**Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»
в г. Смоленске**

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Направление подготовки: 09.03.03 «Прикладная информатика»

Профиль: «Прикладная информатика в топливно-энергетическом комплексе»

Уровень высшего образования: бакалавриат

Нормативный срок обучения: 4 года

Форма обучения: очная

Год набора: 2023

Смоленск

Методические материалы составил:
ст. преподаватель кафедры

«Высшая математика» ______________ Ю.Е. Волкова
«20» _____января____ 2023 г.
Заведующий кафедрой «Высшая математика»:

______________ Бобков Владимир Иванович
подпись ФИО

«08» февраля 2023 г.

Согласовано:

Заведующий кафедрой информационных технологий в экономике и управлении:

_______________________ __д-р техн. наук, проф._М.И. Дли_______________
подпись ФИО

«08» февраля 2023 г.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1. Определители и их свойства

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется матрицей?
2. Какие матрицы называются равными?
3. Какая матрица называется единичной, треугольной, нулевой, диагональной, скалярной?
4. Дана матрица $B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{pmatrix}$. К какому виду она принадлежит?
5. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -11 \end{pmatrix}$. Что понимается под операцией транспонирования матрицы?

Найдите A^T, M_{22}, A_{32}.

6. Перечислите свойства определителей.
7. Сформулируйте теорему о разложении определителя по элементам строки и столбца.

Практические задания

1. Вычислите определители второго порядка:

1.1 $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$. 1.2 $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$. 1.3 $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Раскройте определители, используя свойства, правило треугольников, теорему о разложении определителя по элементам строки, столбца или приведение определителя к треугольному виду:

2.1 $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$. 2.2 $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 2 \\ -4 & 1 & 5 \\ 3 & -8 & 7 \end{vmatrix}$. 2.3 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$. 2.4 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2.5 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$. 2.6 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}$. 2.7 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}$. 2.8 $\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

3. Вычислите определители:

3.1 $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$. 3.2 $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$. 3.3 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Решите уравнения и неравенство:

4.1 $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$. 4.2 $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$. 4.3 $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислите определители матриц тремя способами (по правилу треугольника, разложением по строке или столбцу и приведением определителя к треугольному виду):

1.1 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.   1.2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.   1.3 $\begin{vmatrix} 6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2.Вычислите определители:

2.1 $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.   2.2 $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.   2.3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Решите неравенство: $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0 \cdot$

4. Вычислите определитель: $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Матрицы, действия над ними. Обратная матрица.

Вопросы для самоконтроля

1. Можно ли сложить прямоугольную и квадратную матрицы? Можно ли из одной матрицы вычесть другую? Каким условиям должны удовлетворять при этом матрицы?
2. Сформулируйте переместительный и сочетательный закон для операции сложения матриц.
3. Можем ли мы перемножить матрицы размеров 3×4 и 4×2?
4. Какими свойствами обладает операция умножения матриц?
5. Какая матрица называется обратной для квадратной матрицы A?
6. Сформулируйте алгоритм нахождения обратной матрицы.

Практические задания

1. Дано $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите $A+B$, $A+C$, $2A$, $3A-2B$, $A \cdot B$, $A \cdot C$.

2. Перемножьте матрицы:

2.1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.   2.2 $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 2.3 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найдите обратную матрицу:

3.1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 3.2 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 3.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 3.4 $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Решите матричное уравнение:

4.1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. 4.3 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

4.2 $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. 4.4 $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислите:

1.1 $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. 1.2 $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. 1.3 $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1.4 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$. 1.5 AB-BA, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. При каких значениях λ матрица $A = \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ не имеет обратной?

3. Найдите обратные для следующих матриц:

3.1 $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. 3.2 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 3.3 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

5. Вычислите значение функции $g(x) = x^2 - 3x + 2x^{-1} - x^{-2}$ при x=A, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2.
Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Формулы Крамера. Однородные системы линейных алгебраических уравнений.

Вопросы для самоконтроля

1. Запишите формулы Крамера, при помощи которых можно решить систему линейных уравнений.
2. Какую систему линейных уравнений можно решать при помощи обратной матрицы?
3. Опишите метод Гаусса.

Практические задания

1. Решите системы по формулам Крамера:

1.1 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$ 1.2 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$ 1.3 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

1.4 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0. \end{cases}$ 1.5 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

2. Решите системы методом Гаусса:

2.1 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$ 2.3 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$

3. Решите системы матричным методом (методом обратной матрицы):

3.1 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$ 3.2 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 + 6 = 0, \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$

Задания для самостоятельного решения

1. Решите системы по формулам Крамера и матричным методом:

1.1 $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$ 1.2 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

2. Решите системы методом Гаусса:

2.1 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3.

