую части функции $\sin z$.
Решение.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos(-x) + i\sin(-x))\right) =$$

$\cos x \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2} i + \sin x \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2} = \sin x chy + i \cos x shy$, отсюда $\operatorname{Re} \sin z = u(x; y) = \sin x chy$, $\operatorname{Im} \sin z = v(x; y) = \cos x shy$

Если $f(z)$ - однозначная ФКП в области D, то производной $f'(z)$ функции $f(z)$ в точке $z \in D$ называется $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$. Функция, имеющая производную в точке z, называется дифференцируемой в этой точке.

Т. (Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.) Для того чтобы функция $f(z) = u(x; y) + i v(x; y)$ в точке $z = x + iy$ была дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x;\, y)$ и $v(x;\, y)$ были дифференцируемы в точке $(x;\, y)$ и удовлетворяли в этой точке условиям Коши-Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

При выполнении условий Коши-Римана справедлива формула: $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (2.1)

Функция $f(z)$ называется аналитической в точке z, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.

Функция $f(z)$ называется аналитической в области D, если она аналитична в каждой точке этой области.

Задача 2.4. Выяснить, в каких точках дифференцируема функция $\omega = z\operatorname{Re} z$.

Решение.
Имеем $\omega = z\operatorname{Re} z = (x+iy)x = x^2 + iyx$, $u(x;\, y) = x^2$ и $v(x;\, y) = xy$. Функции $u(x;\, y)$ и $v(x;\, y)$ дифференцируемы для любых x, y. Далее $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = x$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = y$ - условия Коши-Римана выполняются только при $x = 0$ и $y = 0$. Поэтому функция $\omega = z\operatorname{Re} z$ дифференцируема только в точке $z = 0$.

Замечание. Функция $\omega = z\operatorname{Re} z$ не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости. (Почему?)

Задача 2.5. Доказать, что функция $\omega = \cos z$ аналитична во всей комплексной плоскости, и найти её производную.

Решение.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{-y}\left(\cos x + i\sin x\right) + e^{y}\left(\cos(-x) + i\sin(-x)\right)\right) =$$

$$\cos x\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + i\sin x\frac{e^{-y} - e^{y}}{2} = \cos x ch y - i\sin x sh y,$$ отсюда $u(x;\, y) = \cos x ch y$, $v(x;\, y) = -\sin x sh y$.

Находим $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\sin x ch y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos x sh y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\cos x sh y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\sin x ch y$. Замечаем, что функции $u(x;\, y)$ и $v(x;\, y)$ дифференцируемы и условия Коши-Римана выполняются в любой точке $(x;\, y)$. Поэтому функция $\omega = \cos z$ аналитична во всей комплексной плоскости. Получаем, согласно формулы (2.1) и результатам задачи (2.4) $(\cos z)' = -\sin x ch y - i\cos x sh y = -\sin z$.

Функция $u(x;\, y)$, имеющая непрерывные частные производные второго порядка на области D и удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, называется гармонической на D.

Т.(необходимое условие аналитичности). Для аналитичности $f(z)=u(x;\,y)+i\,v(x;\,y)$ необходимо, чтобы $u(x;\,y)$ и $v(x;\,y)$ были гармоническими функциями, то есть $\Delta u=0$ и $\Delta v=0$.

Замечание. Однако функция $f(z)=u(x;\,y)+i\,v(x;\,y)$, где $u(x;\,y)$ и $v(x;\,y)$ произвольные гармонические функции на D, не всегда является аналитической. Она будет аналитической, только если функции $u(x;\,y)$ и $v(x;\,y)$ удовлетворяют на D условиям Коши-Римана.

Задача 2.6. Проверить, что функция $v(x,y)$ является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x,y)=2xy+x$ и значению $f(0)=0$.

Решение.

Проверим может ли функция $v(x,y)=2xy+x$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, для этого проверим удовлетворяет ли она уравнению Лапласа $\Delta u=0$.

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y+1$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ - таким образом $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\equiv 0$. Функция $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и может служить мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$, а это будет так если она ещё будет удовлетворять условиям Коши-Римана $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Подберём функцию $u(x;\,y)$ так, чтобы условия Коши-Римана выполнялись.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow u(x;\,y)=\int\dfrac{\partial v}{\partial y}dx+C(y)=\int 2xdx+C(y)=x^2+C(y)$, здесь константа интегрирования зависит от y как функция. Это связано с тем, что $u(x;\,y)$ зависит от двух переменных, а интегрирование ведётся только по одной переменной x и переменная y считается константой. (Легко убедиться что если мы конечный результат $u(x;\,y)=x^2+C(y)$ продифференцируем по x: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+C'_x(y)=2x+0$ и подставим в первое условие Коши-Римана $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, то оно будет выполнено $2x\equiv 2x$) Итак, используя первое условие Коши-Римана, мы нашли неизвестную действительную часть $u(x;\,y)=x^2+C(y)$ с точностью до произвольной функции $C(y)$, зависящей от одной переменной y.

Чтобы найти эту неизвестную функцию $C(y)$, воспользуемся вторым условием Коши-Римана $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Имеем $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0+C'(y)=-(2y+1)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ то есть $C'(y)=-(2y+1)$ откуда $C(y)=-\int(2y+1)dy=-y^2-y-C$, где C - произвольная константа интегрирования. Подставляем найденную функцию $C(y)=-y^2-y-C$ в искомую функцию $u(x;\,y)=x^2+C(y)$, получаем $u(x;\,y)=x^2-y^2-y-C$.

Итак, искомая аналитическая функция $f(z)=u(x;\,y)+i\,v(x;\,y)$ найдена. $f(z)=x^2-y^2-y-C+i(2xy+x)=x^2+2xyi-y^2+xi-y-C=$
$=(x+iy)^2+i(x+iy)-C=z^2+iz-C$. Но она найдена с точностью до произвольной константы. Определим неизвестную константу C из условия $f(0)=0$. Имеем $f(0)=0^2+i0-C=0$, откуда $C=0$.

Ответ: $f(z)=z^2+iz$

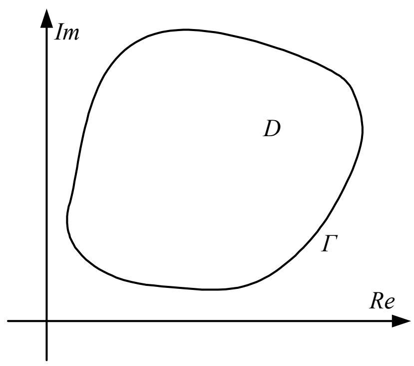
3. Интеграл в комплексной области. Интегральная формула Коши.

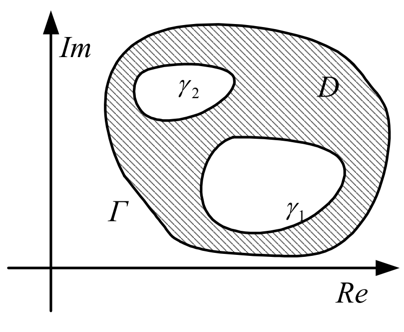
Пусть в области *D* заданы непрерывная функция $w=f(z)=u(x;\,y)+i\,v(x;\,y)$ и гладкая кривая L с началом в точке *A* и концом в точке *B* заданная уравнением $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $(\alpha\le t\le\beta)$ или, что всё равно двумя уравнениями $x=x(t)$ и $y=y(t)$, $(\alpha\le t\le\beta)$. Как обычно направление на L соответствует изменению параметра t от α до β, то есть $z(\alpha)=A$ и $z(\beta)=B$. Интеграл от функции $f(z)$ по кривой L определяется как:

$$\int_L f(z)dz=\int_L (u+iv)(dx+idy)=\int_L (udx-vdy)+i\int_L (vdx+udy)=$$
$$=\int_\alpha^\beta [u(x(t);\,y(t))x'(t)-v(x(t);\,y(t))y'(t)]dt+$$
$$+i\int_\alpha^\beta [v(x(t);\,y(t))x'(t)+u(x(t);\,y(t))y'(t)]dt \qquad (3.1)$$

Из (3.1) видно, что интеграл по комплексному переменному - есть сумма двух криволинейных интегралов и его вычисление сводится к вычислению обыкновенных интегралов.

Если кривая L кусочно-гладкая и состоит из гладких ориентированных кусков $L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_n$, то по определению считаем $\int_L f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k} f(z)dz$





Теорема Коши для односвязной области. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области *D*, ограниченной замкнутым кусочно-гладким контуром *Г*, и непрерывна в $\overline{D}=D\cup\Gamma$, то $\int_\Gamma f(z)dz=0$.

Теорема Коши для многосвязной области. Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области *D*, ограниченной замкнутыми кусочно-гладкими контурами $\Gamma,\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n$ и непрерывна в $\overline{D}=D\cup\Gamma\cup\gamma_1\cup\gamma_2\cup\ldots\cup\gamma_n$, то

$$\oint_\Gamma f(z)dz=\oint_{\gamma_1} f(z)dz+\oint_{\gamma_2} f(z)dz+\ldots+\oint_{\gamma_n} f(z)dz$$

(все контуры пробегаются в положительном направлении).

Интегральная формула Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области *D*, ограниченной замкнутым кусочно-гладким контуром

Г, и непрерывна в $\overline{D} = D \cup \Gamma$, то для любой внутренней точки z_0 области *D* имеет место формула Коши:
$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$,

а также справедливо обобщающее эту формулу следствие: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, где $n = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots$

Задача 3.1. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой.
$\int\limits_{L} z|z|dz$, $L: \{|z| = 1, \quad \operatorname{Im} z \geq 0\}$

Решение.

Кривая L представляет собой полуокружность, с центром в начале координат, радиусом 1, расположенная в верхней полуплоскости.

$$\int\limits_{L} z|z|dz = \int\limits_{L} (x+iy)\sqrt{x^2+y^2}(dx+idy) = \int\limits_{L} \left(x\sqrt{x^2+y^2} + iy\sqrt{x^2+y^2}\right)(dx+idy) =$$

$$= \int\limits_{L} \left(x\sqrt{x^2+y^2}dx + iy\sqrt{x^2+y^2}dx + ix\sqrt{x^2+y^2}dy - y\sqrt{x^2+y^2}dy\right) =$$

$$= \int\limits_{L} \left(x\sqrt{x^2+y^2}dx - y\sqrt{x^2+y^2}dy\right) + i\int\limits_{L} \left(y\sqrt{x^2+y^2}dx + x\sqrt{x^2+y^2}dy\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} x = \cos t & x'_t = -\sin t & \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = 1 \\ y = \sin t & y'_t = \cos t & 0 \leq t \leq \pi \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\pi} (\cos t(-\sin t) - \sin t \cos t)dt +$$

$$i\int\limits_0^{\pi} (\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t)dt = \int\limits_0^{\pi} (-2\sin t \cos t)dt + i\int\limits_0^{\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t)dt = 2\int\limits_0^{\pi} \cos t \, d\cos t +$$

$$i\int\limits_0^{\pi} \cos 2t \, dt = \cos^2 t\Big|_0^{\pi} + i\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi} = (-1)^2 - 1^2 + i(0-0) = 0$$

Задача 3.2. Вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{z - 2i} dz$

Решение.

Подынтегральная функция $f(z) = \frac{z^2}{z - 2i}$ аналитична внутри контура $|z| = 1$ и на нём (единственная точка $z = 2i$ в которой функция не определена находится вне контура интегрирования). По теореме Коши данный интеграл равен нулю.

Задача 3.3. Вычислить интеграл: $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z \, dz}{z^2 + 4z + 3}$

Решение.

Подынтегральная функция теряет аналитичность в точках $z_1 = -1$, $z_2 = -3$ (знаменатель обращается в нуль). Внутри контура находится одна из этих точек z_1. Перепишем интеграл в виде

$$I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z\,dz}{z^2+4z+3}=\oint\limits_{|z|=2}\frac{\frac{e^z}{z+3}}{z+1}dz.$$

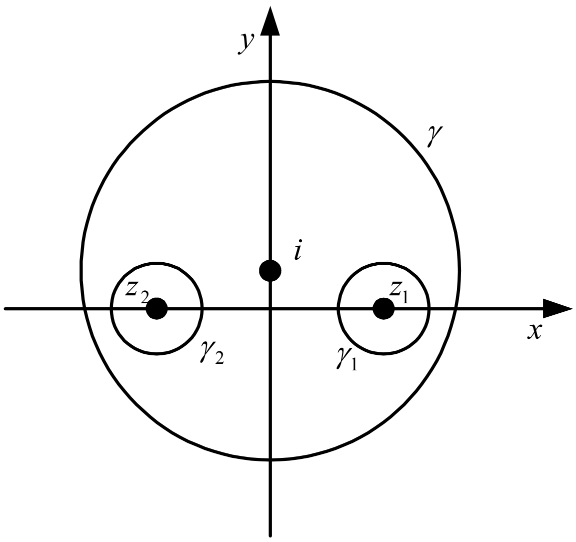
Функция $f(z)=\dfrac{e^z}{z+3}$ аналитична в круге $|z|\le 2$. Применяем интегральную формулу Коши при $z_0=-1$

$$I=2\pi i f(-1)=2\pi i\frac{e^{-1}}{-1+3}=\frac{\pi i}{e}$$

Задача 3.4. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-i|=5}\dfrac{sh z\,dz}{z^2-9}$.

Решение.

Подынтегральная функция теряет аналитичность в точках $z_1=3$, $z_2=-3$ расположенных внутри контура $\gamma:\ |z-i|=5$. Непосредственно формулу Коши применять нельзя. Поэтому сначала построим окружности γ_1 и γ_2 с центрами в точках z_1 и z_2 соответственно, их радиусы выберем достаточно малыми, чтобы окружности не пересекались и лежали внутри γ. В трехсвязной области, ограниченной контурами γ, γ_1 и γ_2, и на ее границе подынтегральная функция аналитична, поэтому по теореме Коши для многосвязной области получаем:



$$I=\oint\limits_{\gamma}\frac{sh z\,dz}{z^2-9}=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{sh z\,dz}{z^2-9}+\oint\limits_{\gamma_2}\frac{sh z\,dz}{z^2-9}=I_1+I_2$$

Далее применяем интегральную формулу Коши

$$I_1=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{sh z}{z+3}}{z-3}dz=2\pi i\left.\frac{sh z}{z+3}\right|_{z=3}=\frac{\pi i}{3}sh3,$$

$$I_2=\oint\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{sh z}{z-3}}{z+3}dz=2\pi i\left.\frac{sh z}{z-3}\right|_{z=-3}=\frac{\pi i}{3}sh3$$

Окончательно получаем $I=2\pi i\dfrac{sh3}{3}$.

4. Степенной ряд в комплексной области. Ряд Тейлора.

Степенной ряд в комплексной области – это ряд вида:

$$c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

Для каждого степенного ряда существует такое число R (радиус сходимости), что ряд абсолютно сходится в круге $|z-z_0|<R$ (круг сходимости) и расходится вне этого круга. Случай $R=0$ соответствует ряду, сходящемуся лишь в точке z_0, случай $R=\infty$ - сходящемуся во всей комплексной плоскости. Для нахождения круга сходимости могут быть применены признаки Даламбера и Коши.

Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-z_0|<R$, представима в этом круге своим рядом Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\quad c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ \gamma=\{z|\quad |z-z_0|=r,\quad r<R\}.$$

Ряды Маклорена (частный случай ряда Тейлора при $z_0=0$) для элементарных функций имеют вид:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad z\in C$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad z\in C$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad z\in C$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\qquad |z|<1$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n},\qquad |z|<1$$

Задача 4.1. Найти область сходимости рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\,z^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n^n}$

Решение.

а) применим признак Даламбера: общий член ряда имеет вид $w_n=(-1)^{n+1}n\,z^n$, так что

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|z|^{n+1}}{n|z|^n}=|z|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=|z|,$$

Значит, исследуемый ряд сходится абсолютно при $|z|<1$ и расходится при $|z|>1$, то есть $R=1$. На границе круга сходимости, $|z|=1$, имеем $|w_n|=n$, следовательно при $n\to\infty$, $|w_n|\to\infty$, не стремится к нулю. Значит, и w_n не стремится к нулю, то есть не выполняется необходимый признак сходимости, и ряд расходится. Итак, область сходимости данного ряда – внутренность круга сходимости.

б) Применим признак Коши $w_n=\frac{(z+i)^n}{n^n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|w_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|z+i|^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z+i|}{n}=0,\ 0<1,\quad \forall z$$

Значит, данный ряд сходится во всей комплексной плоскости.

Задача 4.2. Используя разложения элементарных ФКП, разложить функции в ряд по степеням $z-z_0$ и определить области сходимости полученных рядов:

а) $\frac{z}{4+z^2},\quad z_0=0$ б) $\ln(1+z-2z^2),\quad z_0=0$

в) $\dfrac{1}{1-z}, \quad z_0 = 3i$ г) $\sin(2z+1), \quad z_0 = -1$

Решение.

а) преобразуем данную функцию следующим образом

$$\frac{z}{4+z^2} = \frac{z}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z^2}{4}\right)} = \frac{z}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{4^{2n+1}}$$

Это разложение справедливо для $\left|-\dfrac{z^2}{4}\right| < 1$, то есть для $|z| < 2$

б) имеем $1+z-2z^2 = (1-z)(1+2z)$ поэтому

$$\ln(1+z-2z^2) = \ln(1-z)+\ln(1+2z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-z)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2z)^n}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n-1}{n}z^n$$

Это разложение справедливо, когда $|-z| < 1$ и $|2z| < 1$, то есть когда $|z| < \dfrac{1}{2}$

в) преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-3i-(z-3i)} = \frac{1}{1-3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-3i}{1-3i}} = \frac{1}{1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-3i}{1-3i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3i)^n}{(1-3i)^{n+1}}$$

Это справедливо для $\left|\dfrac{z-3i}{1-3i}\right| < 1$, то есть для $\dfrac{|z-3i|}{\sqrt{10}} < 1$, для круга $|z-3i| < \sqrt{10}$.

г) имеем

$$\sin(2z+1) = \sin(2(z+1)-1) = \sin(2(z+1))\cos 1 - \cos(2(z+1))\sin 1 =$$

$$\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+1} - \sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}(z+1)^{2n}, \quad z\in C$$

5. Ряд Лорана. Классификация особых точек.

Рядом Лорана называется ряд вида $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$. Этот ряд понимается как сумма двух рядов:

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ - правильная часть ряда Лорана,

$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ - главная часть ряда Лорана,

и сходящийся тогда и только тогда, когда сходятся обе его части.

Если функция $f(z)$ аналитическая в кольце $0 \le r < |z - z_0| < R \le \infty$, то она представляется в этом кольце рядом Лорана:

$\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$, где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

$\gamma = \{ z \mid \; |z - z_0| = \rho, \quad r < \rho < R \}$

Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_r(z_0) = \{ z \mid \; 0 < |z - z_0| < r \}$ точки z_0, в которой $f(z)$ аналитична, а в самой точке z_0 аналитичность нарушена.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется:

- устранимой, если главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в $\overset{\circ}{U}_r(z_0)$ отсутствует;
- полюсом порядка k, если главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в $\overset{\circ}{U}_r(z_0)$ содержит конечное число (а именно k) членов (в случае $k = 1$ полюс называется простым);
- существенно особой, если главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в $\overset{\circ}{U}_r(z_0)$ содержит бесконечное число членов.

При определении характера изолированной особой точки используются следующие теоремы.

1. Для того чтобы точка z_0 являлась устранимой особой точкой аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно существование конечного предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

2. Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно существование предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

2'. Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}$, где $\varphi(z)$ - функция аналитическая в точке z_0, причём $\varphi(z_0) \ne 0$.

2". Пусть z_0 - изолированная особая точка функции $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, где $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ - функции аналитические в точке z_0. Если числитель $\lambda(z)$ и все производные до $k - 1$ порядка включительно в точке z_0 равны нулю, а $\lambda^{(k)}(z_0) \ne 0$, знаменатель $\mu(z)$ и все производные до $l - 1$ порядка включительно в точке z_0 равны нулю, а $\mu^{(l)}(z_0) \ne 0$, то при $l > k$ точка z_0 является полюсом порядка $n = l - k$ аналитической функции $f(z)$. Если $l \le k$, то точка z_0 является устранимой особой точкой аналитической функции $f(z)$.

3. Пусть при $z \to z_0$ аналитическая функция $f(z)$ не имеет пределов ни конечного, ни бесконечного. Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $f(z)$.

Задача 5.1. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$ функции:

а) $f(z) = \dfrac{z-1}{z+3}$, $z_0 = 1 - i$; б) $f(z) = z\cos\dfrac{1}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$.

Решение.

а) функция $f(z) = \dfrac{z-1}{z+3}$ не аналитична лишь в одной точке $z_1 = -3$. Рассмотрим окружность γ с центром в точке $z_0 = 1 - i$ и проходящую через точку $z_1 = -3$: $|z - z_0| = |z_1 - z_0| \Leftrightarrow |z - 1 + i| = |-3 - 1 + i| \Leftrightarrow |z - 1 + i| = \sqrt{17}$. Эта окружность разбивает всю плоскость на две области: круг K_1: $|z - 1 + i| < \sqrt{17}$ и кольцо K_2: $|z - 1 + i| > \sqrt{17}$, в каждой из которых функция $f(z)$ аналитична. Следовательно в круге K_1 функция $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора, а в кольце K_2 в ряд Лорана, причём оба разложения по степеням разности $(z - z_0)$, то есть по степеням $(z - 1 + i)$

Преобразуем функцию $f(z)$, выделяя нужную разность, так, чтобы можно было воспользоваться известным разложением $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$.

$$f(z) = \frac{z-1}{z+3} = 1 - \frac{4}{z+3} = 1 - \frac{4}{(z-1+i)+1-i+3} = 1 + \frac{4}{(i-4)-(z-1+i)} = (*)$$

Для разложения в K_1 вынесем в знаменателе дроби $(*)$ число $i-4$, получим: $f(z) = 1 + \dfrac{4}{i-4} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{z-1+i}{i-4}}$. Если теперь ввести обозначение $q = \dfrac{z-1+i}{i-4}$, то дробь $\dfrac{1}{1 - \dfrac{z-1+i}{i-4}}$ можно разложить по формуле $\dfrac{1}{1-q} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, то есть $\dfrac{1}{1 - \dfrac{z-1+i}{i-4}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z-i+1}{i-4}\right)^n$. $f(z) = 1 + \dfrac{4}{i-4} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(i-4)^n}(z-i+1)^n$ - ряд Тейлора. Это разложение имеет место при $|q| < 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-1+i}{i-4}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1+i| < |i-4| \Leftrightarrow |z-1+i| < \sqrt{17}$, то есть в круге K_1.

Для разложения в K_2 вынесем в знаменателе дроби $(*)$ выражение $-(z-1+i)$ за скобки, получим:

$$f(z) = 1 - \frac{4}{z-1+i} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{i-4}{z-1+i}}$$

Если ввести обозначение $q=\dfrac{i-4}{z-1+i}$, то снова по формуле $\dfrac{1}{1-q}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ получим: $\dfrac{1}{1-q}=\dfrac{1}{1-\dfrac{i-4}{z-1+i}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{i-4}{z-i+1}\right)^n$, а $f(z)=1-\dfrac{4}{z-1+i}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{i-4}{z-i+1}\right)^n=$ $=1-4\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}(i-4)^n\dfrac{1}{(z-1+i)^{n+1}}$ - это ряд Лорана. Разложение имеет место при $|q|<1\Leftrightarrow\left|\dfrac{i-4}{z-1+i}\right|<1\Leftrightarrow$ $|z-1+i|>|i-4|\Leftrightarrow\ |z-1+i|>\sqrt{17}$, то есть в области K_2.

б) функцию $f(z)=z\cos\dfrac{1}{(z-1)^2}$ нужно разложить по степеням $(z-z_0)$, то есть $(z-1)$. В точке $z_0=1$ и только в ней функция $f(z)$ не аналитична, но она аналитична в кольце $0<|z-1|<\infty$, следовательно в этом кольце она разлагается в ряд Лорана.

В выражении для $f(z)$ выделим разность $(z-1)$:

$$f(z)=z\cos\frac{1}{(z-1)^2}=((z-1)+1)\cos\frac{1}{(z-1)^2}=(z-1)\cos\frac{1}{(z-1)^2}+\cos\frac{1}{(z-1)^2}\qquad(*)$$

Введём обозначение $t=\dfrac{1}{(z-1)^2}$, и воспользуемся известным разложением $\cos t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$. Значит

$$\cos\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{4n}}$$

Подставим последнее разложение в $(*)$:

$$f(z)=(z-1)\cos\frac{1}{(z-1)^2}+\cos\frac{1}{(z-1)^2}=(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{4n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{4n}}=$$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{4n-1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{4n}}$ - это и есть искомое разложение в ряд Лорана. Оно имеет место на всей комплексной плоскости, кроме точки $z=1$.

Задача 5.2. Определить типы изолированных особых точек для функции:

а) $f(z)=\dfrac{(e^z-1)^2}{z^4(z-1)^3}$; б) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z(1-\cos z)}$; в) $f(z)=z^2\cos\dfrac{z-1}{z}$

Решение.

а) Функции $\lambda(z)=(e^z-1)^2$ и $\mu(z)=z^4(z-1)^3$ аналитичны на всей комплексной плоскости, следовательно, их частное аналитично всюду, где $\mu(z)\neq 0$, то есть особые точки функции $f(z)=\dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$ - это нули функции $\mu(z)$. Очевидно, функция $\mu(z)=z^4(z-1)^3$ имеет нули: $z_0=0$ кратности 4 и $z_1=1$ кратности 3.

Рассмотрим изолированную особую точку $z_0 = 0$ функции $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, где $\lambda(z) = \left(e^z - 1\right)^2$, а $\mu(z) = z^4(z-1)^3 = z^7 - 3z^6 + 3z^5 - z^4$, и применим теорему 2" для определения её типа. $\lambda(z_0) = 0$, $\lambda'(z) = 2\left(e^z - 1\right)e^z = 2e^{2z} - 2e^z$, $\lambda'(z_0) = 0$, $\lambda''(z) = 4e^{2z} - 2e^z$, $\lambda''(z_0) = 2 \neq 0$, следовательно $k = 2$. $\mu(z_0) = 0$, $\mu'(z) = 7z^6 - 18z^5 + 15z^4 - 4z^3$, $\mu'(z_0) = 0$, $\mu''(z)$ $= 42z^5 - 90z^4 + 60z^3 - 12z^2$, $\mu''(z_0) = 0$, $\mu'''(z) = 210z^4 - 360z^3 + 180z^2 - 24z$, $\mu'''(z_0) = 0$, $\mu''''(z) = 840z^3 - 1080z^2 + 360z - 24$, $\mu''''(z_0) = -24 \neq 0$, следовательно $l = 4$. Тогда $z_0 = 0$ полюс порядка $l - k = 4 - 2 = 2$. Изолированная особая точка $z_0 = 0$ является полюсом второго порядка.

Рассмотрим изолированную особую точку $z_1 = 1$ для функции $f(z) = \dfrac{\left(e^z - 1\right)^2}{z^4(z-1)^3} = \dfrac{\varphi(z)}{(z-1)^3}$, где $\varphi(z) = \dfrac{\left(e^z - 1\right)^2}{z^4}$ функция аналитическая в точке $z_1 = 1$, причём $\varphi(z_1) \neq 0$. Применяя теорему 2′ для определения типа изолированной особой точки, заключаем что $z_1 = 1$ полюс третьего порядка.

б) Функции $\lambda(z) = \sin^2 z$ и $\mu(z) = z(1 - \cos z)$ аналитичны на всей комплексной плоскости, следовательно, их частное аналитично всюду, где $\mu(z) \neq 0$, то есть особые точки функции $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$ - это нули функции $\mu(z)$.

$z(1 - \cos z) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ \cos z = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z = 2\pi k, \quad k \in Z \end{array}\right.$. Таким образом изолированными особыми точками функции $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z(1 - \cos z)}$ являются $z_0 = 0$ и $z_k = 2\pi k, \quad k \neq 0$.

Для точки $z_0 = 0$ применим теорему 2": $\lambda(z_0) = 0$, $\lambda'(z) = 2\sin z \cos z = \sin 2z$, $\lambda'(z_0) = 0$, $\lambda''(z) = 2\cos 2z$, $\lambda''(z_0) = 2 \neq 0$, следовательно $k = 2$, $\mu(z_0) = 0$, $\mu'(z) = 1 - \cos z - z\sin z$, $\mu'(z_0) = 0$, $\mu''(z) = \sin z - (\sin z + z\cos z) = -z\cos z$, $\mu''(z_0) = 0$, $\mu'''(z) = -\cos z + z\sin z$, $\mu'''(z_0) = -1 \neq 0$, следовательно $l = 3$. Тогда $z_0 = 0$ полюс порядка $l - k = 3 - 2 = 1$. Изолированная особая точка $z_0 = 0$ является полюсом первого порядка.

Для точек $z_k = 2\pi k$ применим теорему 2": $\lambda(z_k) = 0$, $\lambda'(z) = 2\sin z \cos z = \sin 2z$, $\lambda'(z_k) = 0$, $\lambda''(z) = 2\cos 2z$, $\lambda''(z_0) = 2 \neq 0$, следовательно $k = 2$, $\mu(z_k) = 0$, $\mu'(z) = 1 - \cos z - z\sin z$, $\mu'(z_k) = 0$, $\mu''(z) = \sin z - (\sin z + z\cos z) = -z\cos z$, $\mu''(z_k) = -2\pi k \neq 0$, следовательно $l = 2$. Так как $l = k$, изолированные особые точки $z_k = 2\pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ являются устранимыми особыми точками.

в) Функция $f(z)=z^2\cos\frac{z-1}{z}$ имеет одну изолированную особую точку $z_0=0$. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности этой точки, то есть по степеням z.

$$f(z)=z^2\cos\frac{z-1}{z}=z^2\cos\left(1-\frac{1}{z}\right)=z^2\left(\cos 1\cos\frac{1}{z}+\sin 1\sin\frac{1}{n}\right)=$$

$$=z^2\left(\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n}}+\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}}\right)=$$

$$=\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n-2}}+\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n-1}}$$

Так как ряд Лорана содержит бесконечно много отрицательных степеней, то точка $z_0=0$ существенно особая точка для $f(z)$.

6. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, обозначаемое символом $res_{z_0} f(z)$ или $Выч_{z_0} f(z)$ и определяемое равенством $res_{z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz$. Здесь γ - произвольный контур, на котором функция $f(z)$ аналитическая, а в области, ограниченной этим контуром, нет других особых точек функции $f(z)$, кроме z_0.

Способы вычисления вычетов.

1. Для любого типа особой точки z_0 вычет равен коэффициенту при минус первой степени в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$, то есть $res_{z_0} f(z)=c_{-1}$

2. Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

3. Вычет в полюсе порядка k находится по формуле $res_{z_0} f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}\left[f(z)(z-z_0)^k\right]}{dz^{k-1}}$

В частности в простом полюсе (первого порядка) формула принимает вид $res_{z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$

Если $f(z)$ может быть представлена в виде $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$, $\varphi(z_0)\neq 0$, то $res_{z_0} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

Основная теорема Коши о вычетах: если функция $f(z)$ аналитична на границе L области D и всюду внутри этой области, за исключением конечного числа особых точек z_1, z_2, . . . , z_n то $\oint_L f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f(z)$

Задача 6.1 Вычислить интеграл, используя основную теорему Коши о вычетах: а) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{shz}{z^4+2z^3+z^2}dz$

б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}dz$

Решение.

а) функция $f(z)=\frac{shz}{z^4+2z^3+z^2}=\frac{shz}{z^2(z+1)^2}$ имеет две изолированные особые точки $z_0=0$ и $z_1=-1$. Причем обе лежат внутри контура интегрирования.

Для точки $z_1=-1$ представим подынтегральную функцию $f(z)$ в виде: $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z+1)^2}$, где $\varphi(z)=\frac{shz}{z^2}$ аналитическая в точке $z_1=-1$, причём $\varphi(z_1)\neq 0$. Применяя теорему 2´ для определения типа изолированной особой точки, заключаем что $z_1=-1$ полюс второго порядка. Используем третий способ вычисления вычета в полюсе порядка $k=2$:

$$res_{z_1} f(z)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to z_1}\frac{d\left[f(z)(z-z_1)^2\right]}{dz}=\lim_{z\to -1}\left(\frac{shz}{z^2(z+1)^2}\cdot(z+1)^2\right)'=\lim_{z\to -1}\left(\frac{shz}{z^2}\right)'=$$

$$\lim_{z\to -1}\left(\frac{z^2chz-2zshz}{z^4}\right)=\lim_{z\to -1}\frac{zchz-2shz}{z^3}=ch1-2sh1$$

Для точки $z_0=0$ функции $f(z)=\frac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, где $\lambda(z)=shz$, а $\mu(z)=z^4+2z^3+z^2$ применим теорему 2" для определения её типа. $\lambda(z_0)=0$, $\lambda'(z)=chz$, $\lambda'(z_0)=ch0=1\neq 0$, следовательно $k=1$. $\mu(z_0)=0$, $\mu'(z)=4z^3+6z^2+2z$, $\mu'(z_0)=0$, $\mu''(z)=12z^2+12z+2$, следовательно $l=2$. Тогда $z_0=0$ полюс порядка $l-k=2-1=1$. Изолированная особая точка $z_0=0$ является полюсом первого порядка или простым полюсом. Используем третий способ вычисления вычета в простом полюсе: $res_{z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{shz}{z^4+2z^3+z^2}\cdot z\right)=\lim_{z\to 0}\frac{shz}{z^3+2z^2+z}=\left[\frac{0}{0}\right]$=(по правилу Лопиталя)= $\lim_{z\to 0}\frac{(shz)'}{(z^3+2z^2+z)'}=\lim_{z\to 0}\frac{chz}{3z^2+6z+1}=1$

По теореме Коши о вычетах имеем:

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{shz}{z^4+2z^3+z^2}dz=2\pi i\left(res_{z_0} f(z)+res_{z_1} f(z)\right)=2\pi i\left(1+ch1-2sh1\right)$$

б) подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{z^2e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}$ внутри контура интегрирования $|z|=1$ имеет единственную изолированную особую точку $z_0=0$. По теореме Коши о вычетах $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}dz=2\pi i\cdot res_{z_0}f(z)$

Применим первый способ вычисления вычета $res_{z_0}f(z)=c_{-1}$, для чего разложим функцию $f(z)=\dfrac{z^2e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$, используя известное разложение $e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\ldots+\dfrac{z^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$. Имеем:

$$f(z)=\frac{z^2\left(1+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{z^2}\right)^2}{2!}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{z^2}\right)^3}{3!}+\ldots+\dfrac{\left(\dfrac{1}{z^2}\right)^n}{n!}+\ldots\right)-1}{z}=$$

$$=\frac{z^2+\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{3!z^4}+\ldots+\dfrac{1}{n!z^{2n-2}}+\ldots}{z}=z+\frac{1}{2}z^{-3}+\frac{1}{6}z^{-5}+\frac{1}{4!}z^{-7}+\ldots$$, замечаем что в полученном разложении отсутствует член с z^{-1}, то есть коэффициент при минус первой степени $c_{-1}=0$. Таким образом

$res_{z_0}f(z)=c_{-1}=0$ и значит $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}dz=2\pi i\cdot 0=0$

7. Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение.

Оригиналом называется функция $f(t)$ действительного переменного t, удовлетворяющая условиям:

1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном промежутке,
2) $f(t)=0$, при $t<0$,
3) $\exists M>0$ и $\exists S_0\geq 0$, что $\forall t$, $|f(t)|<M\,e^{S_0t}$

Изображением функции $f(t)$ (по Лапласу) называется функция $F(p)$ комплексного переменного p, определяемая равенством $F(p)=\int\limits_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt$ и обозначаемое символом $f(t)\fallingdotseq F(p)$.

Простейшей функцией-оригиналом является единичная функция Хевисайда:

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & при\quad t\geq 0,\\ 0, & при\quad t<0.\end{cases}$$

В дальнейшем для сокращения записи будем, как правило, писать $f(t)$ вместо $f(t)\cdot\eta(t)$, считая, что $f(t)=0$ при $t<0$.

Приведём основные теоремы операционного исчисления. Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, ..., $f_k(t) \risingdotseq F_k(p)$.

Свойство линейности. Для любых чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$ выполняется $c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t) \risingdotseq c_1F_1(p)+c_2F_2(p)$ или для случая *k* слагаемых $\sum\limits_{n=1}^{k} c_n f_n(t) \risingdotseq \sum\limits_{n=1}^{k} c_n F_n(p)$

Теорема подобия. $\forall a>0$, $f(at) \risingdotseq \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$

Теорема смещения. Умножению оригинала на $e^{\alpha t}$ соответствует запаздывание изображения на α, то есть $e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p-\alpha)$, где α - некоторая комплексная константа.

Теорема запаздывания. Запаздыванию оригинала на $\tau>0$ соответствует умножение изображения на e^{-pt}, то есть $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-pt}F(p)$

Теорема о дифференцировании оригинала. Если $f(t)$ и её производные $f^{(k)}(t)$ $\left(k=1,2,\ldots,n\right)$ являются оригиналами, то для любого $k=1,2,\ldots,n$ выполняется: $f^{(k)}(t) \risingdotseq p^k F(p)-p^{k-1}f(0)-p^{k-2}f'(0)-\ldots-pf^{(k-2)}(0)-f^{(k-1)}(0)$

В частности при $k=1$: $f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0)$

Дифференцирование изображения. $F'(p) \fallingdotseq -t\cdot f(t)$, в общем случае $F^{(k)}(p) \fallingdotseq (-t)^k\cdot f(t)$

При нахождении изображений обычно пользуются свойствами преобразования Лапласа и таблицей основных изображений:

1) $\eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$

2) $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$

3) $e^{at} \risingdotseq \dfrac{1}{p-a}$

4) $\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

5) $\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

6) $sh\,\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$

7) $ch\,\omega t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-\omega^2}$

Задача 7.1. Найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t)=2+\cos 3t\cdot sh2t$, б) $f(t)=t\cos^2 t+3t\eta(t-2)$

Решение.