Векторы, действия над ними. Скалярное, векторное, смешанное произведения и их свойства

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение понятию вектор.
2. Какие действия можно производить над векторами?
3. Что такое скалярное произведение двух векторов?
4. Как найти скалярное произведение двух векторов, заданных координатами?
5. Что называют векторным произведением двух векторов?
6. Как найти координаты векторного произведения, зная координаты векторов сомножителей?
7. Каков геометрический смысл модуля векторного произведения неколлинеарных векторов?
8. Как найти смешанное произведение векторов, заданных координатами?
9. Каков геометрический смысл смешанного произведения некомпланарных векторов?

Практические задания

1. Даны векторы $\vec{a}(2,-1,-2), \vec{b}(8,-4,0)$. Найдите

а) $\vec{c} = 2\vec{a}, \vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ б) длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ в) скалярный квадрат вектора $\vec{d}$

г) скалярное произведение векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ д) угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$

2. Постройте параллелограмм на векторах $\overrightarrow{OA}(1,1,0)$ и $\overrightarrow{OB}(0,-3,1)$ и определите координаты векторов $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{AB}$, найдите их длины.

3. Найдите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(2,1,0), \vec{b}(0,-2,1)$

4. В базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ заданы векторы $\vec{a}_1(1,1,0), \vec{a}_2(1,-1,0), \vec{a}_3(-3,5,-6)$. Покажите, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образуют базис.

5. По условию предыдущей задачи вектор $\vec{b}(4,-4,5)$, заданный в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, выразите в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

6. Заданы векторы $\vec{a}_1(3,-1,2), \vec{a}_2(1,2,-1)$. Найдите координаты векторов:

а) $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ б) $(2\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{a}_2$ в) $(2\vec{a}_1 - \vec{a}_2) \times (2\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$

7. Определите, при каких значениях α и β вектор $\alpha\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ будет коллинеарен вектору $\vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{a}(3,-1,1), \vec{b}(1,2,0)$.

8. Вычислите площадь треугольника с вершинами A (1,1,1), B (2,3,4), C (4,3,2).

9. В треугольнике с вершинами A (1,-1,2), B (5,-6,2), C (1,3,-1) найдите высоту BD.

10. Найдите вектор $(\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})) + (\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}))$, если $\vec{a}(2,1,-3), \vec{b}(1,-1,1)$.

11. Проверьте, компланарны ли данные векторы:

а) $\vec{a}_1(-2,1,1), \vec{a}_2(1,-2,3), \vec{a}_3(14,-13,7)$ б) $\vec{a}_1(2,1,-3), \vec{a}_2(3,-2,2), \vec{a}_3(1,-4,1)$.

12. Докажите, что четыре точки A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1), D(2,1,3) лежат в одной плоскости.

13. Вычислите *V* тетраэдра *OABC*, если $\overrightarrow{OA}(3,4,0)$, $\overrightarrow{OB}(0,-3,1)$, $\overrightarrow{OC}(2,0,5)$

Задания для самостоятельного решения

1. Даны векторы $\vec{a}(4,-2,4), \vec{b}(4,-2,-4)$. Найдите угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$, если $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a}, \vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

2. Выясните, являются ли векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависимыми:

а) $\vec{a}_1(2,-1,3), \vec{a}_2(1,4,-1), \vec{a}_3(0,-9,5)$; б) $\vec{a}_1(1,2,0), \vec{a}_2(3,-1,1), \vec{a}_3(0,1,1)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{b} = 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{c} = \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис линейного пространства. Докажите, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис. Найдите координаты вектора $\vec{d} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

4. Найдите вектор $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \times (\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AB})$, если A(2,2,3), B(1,0,4), C(2,3,5).

5. При каком значении λ векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ будут компланарны?

а) $\vec{a}_1(\lambda,3,1), \vec{a}_2(5,-1,2), \vec{a}_3(-1,5,4)$; б) $\vec{a}_1(1,2\lambda,1), \vec{a}_2(1,\lambda,0), \vec{a}_3(0,\lambda,1)$.

6. Найдите координаты четвертой вершины тетраэдра ABCD, если известно, что она лежит на оси Oy, а объем тетраэдра равен V:

A (-1,10,0), B(0,5,2), C(6,32,2), V=29

7. Найдите длину высоты тетраэдра ABCD, опущенную из вершины D, если A(2,31), B(4,1,-2), C(6,3,7), D(-5,-4,8).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4.
Взаимное расположение прямой и плоскости, смешанные задачи

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называют уравнением поверхности (линии) в пространстве?
2. Чем характеризуется уравнение плоскости (прямой) в пространстве?
3. Перечислите основные уравнения плоскости (прямой) в пространстве.
4. Как определить расстояние от точки до прямой (плоскости)?

Практические задания

1. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через точку *M(2,1,-1)*

а) перпендикулярно вектору $\vec{a}(1,-2,3)$,
б) параллельно плоскости *XOZ*,
в) перпендикулярно оси *Oy*,
г) параллельно плоскости $\alpha: 2x - y + 3z + 5 = 0$,
д) параллельно векторам $\vec{a}(0,1,2)$ и $\vec{b}(-1,0,4)$,
е) точку *N(2,3,-1)* параллельно вектору $\vec{b}(0,-1,2)$,
ж) через ось *Ox* и точку *M(4,-1,2)*.