а) по свойству линейности изображение для $f(t)$ равно сумме изображений для функций $f_1(t)=2$ и $f_2(t)=\cos 3t\cdot sh2t$. Найдём эти изображения.

Так как $f_1(t)=2=2\cdot\eta(t)$, а $\eta(t)\risingdotseq\dfrac{1}{p}$, то $2\risingdotseq\dfrac{2}{p}$.

$$f_2(t)=\cos 3t\cdot sh2t=\cos 3t\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}=\frac{1}{2}\cos 3t\cdot e^{2t}-\frac{1}{2}\cos 3t\cdot e^{-2t}$$

Так как $\cos 3t\risingdotseq\dfrac{p}{p^2+9}$ (табличное изображение), то пользуясь свойствами линейности и смещения, получаем:

$$\frac{1}{2}\cos 3t\cdot e^{2t}-\frac{1}{2}\cos 3t\cdot e^{-2t}\risingdotseq\frac{1}{2}\frac{p-2}{(p-2)^2+9}-\frac{1}{2}\frac{p+2}{(p+2)^2+9}.$$

Окончательно имеем:

$$f(t)=2+\cos 3t\cdot sh2t\risingdotseq\frac{2}{p}+\frac{1}{2}\frac{p-2}{(p-2)^2+9}-\frac{1}{2}\frac{p+2}{(p+2)^2+9}$$

б) находим изображения слагаемых. Для $f_1(t)=t\cos^2 t$ можно найти изображение по теореме смещения, выразив косинус через экспоненту. Но проще воспользоваться дифференцированием изображения:

$$F'(p)\risingdotseq-t\cdot f(t)\quad\Leftrightarrow\quad t\cdot f(t)\risingdotseq-F'(p)$$

$$\cos^2 t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\risingdotseq\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}$$

$$t\cos^2 t\risingdotseq-\left(\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}\right)'=\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{2}\frac{p^2-4}{\left(p^2+4\right)^2}$$

При нахождении изображения функции $f_2(t)=3t\cdot\eta(t-2)$ воспользуемся теоремой запаздывания, для чего преобразуем $f_2(t)$ так, чтобы переменная t входила в выражение для $f_2(t)$ всюду с «опозданием» на $\tau=2$:

$$f_2(t)=(3(t-3)+6)\eta(t-2)=3(t-2)\eta(t-2)+6\eta(t-2)$$

Теперь по свойствам линейности и запаздывания, с учётом табличных изображений $t\risingdotseq\dfrac{1}{p^2}$ и $1\risingdotseq\dfrac{1}{p}$ имеем:

$$f_2(t)\risingdotseq\frac{3}{p^2}e^{-2p}+\frac{6}{p}e^{-2p}$$

Итак $f(t)=t\cos^2 t+3t\eta(t-2)\risingdotseq\dfrac{1}{2p^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{p^2-4}{\left(p^2+4\right)^2}+\dfrac{3}{p^2}e^{-2p}+\dfrac{6}{p}e^{-2p}$.

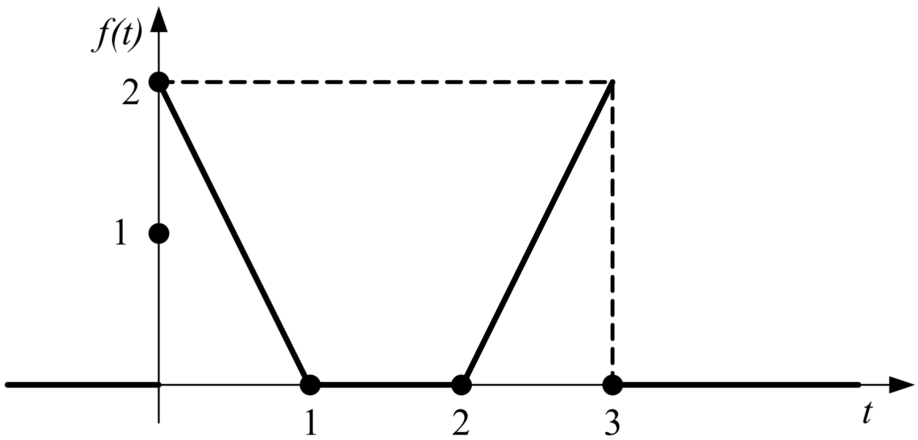
Если функция-оригинал $f(t)$ задана кусочно-аналитически, то её предварительно записывают одним аналитическим выражением «склеивают» с помощью функции Хевисайда $\eta(t)$.

Например, пусть

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \textit{при} \quad t < \tau_1 \\ f_1(t), & \textit{при} \quad \tau_1 \le t < \tau_2 \\ f_2(t), & \textit{при} \quad t \ge \tau_2 \end{cases}$$

Так как разность $\eta(t-\tau_1) - \eta(t-\tau_2)$ равна 1 на $t \in [\tau_1; \tau_2)$ и равна нулю вне этого промежутка при $t \notin [\tau_1; \tau_2)$, а $\eta(t-\tau_2)$ равно нулю при $t < \tau_2$ и равно 1 при $t \ge \tau_2$, то $f(t) = f_1(t)[\eta(t-\tau_1) - \eta(t-\tau_2)] + f_2(t)\eta(t-\tau_2)$

Задача 7.2. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Решение.

Функция-оригинал задана графически. На отрезке $[0; 1]$ график функции $f(t)$ совпадает с прямой $y = -2t + 2$, на отрезке $[2; 3]$ - с прямой $y = 2t - 4$, а в остальных точках - с осью Ot. Таким образом её кусочно-аналитическое представление имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \textit{при} \quad t \in (-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty) \\ -2t + 2, & \textit{при} \quad 0 \le t \le 1 \\ 2t - 4, & \textit{при} \quad 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

Запишем $f(t)$ одним аналитическим выражением:

$$f(t) = (-2t+2)[\eta(t) - \eta(t-1)] + (2t-4)[\eta(t-2) - \eta(t-3)] =$$
$$= -2t + 2 + 2(t-1)\eta(t-1) + 2(t-2)\eta(t-2) - 2(t-2)\eta(t-3)$$

В последнем слагаемом выделим разность $t-3$: $2(t-2)\eta(t-3) =$

$= 2(t-3+1)\eta(t-3) = 2(t-3)\eta(t-3) + 2\eta(t-3)$. Получим:

$$f(t) = -2t + 2 + 2(t-1)\eta(t-1) + 2(t-2)\eta(t-2) - 2(t-3)\eta(t-3) - 2\eta(t-3)$$

Используя теоремы линейности и запаздывания, найдём изображение по Лапласу $f(t) \risingdotseq F(p)$, получим $F(p) = -\dfrac{2}{p^2} + \dfrac{2}{p} + \dfrac{2}{p^2}e^{-p} + \dfrac{2}{p^2}e^{-2p} - \dfrac{2}{p^2}e^{-3p} - \dfrac{2}{p}e^{-3p}$.

В простейших случаях оригинал по известному изображению находится с помощью всё той же таблицы преобразования Лапласа и свойств.

Например:

$$F(p)=\frac{p-3}{p^2+4}=\frac{p}{p^2+4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{p^2+4}\risingdotseq\cos 2t-\frac{3}{2}\sin 2t$$

$$F(p)=\frac{p+1}{p^2-4p+5}=\frac{p+1}{(p-2)^2+1}=\frac{p-2+3}{(p-2)^2+1}=\frac{p-2}{(p-2)^2+1}+\frac{3}{(p-2)^2+1}\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\cos t\cdot e^{2t}+3\sin t\cdot e^{2t}$$

$$F(p)=\frac{2}{t^3}e^{-p}\risingdotseq(t-1)^2\eta(t-1)$$

Пусть $F(p)=\dfrac{P(p)}{Q(p)}$ правильная рациональная дробь. Для нахождения оригинала в общем случае обычно используют либо разложение $F(p)$ на сумму простейших дробей, либо так называемую теорему разложения Хевисайда:

$f(t)\fallingdotseq\sum\limits_{k=1}^{n}res_{p_k}F(p)e^{pt}$, где $p_1,p_2,\dots,p_n$ все полюсы функции $F(p)$.

В частности, если все полюсы простые и дробь $F(p)$ несократима, то $f(t)\fallingdotseq\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{P(p_k)}{Q'(p_k)}e^{p_k t}$

Свёртка функций. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ некоторые функции. Свёрткой функций $f_1(t)*f_2(t)$ называется интеграл:

$$f_1(t)*f_2(t)=\int\limits_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau=\int\limits_0^t f_1(t-\tau)\,f_2(t)\,d\tau$$

Теорема умножения изображений. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ функции-оригиналы и $f_1(t)\fallingdotseq F_1(p)$, $f_2(t)\fallingdotseq F_2(p)$. Тогда свёртке оригиналов соответствует произведение изображений $f_1(t)*f_2(t)$ $\fallingdotseq F_1(p)\cdot F_1(p)$.

Задача 7.3. Найти оригинал $f(t)$, если известно его изображение

а) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)(p+1)^2}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{(p^2-1)^2}$; в) $F(p)=\dfrac{pe^{-3p}}{p^2+4p+6}$.

Решение.

а) Разложим $F(p)$ на простейшие дроби, используя метод неопределённых коэффициентов.

$$F(p)=\frac{p^2}{(p^2+1)(p+1)^2}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{C}{(p+1)^2}+\frac{D}{p+1}=$$

$$=\frac{(Ap+B)(p+1)^2+C(p^2+1)+D(p^2+1)(p+1)}{(p^2+1)(p+1)^2},$$

$$(A+D)p^3+(2A+B+C+D)p^2+(A+2B+D)p+B+C+D\equiv p^2,$$

$$\begin{cases} A+D=0 \\ 2A+B+C+D=1 \\ A+2B+D=0 \\ B+C+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad A=\frac{1}{2},\ B=0,\ C=\frac{1}{2},\quad D=-\frac{1}{2}$$

Применяя теоремы линейности, смещения и таблицу, получим

$$F(p) \fallingdotseq \frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}t\cdot e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-t}=f(t)$$

б) функция $F(p)=\dfrac{1}{\left(p^2-1\right)^2}=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+1)^2}$ имеет два полюса $p_1=1$ и $p_2=-1$ кратности 2.

Воспользуемся теоремой разложения:

$$F(p) \fallingdotseq f(t)=res_{p_1}F(p)e^{pt}+res_{p_2}F(p)e^{pt}=\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[F(p)e^{pt}(p-1)^2\right]+$$

$$=\lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}\left[F(p)e^{pt}(p+1)^2\right]=\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[\frac{e^{pt}}{(p+1)^2}\right]+\lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}\left[\frac{e^{pt\,2}}{(p-1)^2}\right]=$$

$$=\lim_{p\to 1}\frac{te^{pt}(p+1)^2-2(p+1)e^{pt}}{(p+1)^4}+\lim_{p\to -1}\frac{te^{pt}(p-1)^2-2(p-1)e^{pt}}{(p-1)^4}=\frac{e^t(4t-4)}{16}+\frac{e^t(4t+4)}{16}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[t\left(e^t+e^{-t}\right)-\left(e^t-e^{-t}\right)\right]=\frac{1}{2}(tcht-sht)$$

Укажем другой способ отыскания оригинала, основанный на теореме умножения изображений.

$$F(p)=\frac{1}{p^2-1}\cdot\frac{1}{p^2-1} \fallingdotseq sht*sht=\int_0^t sh\tau\, sh(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t\frac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{2}\cdot\frac{e^{t-\tau}-e^{-t+\tau}}{2}d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^t\left(e^t-e^{t-2\tau}-e^{-t+2\tau}+e^{-t}\right)d\tau=\frac{1}{4}\left(e^t\tau+\frac{1}{2}e^{t-2\tau}-\frac{1}{2}e^{-t+2\tau}+e^{-t}\tau\right)\Bigg|_0^t=$$

$$=\frac{1}{4}\left[t\left(e^t+e^{-t}\right)-\left(e^t-e^{-t}\right)\right]=\frac{1}{2}(tcht-sht).$$

в) в данном случае $F(p)$ не является рациональной дробью. Найдём сначала оригинал для дроби $F_1(p)=\dfrac{p}{p^2+4p+6}$, её знаменатель имеет мнимые корни, поэтому разлагать на простейшие дроби или пользоваться теоремой разложения нецелесообразно. Поэтому, выделив полный квадрат в знаменателе, представим дробь в виде разности и воспользуемся таблицей преобразований Лапласа.

$$F_1(p)=\frac{p}{p^2+4p+6}=\frac{p}{(p+2)^2+2}=\frac{p+2}{(p+2)^2+2}-\frac{2}{(p+2)^2+2} \fallingdotseq$$

$\cos\sqrt{2}\,t\cdot e^{-2t}-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,t\cdot e^{-2t}=f_1(t)$. Теперь по теореме запаздывания получаем: $F(p)=F_1(p)e^{-\tau p}$ $\fallingdotseq f_1(t-\tau)$, то есть

$$F(p)=\frac{pe^{-3p}}{p^2+4p+6} \fallingdotseq \left[\cos\sqrt{2}(t-3)-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}(t-3)\right]\cdot e^{-2(t-3)}\cdot\eta(t-3)$$

8. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем операторным методом.

Операционный метод решения дифференциальных уравнений заключается в следующем:

1. Искомая функция $y(t)$, её производные и правая часть уравнения заменяются их изображениями.

2. Полученное уравнение, называется операторным, решается относительно изображения $Y(p)$ искомой функции $y(t)$.

3. От изображения $Y(p)$ переходят к его оригиналу $y(t)$, который и является решением исходного уравнения.

Задача 8.1. Решить задачу Коши операционным методом: $y'' + 2y' + y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$

Решение.

Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$, тогда $y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p)$, $y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) + 1$, $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$.

Подставив в исходное уравнение, получим операторное уравнение:

$$p^2Y(p) + 1 + 2pY(p) + Y(p) = \frac{1}{p^2+1} \;\Leftrightarrow\; \left(p^2 + 2p + 1\right)Y(p) = \frac{1}{p^2+1} - 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; Y(p) = -\frac{p^2}{\left(p^2+1\right)(p+1)^2}.$$

Оригинал для этой функции-изображения $Y(p)$ найден в задаче 7.3(а). (с поправкой на знак минус), а именно: $Y(p) \fallingdotseq -\dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{2}t \cdot e^{-t} + \dfrac{1}{2}e^{-t}$. Таким образом решением задачи Коши является функция $y(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-t} - te^{-t} - \cos t\right)$.

Задача 8.2. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом:

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t \\ y' = 2x - y - 2\cos t \end{cases}, \qquad \begin{matrix} x(0) = 2 \\ y(0) = 3 \end{matrix}$$

Решение.

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$, тогда $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 2$, $y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p) - 3$.

Кроме того: $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$, $\cos t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$.

Составляем операторную систему:

$$\begin{cases} pX(p)-2=4X(p)-3Y(p)+\dfrac{1}{p^2+1} \\ pY(p)-3=2X(p)-Y(p)-2\dfrac{p}{p^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-4)X(p)+3Y(p)=\dfrac{2p^2+3}{p^2+1} \\ -2X(p)+(p+1)Y(p)=\dfrac{3p^2-2p+3}{p^2+1} \end{cases}$$

Решаем эту систему относительно $X(p)$ и $Y(p)$, например методом исключения или по формулам Крамера, получим:

$$\begin{cases} X(p)=\dfrac{2p^3-7p^2+9p-6}{(p^2+1)(p-1)(p-2)} \\ Y(p)=\dfrac{3p^3-10p^2+11p-6}{(p^2+1)(p-1)(p-2)} \end{cases}$$

Для нахождения оригиналов $x(t)$ и $y(t)$ разложим изображения $X(p)$ и $Y(p)$ на простейшие дроби.

$$X(p)=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{C}{p-1}+\frac{D}{p-2}=$$

$$=\frac{(Ap+B)(p-1)(p-2)+C(p^2+1)(p-2)+D(p^2+1)(p-1)}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}=$$

$$=\frac{(A+C+D)p^3+(-3A+B-2C-D)p^2+(2A-3B+C-D)p+2B-2C-D}{(p^2+1)(p-1)(p-2)},$$

$$\begin{cases} A+C+D=2 \\ -3A+B-2C-D=-7 \\ 2A-3B+C-D=9 \\ 2B-2C-D=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \quad A=1,\ B=-2,\ C=1,\ \ D=0$$

Итак: $X(p)=\dfrac{p-2}{p^2+1}+\dfrac{1}{p-1}$

Аналогично находим $Y(p)$: $Y(p)=\dfrac{2p-2}{p^2+1}+\dfrac{1}{p-1}$

Переходим от найденных изображений $X(p)$ и $Y(p)$ к их оригиналам $x(t)$ и $y(t)$:

$$X(p)=\frac{p}{p^2+1}-\frac{2}{p^2+1}+\frac{1}{p-1} \risingdotseq \cos t-2\sin t+e^t$$

$$Y(p)=\frac{2p}{p^2+1}-\frac{2}{p^2+1}+\frac{1}{p-1} \risingdotseq 2\cos t-2\sin t+e^t$$

Искомое решение задачи Коши:

$x(t)=\cos t-2\sin t+e^t$ $\qquad\qquad$ $y(t)=2\cos t-2\sin t+e^t$

3. Технология проведения практических занятий

Для студенческой группы на занятии выдается задание, общая формулировка которого приведена в разделе 2 настоящих методических указаний.

Алгоритм проведения практических занятий по дисциплине предполагается следующий:

- после выдачи задания в первые 30 мин. занятия студенты анализируют исходные данные, записывают математические выражения (при необходимости) и составляют структурную схему системы электропривода или ее составляющей;

- один из студентов группы вызывается «к доске» и демонстрирует группе вариант решения задания со своими числовыми данными;

- организуется интерактивное обсуждение результатов с разграничением функциональных обязанностей студентов при выполнении задания по моделированию – анализ исходных данных, проработка схемы построения модели, выбор технологии моделирования, расчет параметров регуляторов и контуров регулирования, возможная оптимизация. В итоге, совместными усилиями формируется и корректируется функциональная схема системы электропривода или ее составляющей;

- в последние 30 мин. занятия каждый студент предъявляет преподавателю вариант математической модели, соответствующей разработанным структурной и функциональной схемам.

4. Примерные вопросы, выносимые на экзамен по дисциплине, по темам практических занятий

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»
в г. Смоленске

Методические рекомендации к расчетно-графической работе по дисциплине

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

(НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ)

Смоленск – 2019 г.

1. Цели и задачи, объем практических занятий по дисциплине

1.Цели и задачи расчетно-графической работы по дисциплине

Цель расчетно-графической работы по дисциплине «Высшая математика» – закрепление соответствующего лекционного материала дисциплины.

Темы расчетно-графической работы:

1-ый семестр – «Дифференциальное исчисление»

3-ий семестр - «Теория функций комплексного переменного»

2. Задание на расчетно-графическую работу по дисциплине

Перечень индивидуальных заданий расчетно-графической работы (в соответствии с номером студента в журнале группы):

Задания расчетно-графической работы по теме «дифференциальное исчисление».

Задача 1. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$.

1.1. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(x^3+x^2\sin\dfrac{2}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.2. $f(x)=\begin{cases}\arcsin\left(x^2\cos\dfrac{1}{9x}\right)+\dfrac{2}{3}x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.3. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(x\cos\dfrac{1}{5x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.4. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1-\sin\left(x^3\sin\dfrac{1}{x}\right)\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.5. $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x\sin\dfrac{3}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.6.
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+\ln\left(1+x^2\sin\frac{1}{x}\right)}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

1.7. $f(x)=\begin{cases}\sin\left(e^{x^2\sin\frac{5}{x}}-1\right)+x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.8. $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{4}{3x}+\frac{x^2}{2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.9. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(x^3-x^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{3x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.10. $f(x)=\begin{cases}\sin x\cdot\cos\frac{5}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.11. $f(x)=\begin{cases}x+\arcsin\left(x^2\sin\frac{6}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.12.
$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(2^{x^2\cos(1/8x)}-1+x\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

1.13. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}x\cdot\sin\frac{7}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.14. $f(x)=\begin{cases}2x^2+x^2\cos\frac{1}{9x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.15. $f(x)=\begin{cases} x^2\cos^2\dfrac{11}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.16. $f(x)=\begin{cases} 2x^2+x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.17. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln\cos x}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.18. $f(x)=\begin{cases} 6x+x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.19. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.20. $f(x)=\begin{cases} e^{x\sin\frac{5}{x}}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.21. $f(x)=\begin{cases} 3^{x^2\sin\frac{2}{x}}-1+2x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.22. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1+\ln\left(1+3x^2\cos\dfrac{2}{x}\right)}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.23. $f(x)=\begin{cases} e^{x\sin\frac{3}{5x}}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.24. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^{\mathrm{tg}x}-2^{\sin x}}{x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.25. $f(x)=\begin{cases} \mathrm{arctg}\left(\dfrac{3x}{2}-x^2\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.26. $f(x)=\begin{cases} e^{\sin\left(x^{\frac{3}{2}}\sin\frac{2}{x}\right)}-1+x^2, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.27. $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{1-2x^3\sin\dfrac{5}{x}}-1+x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.28. $f(x)=\begin{cases} x^2e^{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.29. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln\left(1+2x^2+x^3\right)}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.30. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x-\cos 3x}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1.31. $f(x)=\begin{cases} 1-\cos\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Задача 2. Составить уравнение нормали (в вариантах 2.1 – 2.12) или уравнение касательной (в вариантах 2.13 – 2.31) к данной кривой в точке с абсциссой x_0.

2.1. $y=\left(4x-x^2\right)/4,\quad x_0=2.$

2.2. $y=2x^2+3x-1,\quad x_0=-2.$

2.3. $y=x-x^3,\quad x_0=-1.$

2.4. $y=x^2+8\sqrt{x}-32,\quad x_0=4.$

2.5. $y=x+\sqrt{x^3},\quad x_0=1.$

2.6. $y=\sqrt[3]{x^2}-20,\quad x_0=-8.$

2.7. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}},\quad x_0=4.$

2.8. $y=8\sqrt[4]{x}-70,\quad x_0=16.$

2.9. $y=2x^2-3x+1,\quad x_0=1.$

2.10. $y=\left(x^2-3x+6\right)/x^2,\quad x_0=3.$

2.11. $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x},\quad x_0=64.$

2.12. $y=\left(x^3+2\right)/\left(x^3-2\right),\quad x_0=2.$

2.13. $y=2x^2+3,\quad x_0=-1.$

2.14. $y=\dfrac{x^{29}+6}{x^4+1},\quad x_0=1.$

2.15. $y=2x+\dfrac{1}{x},\quad x_0=1.$

2.16. $y=-2\left(x^8+2\right)/\left(3\left(x^4+1\right)\right),\quad x_0=1.$

2.17. $y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1},\quad x_0=1.$

2.18. $y=\dfrac{x^{16}+9}{1-5x^2},\quad x_0=1.$

2.19. $y=3\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}\right),\quad x_0=1.$

2.20. $y=1/(3x+2),\quad x_0=2.$

2.21. $y=x/\left(x^2+1\right),\quad x_0=-2.$

2.22. $y=\left(x^2-3x+3\right)/3,\quad x_0=3.$

2.23. $y=2x/\left(x^2+1\right),\quad x_0=1.$

2.24. $y=-2\left(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}\right),\quad x_0=1.$

2.25. $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2},\quad x_0=1.$

2.26. $y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2,\quad x_0=1.$

2.27. $y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x},\quad x_0=1.$

2.28. $y=\left(3x-2x^3\right)/3,\quad x_0=1.$

2.29. $y=x^2/10+3,\quad x_0=2.$

2.30. $y=\left(x^2-2x-3\right)/4,\quad x_0=4.$

2.31. $y=6\sqrt[3]{x}-16\sqrt[4]{x}/3,\quad x_0=1.$

Задача 3. Найти дифференциал dy.

3.1. $y=x\arcsin(1/x)+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|,\quad x>0.$

3.2.

$y=\operatorname{tg}\left(2\arccos\sqrt{1-2x^2}\right),\quad x>0.$

3.3. $y=\sqrt{1+2x}-\ln\left|x+\sqrt{1+2x}\right|.$

3.4. $y=x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}.$

3.5. $y=\arccos\left(1/\sqrt{1+2x^2}\right),\quad x>0.$

3.6. $y=x\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|-\sqrt{x^2+3}.$

3.7. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)+(\operatorname{sh}x)\ln\operatorname{ch}x.$

3.8. $y=\arccos\left(\left(x^2-1\right)/\left(x^2\sqrt{2}\right)\right).$

3.9. $y=\ln\left(\cos^2x+\sqrt{1+\cos^4x}\right).$

3.10. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x.$

3.11. $y=\dfrac{\ln|x|}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}$

3.12. $y=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+\arcsin e^x.$

3.13. $y = x\sqrt{4-x^2} + a\arcsin(x/2)$.

3.14. $y = \ln \operatorname{tg}(x/2) - x/\sin x$.

3.15. $y = 2x + \ln|\sin x + 2\cos x|$.

3.16. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}/3$.

3.17. $y = \ln\left|\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}\right|$.

3.18. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-2}}$.

3.19. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x}$.

3.20. $y = \ln|x^2-1| - \dfrac{1}{x^2-1}$.

3.21. $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)$.

3.22. $y = \ln\left|2x + 2\sqrt{x^2+x}+1\right|$.

3.23. $y = \ln\left|\cos\sqrt{x}\right| + \sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt{x}$.

3.24. $y = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)$.

3.25. $y = x(\sin\ln x - \cos\ln x)$.

3.26. $y = \left(\sqrt{x-1} - \dfrac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x-1}}$.

3.27. $y = \cos x \cdot \ln\operatorname{tg} x - \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

3.28. $y = \sqrt{3+x^2} - x\ln\left|x+\sqrt{3+x^2}\right|$.

3.29. $y = \sqrt{x} - (1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

3.30. $y = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

3.31. $y = x\sqrt{x^2-1} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$.

Задача 4. Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

4.1. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,76.$

4.2. $y = \sqrt[3]{x^3+7x}, \quad x = 1,012.$

4.3. $y = \left(x + \sqrt{5-x^2}\right)/2, \quad x = 0,98.$

4.4. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 27,54.$

4.5. $y = \arcsin x, \quad x = 0,08.$

4.6. $y = \sqrt[3]{x^2+2x+5}, \quad x = 0,97.$

4.7. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 26,46.$

4.8. $y = \sqrt{x^2+x+3}, \quad x = 1,97.$

4.9. $y = x^{11}, \quad x = 1,021.$

4.10. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1,21.$

4.11. $y = x^{21}, \quad x = 0,998.$

4.12. $y = \sqrt[3]{x^2}, \quad x = 1,03.$

4.13. $y = x^6, \quad x = 2{,}01.$

4.14. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8{,}24.$

4.15. $y = x^7, \quad x = 1{,}996.$

4.16. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7{,}64.$

4.17. $y = \sqrt{4x-1}, \quad x = 2{,}56.$

4.18. $y = 1/\sqrt{2x^2+x+1}, \quad x = 1{,}016.$

4.19. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8{,}36.$

4.20. $y = 1/\sqrt{x}, \quad x = 4{,}16.$

4.21. $y = x^7, \quad x = 2{,}002.$

4.22. $y = \sqrt{4x-3}, \quad x = 1{,}78.$

4.23. $y = \sqrt{x^3}, \quad x = 0{,}98.$

4.24. $y = x^5, \quad x = 2{,}997.$

4.25. $y = \sqrt[5]{x^2}, \quad x = 1{,}03.$

4.26. $y = x^4, \quad x = 3{,}998.$

4.27. $y = \sqrt{1+x+\sin x}, \quad x = 0{,}01.$

4.28. $y = \sqrt[3]{3x+\cos x}, \quad x = 0{,}01.$

4.29. $y = \sqrt[4]{2x-\sin(\pi x/2)}, \quad x = 1{,}02.$

4.30. $y = \sqrt{x^2+5}, \quad x = 1{,}97.$

4.31. $y = 1/\sqrt{2x+1}, \quad x = 1{,}58.$

Задача 5. Найти производную.

5.1. $y = \dfrac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}.$

5.2. $y = \dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}.$

5.3. $y = \dfrac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}.$

5.4. $y = \dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}.$

5.5. $y = \dfrac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}.$

5.6. $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}.$

5.7. $y = \dfrac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}.$

5.8. $y = \dfrac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}.$

5.9. $y = \dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}.$

5.10. $y = \sqrt[3]{\dfrac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}.$

5.11. $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$.

5.12. $y=\dfrac{\left(x^2-2\right)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$.

5.13. $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$.

5.14. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}\left(3x+2\right)}{4x^2}$.

5.15. $y=\dfrac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}$.

5.16. $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$.

5.17. $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}\left(x-2\right)}{x^2}$.

5.18. $y=\left(1-x^2\right)\sqrt[5]{x^3+\dfrac{1}{x}}$.

5.19. $y=\dfrac{\left(2x^2+3\right)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$.

5.20. $y=\dfrac{x-1}{\left(x^2+5\right)\sqrt{x^2+5}}$.

5.21. $y=\dfrac{\left(2x+1\right)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$.

5.22. $y=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

5.23. $y=\dfrac{1}{\left(x+2\right)\sqrt{x^2+4x+5}}$.

5.24. $y=3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$.

5.25. $y=3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\left(x+1\right)}{\left(x-1\right)^2}}$.

5.26. $y=\dfrac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$.

5.27. $y=\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$.

5.28. $y=\dfrac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$.

5.29. $y=\dfrac{\left(x+3\right)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$.

5.30. $y=\dfrac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$.

5.31. $y=\dfrac{3x^6+4x^4-x^2-2}{15\sqrt{1+x^2}}$.

Задача 6. Найти производную.

6.1. $y = x - \ln\left(2 + \mathrm{e}^x + 2\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1}\right).$

6.2. $y = \mathrm{e}^{2x}\left(2 - \sin 2x - \cos 2x\right)/8.$

6.3. $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\mathrm{e}^x - 3}{2}.$

6.4. $y = \dfrac{1}{\ln 4}\ln\dfrac{1 + 2^x}{1 - 2^x}.$

6.5. $y = 2\sqrt{\mathrm{e}^x + 1} + \ln\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x + 1} - 1}{\sqrt{\mathrm{e}^x + 1} + 1}.$

6.6. $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{\left(\operatorname{arctg} e^x\right)^3}.$

6.7. $y = \dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x} + 1\right) - 2\operatorname{arctg} e^x.$

6.8.

$$y = \ln\left(e^x + 1\right) + \frac{18e^{2x} + 27e^x + 11}{6\left(e^x + 1\right)^3}.$$

6.9. $y = \dfrac{2\left(\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{2^x - 1}\right)}{\ln 2}.$

6.10.

$$y = 2\left(x - 2\right)\sqrt{1 + e^x} - 2\ln\frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1}.$$

6.11. $y = \dfrac{e^{\alpha x}\left(\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x\right)}{\alpha^2 + \beta^2}.$

6.12. $y = \dfrac{e^{\alpha x}\left(\beta \sin \beta x - \alpha \cos \beta x\right)}{\alpha^2 + \beta^2}.$

6.13. $y = e^{ax}\left[\dfrac{1}{2a} + \dfrac{a\cos 2bx + 2b\sin 2bx}{2\left(a^2 + 4b^2\right)}\right].$

6.14. $y = x + \dfrac{1}{1 + e^x} - \ln\left(1 + e^x\right).$

6.15. $y = x - 3\ln\left[\left(1 + e^{x/6}\right)\sqrt{1 + e^{x/3}}\right] - 3\operatorname{arctg} e^{x/6}.$

6.16. $y = x + \dfrac{8}{1 + e^{x/4}}.$

6.17. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}\right) + \arcsin e^{-x}.$

6.18.

$y = x - e^{-x} \arcsin e^{x} - \ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{2x}}\right).$

6.19. $y = x - \ln\left(1 + e^{x}\right) - 2e^{-x/2} \operatorname{arctg} e^{x/2} - \left(\operatorname{arctg} e^{x/2}\right)^{2}.$

6.20. $y = \dfrac{e^{x^3}}{1 + x^3}.$

6.21. $y = \dfrac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}\left(e^{mx} \cdot \sqrt{\dfrac{a}{b}}\right).$

6.22. $y = 3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2\right).$

6.23. $y = \ln \dfrac{\sqrt{1 + e^{x} + e^{2x}} - e^{x} - 1}{\sqrt{1 + e^{x} + e^{2x}} - e^{x} + 1}.$

6.24. $y = e^{\sin x}\left(x - \dfrac{1}{\cos x}\right).$

6.25. $y = \dfrac{e^{x}}{2}\left[\left(x^2 - 1\right)\cos x + \left(x - 1\right)^2 \sin x\right].$

6.26. $y = \operatorname{arctg}\left(e^{x} - e^{-x}\right).$

6.27. $y = 3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120\right).$

6.28. $y = -\dfrac{e^{3x}}{3\operatorname{sh}^3 x}.$

6.29. $y = \arcsin e^{-x} - \sqrt{1 - e^{2x}}.$

6.30. $y = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^4 + 2x^2 + 2\right).$

6.31. $y = \dfrac{e^{x^2}}{1 + x^2}.$

Задача 7. Найти производную.

7.1. $y = \sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x + a}\right) - \sqrt{x + a}.$

7.2. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right).$

7.3. $y = 2\sqrt{x} - 4\ln\left(2 + \sqrt{x}\right).$

7.4. $y = \ln \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - ax^4}}.$

7.5. $y=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right).$

7.6. $y=\ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}.$

7.7. $y=\ln^2\left(x+\cos x\right).$

7.8. $y=\ln^3\left(1+\cos x\right).$

7.9. $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}.$

7.10. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right).$

7.11. $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}.$

7.12. $y=x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}+a^{\pi^{\sqrt{2}}}.$

7.13. $y=\ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}.$

7.14. $y=\log_{16}\log_5\operatorname{tg}x.$

7.15. $y=\log_4\log_2\operatorname{tg}x.$

7.16. $y=x\left(\cos\ln x+\sin\ln x\right)/2.$

7.17. $y=\ln\cos\dfrac{2x+3}{x+1}.$

7.18. $y=\lg\ln\left(\operatorname{ctg}x\right).$

7.19. $y=\log_a\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}.$

7.20. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}\right).$

7.21. $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}.$

7.22. $y=\ln\arccos\sqrt{1-e^{4x}}.$

7.23. $y=\ln\left(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right).$

7.24. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{2}}.$

7.25. $y=\ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right).$

7.26. $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right).$

7.27. $y=\ln\dfrac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}\left(x/2\right)}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}\left(x/2\right)}.$

7.28. $y=\ln\dfrac{\ln x}{\sin\left(1/x\right)}.$

7.29. $y=\ln\ln\sin\left(1+1/x\right).$

7.30. $y=\ln\ln^3\ln^2 x.$

7.31. $y=\ln\ln^2\ln^3 x.$

Задача 8. Найти производную.

8.1. $y=\sin\sqrt{3}+\frac{1}{3}\frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$.

8.2. $y=\cos\ln 2-\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$.

8.3. $y=\operatorname{tg}\lg\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$.

8.4. $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{5}-\frac{1}{8}\frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$.

8.5. $y=\frac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$.

8.6. $y=\frac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$.

8.7. $y=\frac{\cos\ln 7\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$.

8.8. $y=\cos(\operatorname{ctg}2)-\frac{1}{16}\frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$.

8.9. $y=\operatorname{ctg}(\cos 2)+\frac{1}{6}\frac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$.

8.10. $y=\sqrt[3]{\operatorname{ctg}2}-\frac{1}{20}\frac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$.

8.11. $y=\frac{1}{3}\cos\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{10}\frac{\sin^2 10x}{\cos 20x}$.

8.12. $y=\ln\sin\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$.

8.13. $y=8\sin(\operatorname{ctg}3)+\frac{1}{5}\frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$.

8.14. $y=\frac{\cos(\operatorname{ctg}3)\cdot\cos^2 14x}{28\sin 28x}$.

8.15. $y=\frac{\cos\left(\operatorname{tg}\frac{1}{3}\right)\cdot\sin^2 15x}{15\cos 30x}$.

8.16. $y=\frac{\sin\left(\operatorname{tg}\frac{1}{7}\right)\cdot\cos^2 16x}{32\sin 32x}$.

8.17. $y=\frac{\operatorname{ctg}\left(\sin\frac{1}{3}\right)\cdot\sin^2 17x}{17\cos 34x}$.

8.18. $y=\frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x}$.

8.19. $y=\frac{\operatorname{tg}(\ln 2)\cdot\sin^2 19x}{19\cos 38x}$.

8.20. $y=\operatorname{ctg}(\cos 5)-\frac{1}{40}\frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$.

8.21. $y=\sqrt{\operatorname{tg}4}+\frac{\sin^2 21x}{21\cos 42x}$.

8.22. $y=\cos(\ln 13)-\frac{1}{44}\frac{\cos^2 22x}{\sin 44x}$.

8.23. $y=\ln\cos\frac{1}{3}+\frac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}$.

8.24. $y=\operatorname{ctg}\left(\sin\frac{1}{13}\right)-\frac{1}{48}\frac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$.

8.25. $y=\sin\ln 2+\frac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$.

8.26. $y=\sqrt[3]{\cos\sqrt{2}}-\frac{1}{52}\frac{\cos^2 26x}{\sin 52x}$.

8.27. $y=\sqrt[7]{\operatorname{tg}(\cos 2)}+\frac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$.

8.28. $y=\sin\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2}-\frac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$.

8.29. $y=\cos^2\sin 3+\frac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}$.

8.30. $y=\sin^3\cos 2-\frac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}$.

8.31. $y=\operatorname{tg}\sqrt{\cos(1/3)}+\frac{\sin^2 31x}{31\cos 62x}$.

Задача 9. Найти производную.

9.1. $y=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}{\sqrt{2}}$.

9.2. $y=\arcsin\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$.

9.3. $y=\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$.

9.4. $y=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

9.5. $y=\arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$.

9.6. $y=\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{6x}}$.

9.7. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

9.8. $y=\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{8x-x^2-7}-9\arccos\sqrt{\frac{x-1}{6}}$.

9.9. $y=\frac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2}+\frac{1}{3x\sqrt{x}}$.

9.10.

$$y=\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}.$$

9.11. $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1+x}{2x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

9.12.

$$y=\frac{3+x}{2}\sqrt{x(2-x)}+3\arccos\sqrt{\frac{x}{2}}.$$

9.13. $y=\dfrac{4+x^4}{x^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{4}{x}.$

9.14. $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}.$

9.15. $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}-\dfrac{\arccos x}{2x^2}.$

9.16.

$y=6\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{6+x}{2}\sqrt{x(4-x)}.$

9.17. $y=\dfrac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2-8}+\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}-1}.$

9.18. $y=\dfrac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x}.$

9.19. $y=\dfrac{2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}.$

9.20. $y=\dfrac{2x-5}{4}\sqrt{5x-4-x^2}+\dfrac{9}{4}\arcsin\sqrt{\dfrac{x-1}{3}}.$

9.21. $y=\operatorname{arctg} x+\dfrac{5}{6}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+4}.$

9.22. $y=\arcsin\dfrac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}.$

9.23. $y=\sqrt{1-x^2}-x\arcsin\sqrt{1-x^2}.$

9.24.

$y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\dfrac{8}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{2}.$

9.25. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}.$

9.26.

$y=(2x^2+6x+5)\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-x.$

9.27. $y=\dfrac{x}{2\sqrt{1-4x^2}}\arcsin 2x+\dfrac{1}{8}\ln(1-4x^2).$

9.28.

$$y=\left(2x^2-x+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}-\frac{x^3}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

9.29. $y=\left(x+2\sqrt{x}+2\right)\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\sqrt{x}.$

9.30.

$$y=\sqrt{1+2x-x^2}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x}-\sqrt{2}\ln(1+x).$$

9.31. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}.$

Задача 10. Найти производную.

10.1. $y=\dfrac{1}{4\sqrt{5}}\ln\dfrac{2+\sqrt{5}\operatorname{th}x}{2-\sqrt{5}\operatorname{th}x}.$

10.2. $y=\dfrac{\operatorname{sh}x}{4\operatorname{ch}^4 x}+\dfrac{3\operatorname{sh}x}{8\operatorname{ch}^2 x}+\dfrac{3}{8}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x).$

10.3. $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{\operatorname{th}x}}{1-\sqrt{\operatorname{th}x}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{th}x}.$

10.4. $y=\dfrac{3}{8\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\operatorname{th}x}{\sqrt{2}-\operatorname{th}x}-\dfrac{\operatorname{th}x}{4\left(2-\operatorname{th}^2 x\right)}.$

10.5. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{th}x+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\operatorname{th}x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th}x}.$

10.6. $y=-\dfrac{1}{2}\ln\left(\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{\operatorname{ch}x}{2\operatorname{sh}^2 x}.$

10.7. $y=\dfrac{1}{2a\sqrt{1+a^2}}\ln\dfrac{a+\sqrt{1+a^2}\operatorname{th}x}{a-\sqrt{1+a^2}\operatorname{th}x}.$

10.8. $y=\dfrac{1}{18\sqrt{2}}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\operatorname{cth}x}{1-\sqrt{2}\operatorname{cth}x}.$

10.9. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}2x}}{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}.$

10.10. $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{1-\operatorname{sh}2x}{2+\operatorname{sh}2x}.$

10.11. $y=\sqrt[4]{\dfrac{1+\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}x}}.$

10.12. $y=\dfrac{\operatorname{sh}x}{1+\operatorname{ch}x}.$

10.13. $y=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}2x}}.$

10.14. $y=\dfrac{\operatorname{sh}3x}{\sqrt{\operatorname{ch}6x}}.$

10.15. $y=\dfrac{1+8\operatorname{ch}^2 x\cdot\ln(\operatorname{ch}x)}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

10.16. $y=-\dfrac{12\operatorname{sh}^2 x+1}{3\operatorname{sh}^2 x}$.

10.17. $y=-\dfrac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2 x}+\dfrac{3}{2}\arcsin(\operatorname{th}x)$.

10.18. $y=\dfrac{1}{\sqrt{8}}\arcsin\dfrac{3+\operatorname{ch}x}{1+3\operatorname{ch}x}$.

10.19. $y=\dfrac{1}{\sqrt{8}}\ln\dfrac{4+\sqrt{8}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}}{4-\sqrt{8}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}}$.

10.20. $y=\dfrac{1}{4}\ln\left|\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right|-\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{3+\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$.

10.21. $y=-\dfrac{1}{4}\arcsin\dfrac{5+3\operatorname{ch}x}{3+5\operatorname{ch}x}$.

10.22. $y=\dfrac{1-8\operatorname{ch}^2 x}{4\operatorname{ch}^4 x}$.

10.23. $y=\dfrac{2}{\operatorname{sh}x}-\dfrac{1}{3\operatorname{sh}^3 x}+\dfrac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2 x}+\dfrac{5}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)$.

10.24. $y=\dfrac{8}{3}\operatorname{cth}2x-\dfrac{1}{3\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}^3 x}$.

10.25. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)-\dfrac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

10.26. $y=\dfrac{3}{2}\ln\left(\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)+\operatorname{ch}x-\dfrac{\operatorname{ch}x}{2\operatorname{sh}^2 x}$.

10.27. $y=-\dfrac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2 x}-\dfrac{1}{\operatorname{sh}x}-\dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)$.

10.28. $y=\dfrac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2 x}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)$.

10.29. $y=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2 x}+\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)\right]$.

10.30. $y=-\dfrac{\operatorname{ch}x}{2\operatorname{sh}^2 x}-\dfrac{1}{2}\ln\left(\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)$.

10.31. $y=\dfrac{2}{3}\operatorname{cth}x-\dfrac{\operatorname{ch}x}{3\operatorname{sh}^3 x}$.

Задача 11. Найти производную.

11.1. $y=(\operatorname{arctg}x)^{(1/2)\ln(\operatorname{arctg}x)}$.

11.2. $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)}$.

11.3. $y=(\sin x)^{5e^x}$.

11.4. $y=(\arcsin x)^{e^x}$.

11.5. $y=(\ln x)^{3^x}$.

11.6. $y=x^{\arcsin x}$.

11.7. $y=(\operatorname{ctg}3x)^{2e^x}$.

11.8. $y=x^{e^{\operatorname{tg}x}}$.

11.9. $y=(\operatorname{tg}x)^{4e^x}$.

11.10. $y=(\cos 5x)^{e^x}$.

11.11. $y=(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}$.

11.12. $y=(x-5)^{\operatorname{ch}x}$.

11.13. $y=(x^3+4)^{\operatorname{tg}x}$.

11.14. $y=x^{\sin x^3}$.

11.15. $y=(x^2-1)^{\operatorname{sh}x}$.

11.16. $y=(x^4+5)^{\operatorname{ctg}x}$.

11.17. $y=(\sin x)^{5x/2}$.

11.18. $y=(x^2+1)^{\cos x}$.

11.19. $y=19^{x^{19}}x^{19}$.

11.20. $y=x^{3^x}\cdot 2^x$.

11.21. $y=(\sin\sqrt{x})^{e^{1/x}}$.

11.22. $y=x^{e^{\operatorname{ctg}x}}$.

11.23. $y=x^{e^{\cos x}}$.

11.24. $y=x^{2^x}\cdot 5^x$.

11.25. $y=x^{e^{\sin x}}$.

11.26. $y=(\operatorname{tg}x)^{\ln(\operatorname{tg}x)/4}$.

11.27. $y=x^{e^{\operatorname{arctg}x}}$.

11.28. $y=(x^8+1)^{\operatorname{th}x}$.

11.29. $y=x^{29^x}\cdot 29^x$.

11.30. $y=(\cos 2x)^{\ln(\cos 2x)/4}$.

11.31. $y=x^{e^x}x^9$.

Задача 12. Найти производную.

12.1. $y=\dfrac{1}{24}(x^2+8)\sqrt{x^2-4}+\dfrac{x^2}{16}\arcsin\dfrac{2}{x},\quad x>0.$

12.2. $y=\dfrac{4x+1}{16x^2+8x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{4x+1}{\sqrt{2}}.$

12.3. $y=2x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{4x}}\right)-e^{-2x}\arcsin\left(e^{2x}\right).$

12.4. $y=\sqrt{9x^2-12x+5}\,\mathrm{arctg}(3x-2)-\ln\left(3x-2+\sqrt{9x^2-12x+5}\right).$

12.5. $y=\dfrac{2}{x-1}\sqrt{2x-x^2}+\ln\dfrac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}.$

12.6. $y=\dfrac{x^2}{81}\arcsin\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{81}\left(x^2+18\right)\sqrt{x^2-9},\quad x>0.$

12.7. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\dfrac{3x-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3x-1}{3x^2-2x+1}.$

12.8. $y=3x-\ln\left(1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{6x}}\right)-\mathrm{e}^{-3x}\arcsin\left(\mathrm{e}^{3x}\right).$

12.9. $y=\ln\left(4x-1+\sqrt{16x^2-8x+2}\right)-\sqrt{16x^2-8x+2}\,\mathrm{arctg}(4x-1).$

12.10. $y=\ln\dfrac{1+2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1}+\dfrac{4}{2x+1}\sqrt{-x-x^2}.$

12.11. $y=(2x+3)^4\cdot\arcsin\dfrac{1}{2x+3}+\dfrac{2}{3}\left(4x^2+12x+11\right)\sqrt{x^2+3x+2},\quad 2x+3>0.$

12.12. $y=\dfrac{x+2}{x^2+4x+6}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\dfrac{x+2}{\sqrt{2}}.$

12.13. $y=5x-\ln\left(1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{10x}}\right)-\mathrm{e}^{-5x}\arcsin\left(\mathrm{e}^{5x}\right).$

12.14. $y=\sqrt{x^2-8x+17}\,\mathrm{arctg}(x-4)-\ln\left(x-4+\sqrt{x^2-8x+17}\right).$

12.15. $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{-3+4x-x^2}}{2-x}+\dfrac{2}{2-x}\sqrt{-3+4x-x^2}.$

12.16. $y=\left(3x^2-4x+2\right)\sqrt{9x^2-12x+3}+(3x-2)^4\arcsin\dfrac{1}{3x-2},\quad 3x-2>0.$

12.17. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{x-1}{x^2-2x+3}.$

12.18. $y=\ln\left(\mathrm{e}^{5x}+\sqrt{\mathrm{e}^{10x}-1}\right)+\arcsin\left(\mathrm{e}^{-5x}\right).$

12.19. $y=\ln\left(2x-3+\sqrt{4x^2-12x+10}\right)-\sqrt{4x^2-12x+10}\,\mathrm{arctg}\left(2x-3\right).$

12.20. $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{-3-4x-x^2}}{-x-2}-\dfrac{2}{x+2}\sqrt{-3-4x-x^2}.$

12.21. $y=\dfrac{2}{3}\left(4x^2-4x+3\right)\sqrt{x^2-x}+\left(2x-1\right)^4\arcsin\dfrac{1}{2x-1},\quad 2x-1>0.$

12.22. $y=\dfrac{2x-1}{4x^2-4x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{2}}.$

12.23. $y=\arcsin\left(\mathrm{e}^{-4x}\right)+\ln\left(\mathrm{e}^{4x}+\sqrt{\mathrm{e}^{8x}-1}\right).$

12.24. $y=\ln\left(5x+\sqrt{25x^2+1}\right)-\sqrt{25x^2+1}\,\mathrm{arctg}\,5x.$

12.25. $y=\dfrac{2}{3x-2}\sqrt{-3+12x-9x^2}+\ln\dfrac{1+\sqrt{-3+12x-9x^2}}{3x-2}.$

12.26. $y=\left(3x+1\right)^4\arcsin\dfrac{1}{3x+1}+\left(3x^2+2x+1\right)\sqrt{9x^2+6x},\quad 3x+1>0.$

12.27. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2x+1}{4x^2+4x+3}.$

12.28. $y=\ln\left(\mathrm{e}^{3x}+\sqrt{\mathrm{e}^{6x}-1}\right)+\arcsin\left(\mathrm{e}^{-3x}\right).$

12.29. $y=\sqrt{49x^2+1}\,\mathrm{arctg}\,7x-\ln\left(7x+\sqrt{49x^2+1}\right).$

12.30. $y=\dfrac{1}{x}\sqrt{1-4x^2}+\ln\dfrac{1+\sqrt{1+4x^2}}{2x}.$

12.31. $y=\arcsin\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)+\ln\left(\mathrm{e}^{2x}+\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1}\right).$

Задача 13. Найти производную.

13.1. $y=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$.

13.2. $y=4\ln\dfrac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$.

13.3. $y=x\left(2x^2+5\right)\sqrt{x^2+1}+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

13.4. $y=x^3\arcsin x+\dfrac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

13.5. $y=3\arcsin\dfrac{3}{4x+1}+2\sqrt{4x^2+2x-2},\quad 4x+1>0$.

13.6. $y=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

13.7. $y=2\arcsin\dfrac{2}{3x+4}+\sqrt{9x^2+24x+12},\quad 3x+4>0$.

13.8. $y=x\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

13.9. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

13.10. $y=\sqrt{1-3x-2x^2}+\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{4x+3}{\sqrt{17}}$.

13.11. $y=\sqrt{(4+x)(1+x)}+3\ln\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{1+x}\right)$.

13.12. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

13.13. $y=\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^4-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

13.14.

$$y = 4\arcsin\frac{4}{2x+3} + \sqrt{4x^2+12x-7}, \quad 2x+3>0.$$

13.15. $y = 2\arcsin\frac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2+6x-3}, \quad 3x+1>0.$

13.16. $y = (2+3x)\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}.$

13.17. $y = \frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + \ln\left(\sqrt{x+1}+1\right).$

13.18. $y = \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}.$

13.19. $y = \ln\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2-1}\right)\operatorname{arctg}x.$

13.20.

$$y = x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) + \frac{1}{2}(\arcsin x - x).$$

13.21. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$ 13.22. $y = 3\arcsin\frac{3}{x+2} + \sqrt{x^2+4x-5}.$

13.23. $y = \sqrt{(3-x)(2+x)} + 5\arcsin\sqrt{\frac{x+2}{5}}.$

13.24. $y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x.$

13.25. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x.$ 13.26.

$$y = x^2\arccos x - \frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}.$$

13.27. $y = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2}}{x}.$

13.28. $y = \dfrac{x}{4}\left(10 - x^2\right)\sqrt{4 - x^2} + 6\arcsin\dfrac{x}{2}.$

13.29. $y = \arcsin\dfrac{1}{2x+3} + 2\sqrt{x^2 + 3x + 2}, \quad 2x + 3 > 0.$

13.30. $y = x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x}.$

13.31. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}.$

Задача 14. Найти производную.

14.1. $y = \dfrac{1}{\sin\alpha}\ln\left(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg}\alpha\right).$

14.2. $y = x\cos\alpha + \sin\alpha \ln\sin\left(x - \alpha\right).$

14.3. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\sin\ln x - \left(\sqrt{2} - 1\right)\cdot\cos\ln x\right]x^{\sqrt{2}+1}.$

14.4. $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}}\right).$

14.5. $y = 3\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + 2\dfrac{\sin x}{\cos^4 x}.$ 14.6. $y = \left(a^2 + b^2\right)^{-1/2}\cdot\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}\sin x}{b}\right).$

14.7. $y = \dfrac{7^x\left(3\sin 3x + \cos 3x \cdot \ln 7\right)}{9 + \ln^2 7}.$

14.8. $y = \ln\dfrac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}.$

14.9. $y = \dfrac{1}{a\left(1 + a^2\right)}\left[\operatorname{arctg}\left(a\cos x\right) + a\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right].$

14.10. $y = -\dfrac{1}{3\sin^3 x} - \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}.$

14.11. $y = \left(1 + x^2\right)\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}.$

14.12. $y = \dfrac{\operatorname{ctg} x + x}{1 - x\operatorname{ctg} x}.$

14.13. $y=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1-x^2}$.

14.14. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^4+1}-x^2}}{x},\quad x>0$.

14.15. $y=\dfrac{6^x\left(\sin 4x\cdot\ln 6-4\cos 4x\right)}{16+\ln^2 6}$.

14.16. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{1-\operatorname{tg}x}$.

14.17. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2\sin x}{\sqrt{9\cos^2 x-4}}$.

14.18. $y=\dfrac{5^x\left(2\sin 2x+\cos 2x\cdot\ln 5\right)}{4+\ln^2 5}$.

14.19. $y=\ln\dfrac{\sqrt{2}+\operatorname{th}x}{\sqrt{2}-\operatorname{th}x}$.

14.20. $y=\dfrac{3^x\left(4\sin 4x+\ln 3\cdot\cos 4x\right)}{16+\ln^2 3}$.

14.21. $y=\dfrac{4^x\left(\ln 4\cdot\sin 4x-4\cos 4x\right)}{16+\ln^2 4}$.

14.22. $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-2\cos x-3\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

14.23. $y=\dfrac{5^x\left(\sin 3x\cdot\ln 5-3\cos 3x\right)}{9+\ln^2 5}$.

14.24. $y=x-\ln\left(1+e^x\right)-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}$.

14.25. $y=\dfrac{2^x\left(\sin x+\cos x\cdot\ln 2\right)}{1+\ln^2 2}$.

14.26. $y=\dfrac{\ln\left(\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}\alpha\right)}{\sin\alpha}$.

14.27. $y=2\dfrac{\cos x}{\sin^4 x}+3\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

14.28. $y=\dfrac{\cos x}{3\left(2+\sin x\right)}+\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}\left(x/2\right)+1}{\sqrt{3}}$.

14.29. $y=\dfrac{3^x\left(\ln 3\cdot\sin 2x-2\cos 2x\right)}{\ln^2 3+4}$.

14.30. $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}-\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{3\cos^3 x}$.

14.31. $y=\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}x+\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}{\operatorname{tg}x-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}}.$

Задача 15. Найти производную y'_x.

15.1. $\begin{cases} x=\dfrac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y=\sin\left(\dfrac{t^3}{3}+t\right). \end{cases}$

15.2. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$

15.3. $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-t)^2}}. \end{cases}$

15.4. $\begin{cases} x=\arcsin(\sin t), \\ y=\arccos(\cos t). \end{cases}$

15.5. $\begin{cases} x=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right), \\ y=t\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$

15.6. $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\arcsin(t-1). \end{cases}$

15.7. $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}\left(2\,\mathrm{e}^t\right), \\ y=\ln\left(\operatorname{tg}\mathrm{e}^t\right). \end{cases}$

15.8. $\begin{cases} x=\ln(\operatorname{ctg}t), \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

15.9. $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\mathrm{e}^{t/2}, \\ y=\sqrt{\mathrm{e}^t+1}. \end{cases}$

15.10. $\begin{cases} x=\ln\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

15.11. $\begin{cases} x=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}, \\ y=\arcsin\dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

15.12. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

15.13. $\begin{cases} x = \arcsin\left(\sqrt{1-t^2}\right), \\ y = (\arccos t)^2. \end{cases}$

15.14. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \\ y = \ln \dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$

15.15. $\begin{cases} x = \left(1+\cos^2 t\right)^2, \\ y = \dfrac{\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$

15.16. $\begin{cases} x = \ln \dfrac{1-t}{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

15.17. $\begin{cases} x = \arccos \dfrac{1}{t}, \\ y = \sqrt{t^2-1} + \arcsin \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

15.18. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\ln t}, \\ y = \ln \dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$

15.19. $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}}. \end{cases}$

15.20. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

15.21. $\begin{cases} x = t\sqrt{t^2+1}, \\ y = \ln \dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$

15.22. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln \dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}. \end{cases}$

15.23. $\begin{cases} x = \ln\left(1-t^2\right), \\ y = \arcsin \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

15.24. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \dfrac{t+1}{t-1}, \\ y = \arcsin \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

15.25. $\begin{cases} x = \ln \sqrt{\dfrac{1-\sin t}{1+\sin t}}, \\ y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 t + \ln \cos t. \end{cases}$

15.26. $\begin{cases} x = \sqrt{t-t^2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{1-t}{t}}, \\ y = \sqrt{t} - \sqrt{1-t}\arcsin \sqrt{t}. \end{cases}$

15.27. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

15.58.

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2 \ln t}{1-t^2} + \ln\sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t + \ln\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

15.29. $\begin{cases} x = e^{\sec^2 t}, \\ y = \operatorname{tg} t \cdot \ln\cos t + \operatorname{tg} t - t. \end{cases}$

15.30.

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t + \ln\sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$$

15.31. $\begin{cases} x = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right), \\ y = \sqrt{1+t^2} - \ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$

Задача 16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_0$.

16.1. $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$

16.2. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$

16.3. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$

16.4. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

16.5. $\begin{cases} x = \dfrac{2t+t^2}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{2t-t^2}{1+t^3}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

16.6. $\begin{cases} x = \arcsin \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = -1. \end{cases}$

16.7. $\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\sin t), \\ y = t(t\sin t + 2\cos t), \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

16.8. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

16.9. $\begin{cases} x = 2\ln(\operatorname{ctg} t) + \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

16.10. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{4}t^4, \\ y = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{3}t^3, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

16.11. $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t, \quad t_0 = \pi/2. \end{cases}$

16.12. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$

16.13. $\begin{cases} x = \arcsin \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

16.14. $\begin{cases} x = \dfrac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \dfrac{3+2\ln t}{t}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

16.15. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^2}, \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

16.16. $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$

16.17. $\begin{cases} x = a(t\sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

16.18. $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}, \quad t_0 = -1. \end{cases}$

16.19. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

16.20. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

16.21. $\begin{cases} x = t(1-\sin t), \\ y = t\cos t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

16.22. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \dfrac{t}{t^2-1}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

16.23. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

16.24. $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

16.25. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

16.26. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = -\pi/3. \end{cases}$

16.27. $\begin{cases} x = 2\,\mathrm{tg}\, t, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

16.28. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \quad t_0 = -2. \end{cases}$

16.29. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = a^t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

16.30. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$

16.31. $\begin{cases} x = 2\mathrm{e}^t, \\ y = \mathrm{e}^{-t}, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

Задача 17. Найти производную n -го порядка.

17.1. $y = x\mathrm{e}^{ax}$.

17.2. $y = \sin 2x + \cos(x+1)$.

17.3. $y = \sqrt[5]{\mathrm{e}^{7x-1}}$.

17.4. $y = \dfrac{4x+7}{2x+3}$.

17.5. $y = \lg(5x+2)$.

17.6. $y = a^{3x}$.

17.7. $y = \dfrac{x}{2(3x+2)}$.

17.8. $y = \lg(x+4)$.

17.9. $y = \sqrt{x}$.

17.10. $y = \dfrac{2x+5}{13(3x+1)}$.

17.11. $y = 2^{3x+5}$.

17.12. $y = \sin(x+1) + \cos 2x$.

17.13. $y=\sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x+1}}.$

17.14. $y=\dfrac{4+15x}{5x+1}.$

17.15. $y=\lg(3x+1).$

17.16. $y=7^{5x}.$

17.17. $y=\dfrac{x}{9(4x+9)}.$

17.18. $y=\lg(1+x).$

17.19. $y=\dfrac{4}{x}.$

17.20. $y=\dfrac{5x+1}{13(2x+3)}.$

17.21. $y=a^{2x+3}.$

17.22. $y=\sin(3x+1)+\cos 5x.$

17.23. $y=\sqrt{\mathrm{e}^{3x+1}}.$

17.24. $y=\dfrac{11+12x}{6x+5}.$

17.25. $y=\lg(2x+7).$

17.26. $y=2^{kx}.$

17.27. $y=\dfrac{x}{x+1}.$

17.28. $y=\log_3(x+5).$

17.29. $y=\dfrac{1+x}{1-x}.$

17.30. $y=\dfrac{7x+1}{17(4x+3)}.$

17.31. $y=3^{2x+5}.$

Задача 18. Найти производную указанного порядка.

18.1. $y=(2x^2-7)\ln(x-1),\quad y^{V}=?$

18.2. $y=(3-x^2)\ln^2 x,\quad y^{III}=?$

18.3. $y=x\cos x^2,\quad y^{III}=?$

18.4. $y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}},\quad y^{III}=?$

18.5. $y=\dfrac{\log_2 x}{x^3},\quad y^{III}=?$

18.6. $y=(4x^3+5)\mathrm{e}^{2x+1},\quad y^{V}=?$

18.7. $y=x^2\sin(5x-3),\quad y^{III}=?$

18.8. $y=\dfrac{\ln x}{x^2},\quad y^{IV}=?$

18.9. $y=(2x+3)\ln^2 x,\quad y^{III}=?$

18.10. $y=(1+x^2)\operatorname{arctg} x,\quad y^{III}=?$

18.11. $y=\dfrac{\ln x}{x^3},\quad y^{IV}=?$

18.12. $y=(4x+3)\cdot 2^{-x},\quad y^{V}=?$

18.13. $y=\mathrm{e}^{1-2x}\cdot\sin(2+3x),\quad y^{IV}=?$

18.14. $y=\dfrac{\ln(3+x)}{3+x},\quad y^{III}=?$

18.15. $y=(2x^3+1)\cos x,\quad y^{V}=?$

18.16.

$y=(x^2+3)\ln(x-3),\quad y^{IV}=?$

18.17. $y=(1-x-x^2)\mathrm{e}^{(x-1)/2},\quad y^{IV}=?$

18.18. $y=\dfrac{1}{x}\sin 2x,\quad y^{III}=?$

18.19. $y=(x+7)\ln(x+4),\quad y^{V}=?$

18.20. $y=(3x-7)\cdot 3^{-x},\quad y^{IV}=?$

18.21. $y=\dfrac{\ln(2x+5)}{2x+5},\quad y^{III}=?$

18.22. $y=\mathrm{e}^{x/2}\cdot\sin 2x,\quad y^{IV}=?$

18.23. $y=\dfrac{\ln x}{x^5},\quad y^{III}=?$

18.24. $y=x\ln(1-3x),\quad y^{IV}=?$

18.25. $y=(x^2+3x+1)\mathrm{e}^{3x+2},\quad y^{V}=?$

18.26. $y=(5x-8)\cdot 2^{-x},\quad y^{IV}=?$

18.27. $y=\dfrac{\ln(x-2)}{x-2},\quad y^{V}=?$

18.28.

$y=\mathrm{e}^{-x}\cdot(\cos 2x-3\sin 2x),\quad y^{IV}=?$

18.29. $y=(5x-1)\ln^2 x,\quad y^{III}=?$

18.30. $y=\dfrac{\log_3 x}{x^2},\quad y^{IV}=?$

18.31. $y=(x^3+3)\mathrm{e}^{4x+3},\quad y^{IV}=?$

Задача 19. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически.

19.1. $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=2\sec^2 t. \end{cases}$

19.2. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=1/t. \end{cases}$

19.3. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

19.4. $\begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = 1/\operatorname{ch}^2 t. \end{cases}$

19.5. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

19.6. $\begin{cases} x = 1/t, \\ y = 1/\left(1 + t^2\right). \end{cases}$

19.7. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = 1/\sqrt{1 - t}. \end{cases}$

19.8. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$

19.9. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin 2t. \end{cases}$

19.10. $\begin{cases} x = \sqrt{t - 1}, \\ y = t/\sqrt{1 - t}. \end{cases}$

19.11. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t - 1}. \end{cases}$

19.12. $\begin{cases} x = \cos t/\left(1 + 2\cos t\right), \\ y = \sin t/\left(1 + 2\cos t\right). \end{cases}$

19.13. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

19.14. $\begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$

19.15. $\begin{cases} x = \sqrt{t - 1}, \\ y = 1/\sqrt{t}. \end{cases}$

19.16. $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$

19.17. $\begin{cases} x = \sqrt{t - 3}, \\ y = \ln\left(t - 2\right). \end{cases}$

19.18. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$

19.19. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

19.20. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

19.21. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$

19.22. $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$

19.23. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

19.24. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4\left(t/2\right). \end{cases}$

19.25. $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$

19.26. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = t^2/2. \end{cases}$

19.27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$

19.28. $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$

19.29. $\begin{cases} x = 1/t^2, \\ y = 1/(t^2 + 1). \end{cases}$

19.30. $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

19.31. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

Задания расчетно-графической работы по теме «теория функций комплексного переменного».

Вариант №1

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{-1}$ б) $\sqrt[4]{1+i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^8$ б) $\left(\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^6$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z| \geq 1 \\ \operatorname{Re}(z) < 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-1| < 2 \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg(z-1) < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$ функции:

а) $f(z) = \dfrac{z+3}{z-1}$, $z_0 = 1+i$ б) $f(z) = z\cos\dfrac{i}{z}$, $z_0 = 0$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^2(z^2+1)}$ б) $f(z) = \dfrac{\sin(z^2) - z^2}{z^4}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

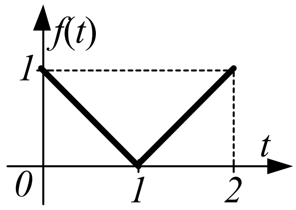
а) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}} z\cos\dfrac{i}{z}\,dz$ б) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\cos z - 1}{z^2(z^2+1)}\,dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^{2\pi} \left(1+\sqrt{\frac{10}{11}}\cos t\right)^{-2} dt$ б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$ в) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4} dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y)=x^2-y^2+x$ и значению $f(0)=0$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''+4y=5e^{-2t}$, $y(0)=1$, $y'(0)=-3$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x'=x+3y+2, & x(0)=1 \\ y'=x-y+1, & y(0)=2 \end{cases}$

Вариант №2

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[4]{1}$ б) $\sqrt[3]{-\frac{i}{27}}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^7$ б) $\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{12}$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z|<2 \\ \operatorname{Im}(z)<-1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z+i|>2 \\ 0<\arg(z+i)<\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\frac{z+2}{z+1}$, $z_0=-1+i$ б) $f(z)=z\sin\frac{2}{z}$, $z_0=0$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\frac{chz-1}{z(z-1)}$ б) $f(z)=\frac{e^z-1-z}{z^3}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

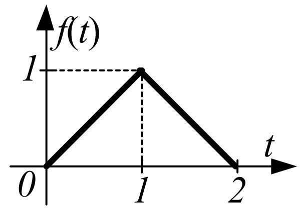
а) $\oint\limits_{|z|=10} z\sin\frac{2}{z}dz$ б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{chz-1}{z(z-1)}dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(5+4\cos t)^2}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}$ в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+1}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y)=x^3-3xy^2+1$ и значению $f(0)=1$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''-3y=-4\cos t$, $y(0)=0$, $y'(0)=5$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x'=2x-3y, & x(0)=4 \\ y'=x-2y+2\sin t, & y(0)=0 \end{cases}$

Вариант №3

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[4]{16}$ б) $\sqrt[3]{8i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^8$ б) $\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z|\ge 5 \\ \mathrm{Re}(z+i)<-1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z+2i|\le 1 \\ -\frac{\pi}{4}<\arg(z+2i)<0 \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\frac{z}{z+2}$, $z_0=i$ б) $f(z)=ze^{\frac{i+3}{z}}$, $z_0=0$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=z\cos\frac{2}{z^3}$ б) $f(z)=\frac{-e^{-z}+1+z}{z^2}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

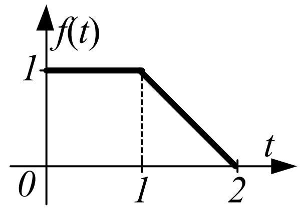
а) $\oint\limits_{|z-1|=2} z e^{\frac{i+3}{z}} dz$ б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1-sh^2 z}{z^2} dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2-\cos t)^2}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+5)^2}$ в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin 3x}{x^2+9} dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $V(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y)$ и значению $f(0)=0$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y'' - 9y = 12e^{-3t}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x' = 2x + y, & x(0) = 1 \\ y' = x + 2y + 1, & y(0) = 1 \end{cases}$

Вариант №4

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{-8}$ б) $\sqrt[3]{1-i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^7$ б) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z+5| < 6 \\ \mathrm{Re}(zi) > 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-i| < 1 \\ \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$ функции:

а) $f(z) = \frac{z-3}{z^2-5z+6}$, $z_0 = i$ б) $f(z) = z^5 \sin\frac{i}{z}$, $z_0 = 0$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z) = \frac{z-1}{z^3+1}$ б) $f(z) = z\sin\frac{3}{z^3}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

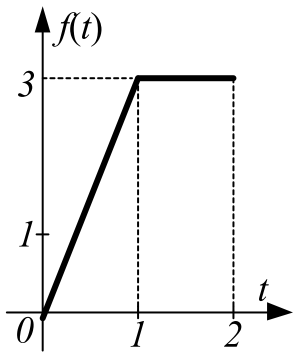
а) $\oint\limits_{|z+1|=9} z^5 \sin\frac{i}{z}dz$ б) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z-1}{z^3+1}dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{5}+\cos t\right)^2}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+6)^2}$ в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+5}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y)=x^2-y^2-2y$ и значению $f(0)=0$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''+2y=7\sin t$, $y(0)=3$, $y'(0)=-1$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x'=2x-y+2, & x(0)=1 \\ y'=x+2y+1, & y(0)=1 \end{cases}$

Вариант №5

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[6]{-1}$ б) $\sqrt[3]{-1+i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(i+\sqrt{3}\right)^7$ б) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^5$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z-1|<2 \\ \mathrm{Re}(z)>1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-2i|<1 \\ \frac{\pi}{4}<\arg(z)<\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\frac{z}{z-i}$, $z_0=1$ б) $f(z)=z^3\sin\frac{i+1}{z^2}$, $z_0=0$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\frac{1}{z^4+16}$ б) $f(z)=ze^{4/z^3}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

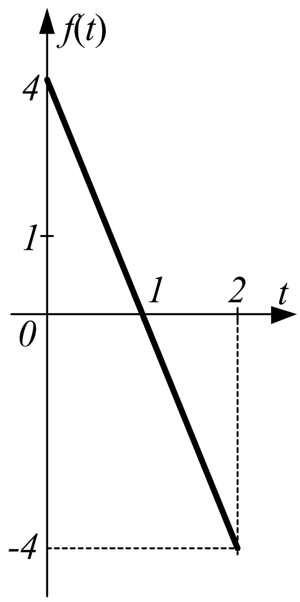
а) $\oint\limits_{|z-2|=3} z^3 \sin\dfrac{i+1}{z^2}dz$ б) $\oint\limits_{|z-2|=2} \dfrac{dz}{z^4+16}$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{\left(3-\sqrt{5}\cos t\right)^2}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+7)^2}$ в) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2+4}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}\cos y$ и значению $f(0)=2$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''-2y=3e^{4t}$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x'=x+y+1, & x(0)=3 \\ y'=-x+3y+2, & y(0)=1 \end{cases}$

Вариант №6

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{1}$ б) $\sqrt[3]{-1-i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(\sqrt{3}-i\right)^8$ б) $\left(\dfrac{i+\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^4$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z|<1 \\ \mathrm{Re}(iz+0{,}5)>0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-1-i|<2 \\ 0<\arg(z)<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $\left(z-z_0\right)$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{z+1}{z-2}$, $z_0=2+i$ б) $f(z)=z^3 sh\dfrac{i+2}{z}$, $z_0=0$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=z^4\cos\dfrac{5}{z^2}$ б) $f(z)=\dfrac{\ln(1+z)-z}{z^3}$, $|z|<1$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

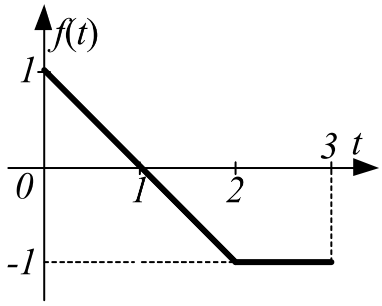
а) $\oint\limits_{|z-3|=4} z^3 sh\dfrac{i+2}{z}dz$ б) $\oint\limits_{|z|=2\pi} \dfrac{zdz}{e^z+1}$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(2+\sqrt{3}\cos t\right)^2}$ б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+8)^2}$ в) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=1$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ и значению $f(0)=1+i$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''+7y=-\cos 3t$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом:

$$\begin{cases} x' = 3x+y+3, & x(0)=1 \\ y' = -x+y+4, & y(0)=2 \end{cases}$$

Вариант №7

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[6]{-64}$ б) $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^7$ б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^8$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z-1|<1 \\ \mathrm{Re}(z)<3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-2|<2 \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \arg(z-2) \le 0 \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0=i$ б) $f(z)=z\cos\dfrac{i}{(z-1)^2}$, $z_0=1$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{e^z+1}{z-i\pi}$ б) $f(z)=z\sin\dfrac{6}{z^2}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

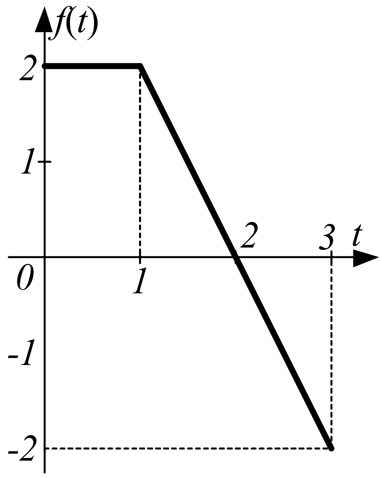
$$\text{а)} \oint\limits_{|z|=2} z\cos\frac{i}{(z-1)^2}dz \qquad \text{б)} \oint\limits_{|z|=2\pi} \frac{e^z+1}{z-i\pi}dz$$

Задача 7. Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{2}-\cos t\right)^2} \qquad \text{б)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\pi^2)^2} \qquad \text{в)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+(\ln 2)^2}dx$$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $V(x,y) = e^{-y}\sin x + y$ и значению $f(0) = 1$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y'' - 2y = -3\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, & x(0) = 2 \\ y' = x + 2y + 3, & y(0) = 1 \end{cases}$

Вариант №8

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{-8i}$ б) $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

$$\text{а)} (1+i)^{14} \qquad \text{б)} \left(\frac{-1+i}{-1-i}\right)^5$$

Задача 3. Изобразить области:

$$\text{а)} \begin{cases} |z| > 1 \\ \operatorname{Re}(z-1) > 0 \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} |z-i| < 1 \\ \dfrac{\pi}{6} \le \arg(z) \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$ функции:

$$\text{а)} f(z) = \frac{z+2}{z+i}, \quad z_0 = 3 \qquad \text{б)} f(z) = \frac{i}{z}e^{\frac{2-i}{z}}, \quad z_0 = 0$$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

$$\text{а)} f(z) = \frac{1}{chz} \qquad \text{б)} f(z) = z^2\cos\frac{4}{z}$$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

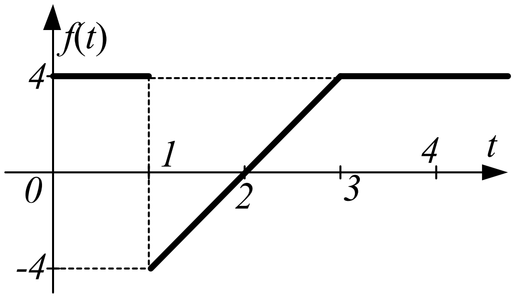
$$\text{а) } \oint\limits_{|z+2|=3} \frac{i}{z} e^{\frac{2-i}{z}} dz \qquad \text{б) } \oint\limits_{\left|z-\frac{\pi i}{2}\right|=\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{chz}$$

Задача 7. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int\limits_0^{2\pi} (5-3\cos t)^2 dt \qquad \text{б) } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \qquad \text{в) } \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+(\ln 2)^2} dx$$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y)$ или мнимой части $V(x,y) = e^x \cos y$ и значению $f(0) = 1+i$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y'' - 9y = 6\sin\sqrt{3}t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x' = x + y + e^t, & x(0) = 0 \\ y' = 3x - y, & y(0) = 0 \end{cases}$

Вариант №9

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{27}$ б) $\sqrt[4]{i+\sqrt{3}}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

$$\text{а) } (1-i)^{12} \qquad \text{б) } \left(\frac{-1-i}{-1+i}\right)^5$$

Задача 3. Изобразить области:

$$\text{а) } \begin{cases} |z| > 2 \\ \operatorname{Re}(z) < 3 \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} |z+1| < 2 \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \arg(z) \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$ функции:

$$\text{а) } f(z) = \frac{z+1}{z-2i}, \quad z_0 = 1+i \qquad \text{б) } f(z) = ze^{\frac{3i}{z^2}}, \quad z_0 = 0$$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

$$\text{а) } f(z) = \frac{1}{shz} \qquad \text{б) } f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

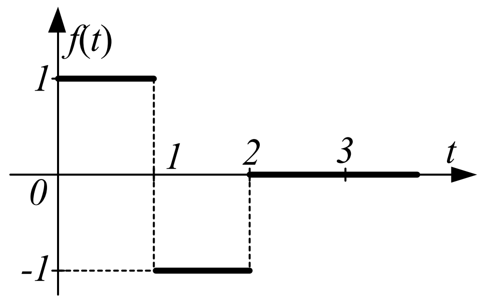
$$\text{а) } \oint\limits_{|z+1|=2} z e^{\frac{3i}{z^2}} dz \qquad \text{б) } \oint\limits_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{shz}$$

Задача 7. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int\limits_0^{2\pi} (3+2\cos t)^{-2} dt \qquad \text{б) } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)} \qquad \text{в) } \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 5x}{x^2+1} dx$$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $V(x,y) = -\dfrac{y}{(x+1)^2 + y^2}$ и значению $f(0) = 1$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y'' + 2y = 4e^{5t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом:

$$\begin{cases} x' = y - 5\cos t, & x(0) = 0 \\ y' = 2x + y, & y(0) = 2 \end{cases}$$

Вариант №10

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[6]{-8}$ б) $\sqrt[4]{\sqrt{3} - i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

$$\text{а) } (-1-i)^{10} \qquad \text{б) } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6$$

Задача 3. Изобразить области:

$$\text{а) } \begin{cases} |z| > 2, \quad |z| < 3 \\ \operatorname{Re}(z) > 0 \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} |z+i| > 2 \\ |z-i| < 2 \end{cases}$$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$ функции:

$$\text{а) } f(z) = \frac{2z+1}{z-1}, \quad z_0 = i \qquad \text{б) } f(z) = z^2 e^{\frac{i}{z}}, \quad z_0 = 0$$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z) = tgz$ б) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z-1)^2}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

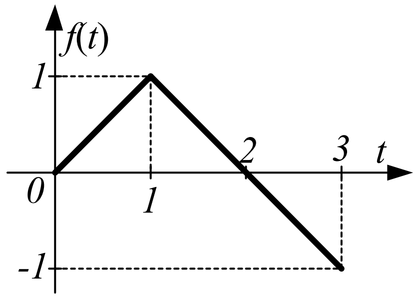
а) $\oint\limits_{|z+i|=2} z^2 e^{\frac{i}{z}} dz$ б) $\oint\limits_{|z|=\pi} tgz dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\cos t\right)^{-2} dt$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)}$ в) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos 2x}{x^2+9} dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 1$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $V(x,y) = y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$ и значению $f(1) = 2$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y'' - 4y = \sqrt{2}\cos 4t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t}, & x(0) = 0 \\ y' = x + 2y, & y(0) = 0 \end{cases}$

Вариант №11

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt{2i}$ б) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $(-1+i)^{14}$ б) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z+i| < 2 \\ \operatorname{Re}(iz) < 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-i| < 2, \quad |z| < 1 \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$ функции:

а) $f(z) = \dfrac{3z+i}{z+1}$, $z_0 = i$ б) $f(z) = (z+1)^2 \sin\dfrac{3}{z+1}$, $z_0 = -1$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z) = thz$ б) $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

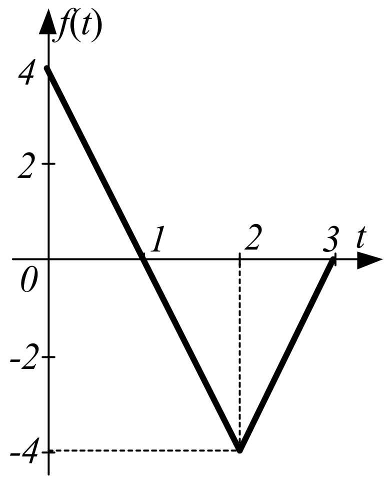
а) $\oint\limits_{|z-i|=2} (z+1)^2 \sin\dfrac{3}{z+1}dz$ б) $\oint\limits_{\left|z-\frac{i\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}} thzdz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{2+\cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+4)(x^2+5)}$ в) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y) = e^{-y}\cos x$ и значению $f(0) = 1$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y'' + 10y = 3e^{5t}$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом:

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + e^{-2t}, & x(0) = 4 \\ y' = x - 2y - 3e_{-2t}, & y(0) = 5 \end{cases}$$

Вариант №12

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[4]{-81}$ б) $\sqrt[4]{-\sqrt{3}-i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(-\sqrt{3}-i\right)^8$ б) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^9$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z+1| < 2 \\ \operatorname{Re}(2z) > 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-1| < 2, \quad |z| < 3 \\ \operatorname{Re} z \ge 0 \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$ функции:

а) $f(z) = \dfrac{z}{z-3i}$, $z_0 = i$ б) $f(z) = (z-i)e^{\frac{-2i}{z-i}}$, $z_0 = i$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{z}{z^3-1}$ б) $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

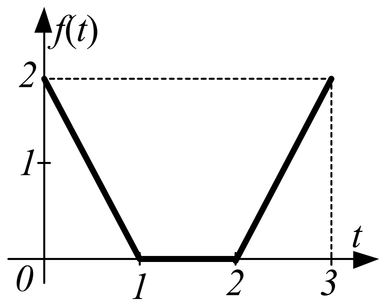
а) $\oint\limits_{|z+1|=2}(z-i)e^{\frac{-2i}{z-i}}dz$ б) $\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}}\dfrac{z}{z^3-1}dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{\sqrt{10}+\cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+2)(x^2+8)}$ в) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y)=y-2xy$ и значению $f(0)=0$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''-3y=5\sin t$, $y(0)=-2$, $y'(0)=3$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом:

$$\begin{cases} x'=4x+y-e^{2t}, & x(0)=2 \\ y'=y-2x, & y(0)=-2 \end{cases}$$

Вариант №13

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{8}$ б) $\sqrt[4]{2+2i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $(2+2i)^6$ б) $\left(\dfrac{-1-i}{-1+i}\right)^3$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z-1|<2, \quad |z|>1 \\ \operatorname{Im}(z)<0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z|<2 \\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg(z-1)<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{z}{z+2}$, $z_0=i$ б) $f(z)=(z+1)sh\left(\dfrac{3i}{z+1}\right)$, $z_0=-1$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

$$\text{а) } f(z)=\frac{\cos z}{z^2+1} \qquad \text{б) } f(z)=\frac{1-\cos\sqrt{z}}{z}$$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

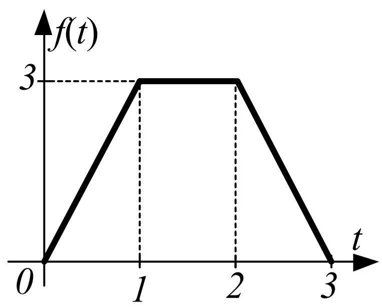
$$\text{а) } \oint\limits_{|z+1|=1}(z+1)sh\left(\frac{3i}{z+1}\right)dz \qquad \text{б) } \oint\limits_{|z-i|=1}\frac{\cos z}{z^2+1}dz$$

Задача 7. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{3+\cos t} \qquad \text{б) } \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+3)(x^2+27)} \qquad \text{в) } \int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $V(x,y)=x^2-y^2+2x+1$ и значению $f(0)=i$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''+3y=3e^{5t}$, $y(0)=-2$, $y'(0)=0$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом:

$$\begin{cases} x'=2y-x+1, & x(0)=-3 \\ y'=3y-2x, & y(0)=-1 \end{cases}$$

Вариант №14

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{-125}$ б) $\sqrt[3]{2-2i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

$$\text{а) } (2-2i)^5 \qquad \text{б) } \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^5$$

Задача 3. Изобразить области:

$$\text{а) } \begin{cases} |z|<3 \\ 0<\operatorname{Im}(z)<2 \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} 1<|z|<2 \\ 1{,}5<\operatorname{Re}(z) \end{cases}$$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

$$\text{а) } f(z)=\frac{z+5}{z-5}, \quad z_0=1 \qquad \text{б) } f(z)=z\cos\left(\frac{3i}{z}\right), \quad z_0=0$$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ б) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

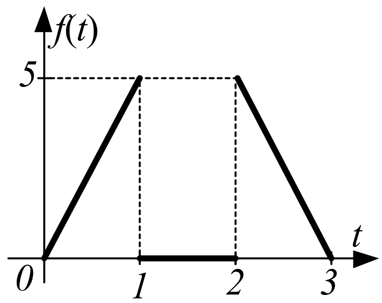
а) $\oint\limits_{|z+1|=9} z^5\sin\left(\dfrac{i}{z}\right)dz$ б) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{\sqrt{5}-\cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+16)}$ в) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y)=x^2-y^2-2x+1$ и значению $f(0)=1$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''+5y=4\cos\sqrt{3}t$, $y(0)=4$, $y'(0)=-7$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом:

$$\begin{cases} x'=5x-3y+2e^{3t}, & x(0)=-4 \\ y'=x+y+5e^{-2t}, & y(0)=-3 \end{cases}$$

Вариант №15

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt{9i}$ б) $\sqrt[4]{-2-2i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $(-2+2i)^7$ б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}\right)^7$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} 1<|z+i| \\ 2\le \operatorname{Im}(z)\le 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-1|<1 \\ \dfrac{2\pi}{3}\le \arg(z-1)\le \pi \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{z+1}{z-3}$, $z_0=2-i$ б) $f(z)=(z+i)\cos\left(\dfrac{i}{(z+i)^3}\right)$, $z_0=-i$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{shz}{(z-1)^3}$ б) $f(z)=e^{2-\frac{1}{z}}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

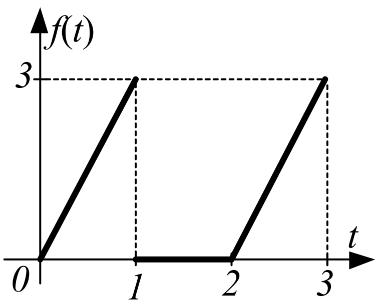
а) $\oint\limits_{|z-1|=2}(z+i)\cos\left(\dfrac{i}{(z+i)^3}\right)dz$ б) $\oint\limits_{|z-1|=1}\dfrac{shz}{(z-1)^3}dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{1+0{,}7\cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2dx}{(x^2+4)^2}$ в) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\cos 5x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $V(x,y)=3x^2y-y^3-y$ и значению $f(0)=0$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''-4y=5e^{-2t}$, $y(0)=-3$, $y'(0)=0$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases}x'=x+y+1+e^t & x(0)=-\dfrac{2}{3}\\ y'=3x-y, \quad y(0)=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Вариант №16

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}}$ б) $\sqrt[5]{-2+2i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $(-2-2i)^6$ б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i}\right)^5$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases}|z|<3\\ 1\le \operatorname{Re}(z)\le 2\end{cases}$ б) $\begin{cases}|z+1|<3\\ |1-z|<3\end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{z}{z+2}$, $z_0=1+i$ б) $f(z)=(z+5)^3 ch\left(\dfrac{2i-3}{(z+5)^2}\right)$, $z_0=-5$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+4}e^z$ б) $f(z)=\dfrac{1+az-e^{-az}}{z^2}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

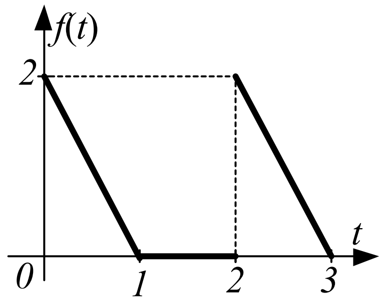
а) $\oint\limits_{|z|=10}(z+5)^3 ch\left(\dfrac{2i-3}{(z+5)^2}\right)dz$ б) $\oint\limits_{|z-2i|=1}\dfrac{z+1}{z^2+4}e^z dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{2dt}{2-3\cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$ в) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^3\sin x}{x^2+1}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $V(x,y)=2xy+y$ и значению $f(0)=0$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''+8y=\sin 4t$, $y(0)=0$, $y'(0)=5$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x'=x+2y, & x(0)=0 \\ y'=x-5\sin t, & y(0)=1 \end{cases}$

Вариант №17

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt{16i}$ б) $\sqrt[5]{-i-1}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)^8$ б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^7$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases}|z-1|<1\\ |z|>1\end{cases}$ б) $\begin{cases}|z+i|\ge 2, \quad |z|<3\\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg(z+i)<\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$, $\quad z_0=5+2i$ б) $f(z)=ze^{\frac{-i}{z^2}}$, $\quad z_0=0$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

$$\text{а) } f(z)=\frac{e^{z^2}-1}{z^3(z+1)} \qquad \text{б) } f(z)=\sin\frac{1}{z}-\frac{1}{z}$$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

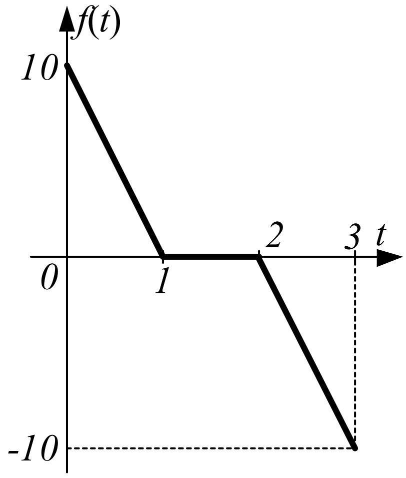
$$\text{а) } \oint\limits_{|z+1|=2} ze^{\frac{-i}{z^2}}\,dz \qquad \text{б) } \oint\limits_{|z|=2}\frac{e^{z^2}-1}{z^3(z+1)}dz$$

Задача 7. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int\limits_0^{2\pi}\frac{5dt}{5+3\cos t} \qquad \text{б) } \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2} \qquad \text{в) } \int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3\sin 3x}{x^2+1}dx$$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $V(x,y)=3x^2y-y^3$ и значению $f(0)=1$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''+y=-2e^{3t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=-4$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом:

$$\begin{cases} x'=2x-y, & x(0)=1 \\ y'=y-2x+10t, & y(0)=-3 \end{cases}$$

Вариант №18

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[4]{-1}$ $\quad$ б) $\sqrt{-i+\sqrt{3}}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

$$\text{а) } \left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^7 \qquad \text{б) } \left(\frac{\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i}\right)^5$$

Задача 3. Изобразить области:

$$\text{а) } \begin{cases} |z|<2 \\ \operatorname{Re} z>1 \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} |z+i|<1 \\ -\dfrac{2\pi}{3}<\arg(z)<-\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{z-1-i}{z}$, $z_0=2+3i$ б) $f(z)=(z-i)\sin\left(\dfrac{2i}{z-i}\right)$, $z_0=i$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{1-z}{(z+1)^3}$ б) $f(z)=\dfrac{e^{z^2}-1}{z}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

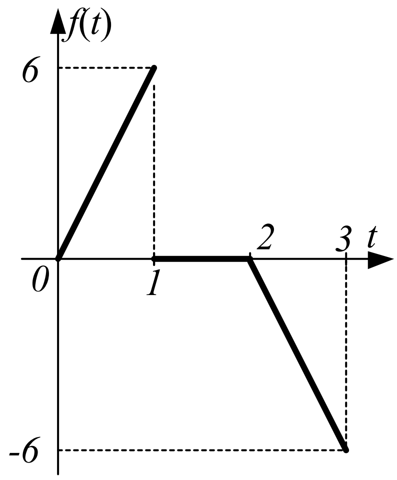
а) $\oint\limits_{|z|=2}(z-i)\sin\left(\dfrac{2i}{z-i}\right)dz$ б) $\oint\limits_{|z+1|=0,5}\dfrac{1-z}{(z+1)^3}dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\sqrt{11}dt}{\sqrt{11}-\sqrt{10}\cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2dx}{(x^2+5)^2}$ в) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2+\pi^2}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$ и значению $f(0)=0$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''-6y=7\cos 2t$, $y(0)=-4$, $y'(0)=0$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом:

$$\begin{cases}x'=x+2y+16te^t, & x(0)=-7\\ y'=2x-2y, & y(0)=-3\end{cases}$$

Вариант №19

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{-27}$ б) $\sqrt[3]{2-2i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)^8$ б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^6$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases}|z|<1\\ \operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z>0\end{cases}$ б) $\begin{cases}1<|z-i|<2\\ \operatorname{Re}(z)<\end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $\left(z-z_0\right)$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$, $\quad z_0=2+2i$ $\quad$ б) $f(z)=(z+i)e^{\frac{5-2i}{z+i}}$, $\quad z_0=-i$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

$$\text{а) } f(z)=\frac{\sin(z^2)-z^4}{z^4} \qquad \text{б) } f(z)=\frac{e^{-z^2}-1}{z}$$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

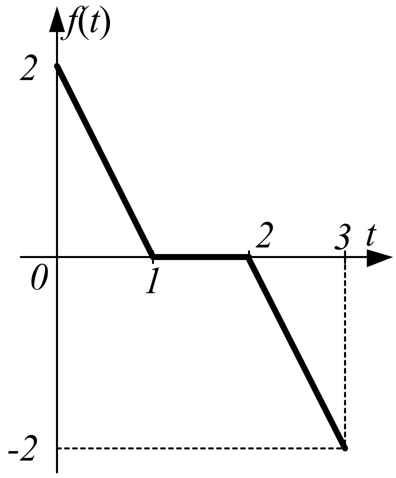
$$\text{а) } \oint\limits_{|z|=3}(z+i)e^{\frac{5-2i}{z+i}}\,dz \qquad \text{б) } \oint\limits_{|z|=1}\frac{\sin(z^2)-z^4}{z^4}\,dz$$

Задача 7. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{5-3\cos t} \qquad \text{б) } \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+8)^2} \qquad \text{в) } \int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $V(x,y)=2xy+2x$ и значению $f(0)=0$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''-2y=4\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом:

$$\begin{cases} x'=2x+4y-8, & x(0)=-1 \\ y'=3x+6y, & y(0)=1 \end{cases}$$

Вариант №20

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{1}$ $\qquad$ б) $\sqrt[3]{-2+2i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

$$\text{а) } \left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^7 \qquad \text{б) } \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^6$$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |\arg z| < \dfrac{\pi}{4} \\ \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-i| < 3 \\ |z+i| < 3 \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$ функции:

а) $f(z) = \dfrac{z-1-i}{z}$, $z_0 = 4+7i$ б) $f(z) = (z+3)^7 e^{\frac{-3i}{z+3}}$, $z_0 = -3$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$ б) $f(z) = \dfrac{e^{z^2} - e^{-z}}{z}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

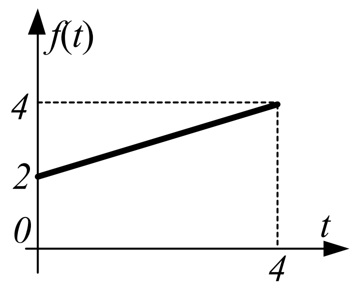
а) $\oint\limits_{|z+3|=0,5} (z+3)^7 e^{\frac{-3i}{z+3}}\, dz$ б) $\oint\limits_{|z|=\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin z}{shz} dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{\sqrt{7} + \cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^2 dx}{x^2 + 4x + 40}$ в) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{(x+1)\sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y) = 1 - \sin y \cdot e^x$ и значению $f(0) = 1 + i$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом:
$y'' + 6y = \sqrt{6}\sin\sqrt{7}t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = \sqrt{6}$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x' = 2x - 3y, & x(0) = 0 \\ y' = x - 2y + 2\sin t, & y(0) = 0 \end{cases}$

Вариант №21

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[6]{-64}$ б) $\sqrt[4]{-\sqrt{3} - i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{i}{4}\right)^7$ б) $\left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{1+i}\right)^6$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z| < 2 \\ \operatorname{Re} z > 1 \\ \operatorname{Im} z > 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z| < 1 \\ \dfrac{\pi}{6} < \arg(z-i) < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$ функции:

а) $f(z) = \dfrac{z-i}{z+2i+1}$, $z_0 = 2$ б) $f(z) = (z-2i)^5 e^{\frac{-3i}{(z-2i)^2}}$, $z_0 = 2i$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}$ б) $f(z) = \dfrac{e^{-z^2} - e^{-z}}{z}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

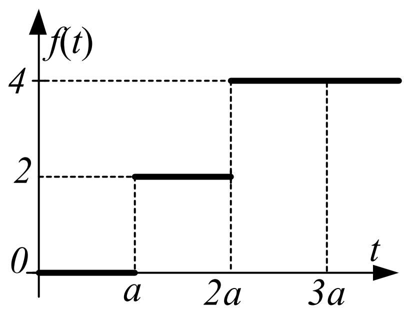
а) $\oint\limits_{|z-2i|=1} (z-2i)^5 e^{\frac{-3i}{(z-2i)^2}} dz$ б) $\oint\limits_{\left|z-i\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos z}{chz} dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\sin^2 t\, dt}{5+4\cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+17}$ в) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{(x-1)\cos 2x}{x^2-4x+5} dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $V(x,y) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x}\sin y$ и значению $f(0) = 2$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y'' - 4y = 7e^{-t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом:
$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 5t, & x(0) = -5 \\ y' = 3x + 2y + 8e^t, & y(0) = 14/5 \end{cases}$

Вариант №22

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[4]{-81}$ б) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{i}{4}\right)^8$ б) $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^6$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z+1|<2 \\ |z|>1 \\ \operatorname{Im} z>0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z|<3 \\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg(z-i)<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $\left(z-z_0\right)$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$, $z_0=-1-2i$ б) $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)^5}e^{3i(z+i)}$, $z_0=-i$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2+\pi^2}$ б) $f(z)=\dfrac{\cos z-chz}{z^2}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

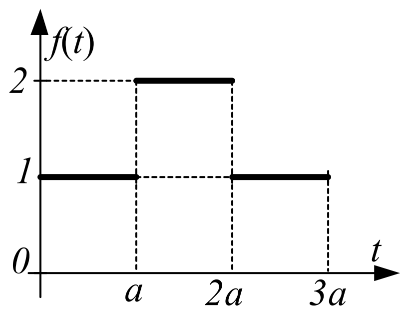
а) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{1}{(z+i)^5}e^{3i(z+i)}dz$ б) $\oint\limits_{|z-i\pi|=1}\dfrac{\cos z}{z^2+\pi^2}dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\sin^2 t\,dt}{2+\cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2-6x+16}$ в) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+2x+10}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=1$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $V(x,y)=1-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ и значению $f(1)=1+i$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''+3y=\sqrt{7}\cos t$, $y(0)=\sqrt{7}$, $y'(0)=-\sqrt{3}$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x'=2x-y, & x(0)=1 \\ y'=x+2e^t, & y(0)=1 \end{cases}$

Вариант №23

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{27}$ б) $\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}\right)^7$ б) $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{-1+i}\right)^6$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} 2<|z+i|<5 \\ 2{,}5<\operatorname{Re} z<4 \\ \operatorname{Im} z>0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1<|z-2i|<3 \\ -\frac{\pi}{4}<\arg(z-2i)<\frac{\pi}{4} \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\frac{z-1-i}{2z}$, $z_0=5+i$ б) $f(z)=\frac{\sin(5z+10+5i)}{(z+2+i)^6}$, $z_0=-2-i$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\frac{\sin z}{z^2+\pi^2}$ б) $f(z)=\frac{ch\sqrt{z}-\cos\sqrt{z}}{z}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

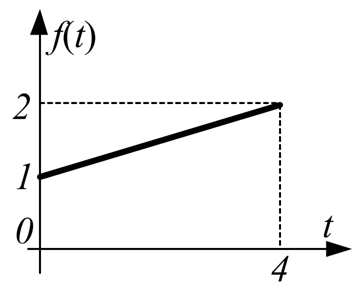
а) $\oint\limits_{|z+i+2|=2}\frac{\sin(5z+10+5i)}{(z+2+i)^6}dz$ б) $\oint\limits_{|z-i\pi|=\frac{\pi}{2}}\frac{\sin z}{z^2+\pi^2}dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin t\,dt}{2+\sqrt{3}\cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+45}$ в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y)=e^{-y}\cos x+x$ и значению $f(0)=1$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''-y=6e^t$, $y(0)=2$, $y'(0)=-3$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x'=4x-3y+\sin t, & x(0)=2 \\ y'=2x-y-2\cos t, & y(0)=3 \end{cases}$

Вариант №24

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt{-16i}$ б) $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{i}{4}\right)^{8}$ б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{-1+i}\right)^{12}$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z-1|<2 \\ \operatorname{Im} z+\operatorname{Re} z<0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-2i|<1 \\ -\dfrac{\pi}{3}<\arg(z)<-\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{z-i}{z+2i+1}$, $z_0=3+3i$ б) $f(z)=\dfrac{\cos(2z-2i)}{(z-i)^2}$, $z_0=i$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z(z^2-\pi^2)}$ б) $f(z)=\dfrac{chz-\cos z}{z^2}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

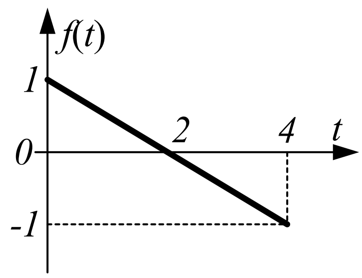
а) $\oint\limits_{|z-i|=3}\dfrac{\cos(2z-2i)}{(z-i)^2}dz$ б) $\oint\limits_{|z|=2\pi}\dfrac{\sin z}{z(z^2-\pi^2)}dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\sin^2 t\,dt}{3+\sqrt{5}\cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^3}$ в) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x\sin x}{(x^2+1)^2}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $V(x,y)=e^{-y}\sin x$ и значению $f(0)=1$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''-7y=2\sin 3t$, $y(0)=0$, $y'(0)=-4$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x'=2x+y+2e^{t}, & x(0)=0 \\ y'=x+2y-3e^{4t}, & y(0)=-4 \end{cases}$

Вариант №25

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{-8i}$ б) $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $(-1-i)^{11}$ б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^5$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z|<2 \\ 2\operatorname{Im} z+\operatorname{Re} z<0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-2i|>1 \\ -\dfrac{\pi}{4}<\arg(z-2i)<\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{z+2}{z+3}$, $z_0=-1+3i$ б) $f(z)=\dfrac{chz}{z^{13}}$, $z_0=0$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{1+z^4}{z(z-1)^3}$ б) $f(z)=\dfrac{\sin z-shz}{z}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

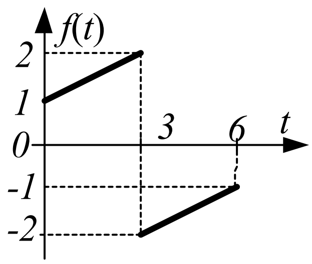
а) $\oint\limits_{|z+1|=2}\dfrac{chz}{z^{13}}dz$ б) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{1+z^4}{z(z-1)^3}dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t\,dt}{3+2\cos t}$ б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-8x+32}$ в) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+4)^2}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y)=\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$ и значению $f(0)=1$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''-9y=4e^{-2t}$, $y(0)=7$, $y'(0)=2$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x'=x-y+8t, & x(0)=3 \\ y'=5x-y, & y(0)=1 \end{cases}$

Вариант №26

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt{\dfrac{-i}{8}}$ б) $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме:

а) $(1+i)^9$ б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{i\sqrt{3}+1}\right)^7$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z|>4 \\ \operatorname{Re}(iz+1)>-1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-2i|\ge 1 \\ \operatorname{Im}(z)>0, \quad \operatorname{Re}(z)>0 \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$, $z_0=2-i$ б) $f(z)=\dfrac{sh(iz)}{z^3}$, $z_0=0$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{1}{1+z+z^2+z^3}$ б) $f(z)=\dfrac{shz-\sin z}{z^2}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

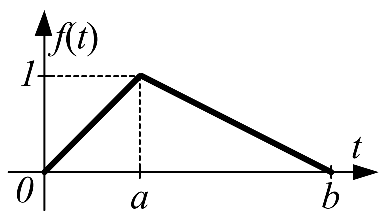
а) $\oint\limits_{|z+1|=3}\dfrac{sh(iz)}{z^3}dz$ б) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{dz}{1+z+z^2+z^3}$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\sin^2 t\,dt}{2+\sqrt{2}\cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+2x+26}$ в) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+(\ln 2)^2}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=1$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}+x$ и значению $f(1)=2$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''-8y=3\cos\sqrt{2}t$, $y(0)=0{,}1$, $y'(0)=1/5$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x'=y+2e^t, & x(0)=-1 \\ y'=x+t^2, & y(0)=0 \end{cases}$

Вариант №27

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{\dfrac{i}{8}}$; б) $\sqrt[3]{1-i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме: а) $(-1+i)^{11}$; б) $\left(\dfrac{-1-i}{1-i}\right)^5$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z|<2 \\ \mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)>1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |z-i|<2, \quad |z+i|<2 \\ \left|\arg(z)-\dfrac{\pi}{2}\right|<\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{z-1-i}{z}$, $z_0=i$ б) $f(z)=\dfrac{1}{z^2}\sin\dfrac{iz}{\pi}$, $z_0=0$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{z\sin z}{z^2+1}$ б) $f(z)=\dfrac{sh(z-1)-\sin(z-1)}{(z-1)^2}$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

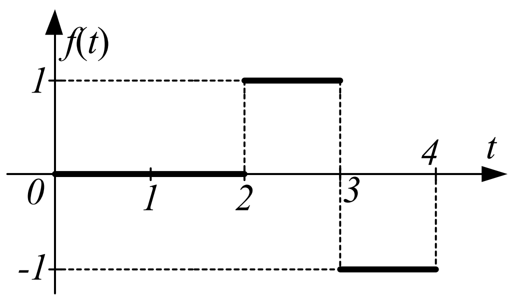
а) $\oint\limits_{|z-i|=2}\dfrac{1}{z^2}\sin\dfrac{iz}{\pi}\,dz$ б) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z\sin z}{z^2+1}\,dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\sin^2 t\,dt}{5+3\cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos x\,dx}{(x^2+1)^2}$ в) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x}{(x^2+4x+13)^2}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $V(x,y)=x^2-y^2-x$ и значению $f(0)=0$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''-3y'=3\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}\,t}$, $y(0)=\sqrt{3}$, $y'(0)=0$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом:

$$\begin{cases} x'=2x-4y, & x(0)=1 \\ y'=x-3y+3e^t, & y(0)=2 \end{cases}$$

Вариант №28

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt{-4i}$; б) $\sqrt[4]{1+i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме: а) $(-1-i)^7$; б) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^9$

Задача 3. Изобразить области:

$$\text{а) } \begin{cases} |z-i| > 2 \\ |\arg(z)| < \dfrac{\pi}{6} \end{cases}; \qquad \text{б) } \begin{cases} |z| < 1, \quad \operatorname{Re}(z) > 1 \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg(z-i) < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z) = \dfrac{z-i}{z+2i+1}$, $\quad z_0 = i+2 \quad$ б) $f(z) = \dfrac{\sin(\pi(z-1))}{(z-1)^3}$, $\quad z_0 = 1$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

$$\text{а) } f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-\pi/2)} \qquad \text{б) } f(z) = e^{\frac{z-1}{z}}$$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

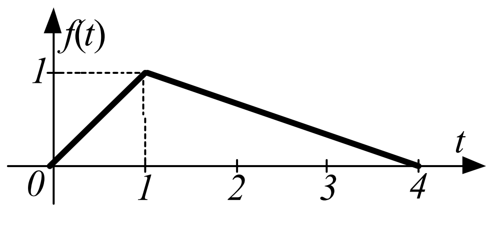
$$\text{а) } \oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin(\pi(z-1))}{(z-1)^3}\,dz \qquad \text{б) } \oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^2(z-\pi/2)}\,dz$$

Задача 7. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t\,dt}{3+\cos t} \qquad \text{б) } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+1)^2} \qquad \text{в) } \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,dx$$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y) = -2xy - 2y$ части и значению $f(0) = i$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $\quad y'' + 10y = -5\sin 2t, \quad y(0) = 1,$ $y'(0) = 1/3$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t, & x(0) = 0 \\ y' = -x - 2y + \sin t, & y(0) = -1 \end{cases}$

Вариант №29

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{-2-2i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме: а) $\left(-\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)^5$; б) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^9$

Задача 3. Изобразить области:

а) $\begin{cases} |z|>1 \\ \operatorname{Re}(z)<2, \quad \operatorname{Im}(z)>0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |z(1+i)|<2 \\ -\frac{\pi}{3}<\arg(z-1)<\frac{\pi}{3} \end{cases}$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\frac{z+2}{z+3}$, $z_0=-i$ б) $f(z)=\frac{1}{z+2i}e^{\frac{1+i}{z+2i}}$, $z_0=-2i$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\frac{e^z}{z^2(z^2+1)}$ б) $f(z)=\frac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$, $|z|<1$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

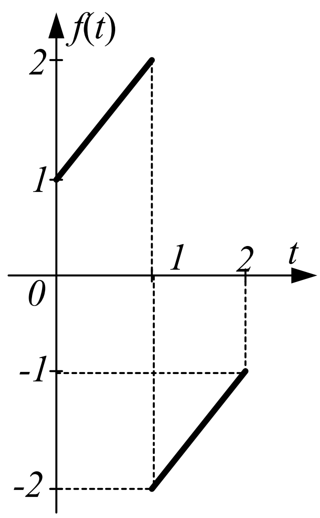
а) $\oint\limits_{|z+2i|=4} \frac{1}{z+2i}e^{\frac{1+i}{z+2i}}dz$ б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2(z^2+1)}dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t\,dt}{\sqrt{2}+\cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-10x+125}$ в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $V(x,y)=2yx-2y$ и значению $f(0)=1$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''-y=-5e^{6t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=-2$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x'=y-6x+9e^{-t}, & x(0)=2 \\ y'=-5y+2x+40e^{t}, & y(0)=9 \end{cases}$

Вариант №30

Задача 1. Найти все значения корней: а) $\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[3]{-1-i}$

Задача 2. Представить в алгебраической форме: а)$\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)^7$; б)$\left(\frac{1+i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^6$

Задача 3. Изобразить области:

$$\text{а) } \begin{cases} |z-i|<2 \\ \operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)>0 \\ \operatorname{Re}(z)-\operatorname{Im}(z)>1 \end{cases}; \qquad \text{б) } \begin{cases} |z(2+i)|<4 \\ |\arg(z)|<\pi/4 \\ |z|<4/\sqrt{5} \end{cases}$$

Задача 4. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функции:

а) $f(z)=\dfrac{z+1}{z-3}$, $z_0=i-4$ б) $f(z)=\dfrac{sh(iz)}{z^8}$, $z_0=0$

Задача 5. Определить типы изолированных особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{(e^z-e^{-z})z}{z+1}$ б) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$, $|z|<1$

Задача 6. Вычислить интегралы от функции комплексного переменного:

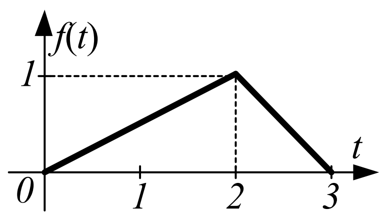
а) $\oint\limits_{|z+1|=3} \dfrac{sh(iz)}{z^8}dz$ б) $\oint\limits_{|z+1|=0,5} \dfrac{z(e^z-e^{-z})}{z+1}dz$

Задача 7. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\sin^2 t\,dt}{4+\sqrt{5}\cos t}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+6x+153}$ в) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}dx$

Задача 8. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y)=x^3-3xy^2-x$ и значению $f(0)=0$.

Задача 9. Найти изображение оригинала, заданного графически:



Задача 10. Решить задачу Коши операционным методом: $y''+7y=-5\cos 3t$, $y(0)=1$, $y'(0)=2\sqrt{7}$.

Задача 11. Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом: $\begin{cases} x'=-y-2x+\sin t, & x(0)=0 \\ y'=2y+4x+\cos t, & y(0)=0 \end{cases}$