2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 *(1,2,0)* и M_2 *(2,1,1)* перпендикулярно плоскости $-x + y - 1 = 0$.

3. Исследуйте взаимное расположение плоскостей. В случае их параллельности – найдите расстояние между плоскостями, в противном случае – косинус угла между ними.

а) $\alpha: -x + 2y - z + 1 = 0$ $\beta: y + 3z - 1 = 0$

б) $\alpha: 2x - y + z - 1 = 0$ $\beta: -4x + 2y - 2z - 1 = 0$

4. Напишите каноническое уравнение прямой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

5. Напишите каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M_0 (2,0,-3) параллельно:

а) вектору $\vec{q}(2,-3,5)$; б) прямой $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+3}{5}$; в) оси *Ox*;

г) оси Oz; д) прямой $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z - 3 = 0. \end{cases}$ е) прямой $\begin{cases} x = -2 + t, \\ y = 2t \\ z = 1 - \frac{1}{2}t. \end{cases}$

6. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M_1\ (1,-2,1)$ и $M_2\ (3,1,-1)$.

7. Заданы прямая $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ и точка $M\ (0,1,2) \notin l$. Требуется

а) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую l и точку M;
б) написать уравнение плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярно прямой l;
в) написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l;
г) расстояние от точки M до прямой l.

8. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $x - 3y + 2z + 1 = 0$ с прямыми $\frac{x-5}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ и $\frac{x-3}{4} = \frac{y+4}{-6} = \frac{z-5}{2}$

9. Определите угол между прямой $\begin{cases} õ + y + z - 2 = 0, \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ и плоскостью, проходящей через точки *A (2,3,-1), B(1,1,0), C(0,-2,1).*

10. Найдите проекцию точки $P(5,2,-1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

11. Найдите точку, симметричную точке $P(2,-1,3)$ относительно прямой $\begin{cases} õ = -3t, \\ y = 5t - 7, \\ z = 2t + 2. \end{cases}$

Задания для самостоятельного решения

1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1\ (0,1,1)$ и $M_2(2,0,1)$ перпендикулярно плоскости $2x - y + z + 1 = 0$.

2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1\ (1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$ параллельно вектору $\vec{a}(3,0,1)$.

3. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1\ (1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$ и $M_3(3,0,1)$.

4. Исследуйте взаимное расположение плоскостей. В случае их параллельности – найдите расстояние между плоскостями, в противном случае – косинус угла между ними.

а) $\alpha: x - y + 1 = 0$ $\beta: y - z + 1 = 0$;

б) $\alpha: 2x - y - z + 1 = 0$ $\beta: -4x + 2y + 2z - 2 = 0$.

5. Заданы плоскость $\alpha: x + y - z + 1 = 0$ и прямая $l: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, причем $l \notin \alpha$. Требуется:

а) вычислить $\sin(\alpha, l)$ и координаты точки пересечения прямой и плоскости;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую l перпендикулярно плоскости α.

6. Докажите, что прямые $l: \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0. \end{cases}$ и $m: \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ параллельны и найдите расстояние между этими прямыми.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5.
Кривые и поверхности второго порядка

Вопросы для самоконтроля

1. Какие виды кривых второго порядка существуют?
2. Дайте определение эллипса, гиперболы, параболы.
3. Какие виды поверхностей второго порядка вы знаете?

Практические задания

1. Изобразите кривые второго порядка:

1.1 $4x^2+9y^2=16$. 1.2 $x^2-9y^2=-9$. 1.3 $y^2=-4x$. 1.4 $x^2+2x+y^2-4y=4$.

2. Определите вид поверхностей и изобразите их на чертеже:

2.1 $4x^2+y^2+4z^2=16$. 2.3 $x^2+z^2=-y$. 2.5 $x+z=3$.

2.2 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}-z^2=-1$. 2.4 $x^2+2z^2=1$. 2.6 $4x^2+y^2-z^2=0$.

3. Нарисуйте тело, ограниченное поверхностями $\begin{cases} y=x^2 \\ \dfrac{x}{4}+y+2z=4 \\ z=0 \end{cases}$.

4. Найдите проекцию линии пересечения поверхностей $\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y=z \end{cases}$ на плоскость *XoY*.

Задания для самостоятельного решения

1. Изобразите тело, ограниченное поверхностями:

1.1 $\begin{cases} 2-z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2=z^2 \\ z\ge 0 \end{cases}$ 1.2 $\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ x^2+y^2=z \\ z=0 \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6.
Предел функции в точке, на бесконечности. Замечательные пределы. Нахождение пределов с помощью эквивалентных бесконечно малых

Предел функции в точке, на бесконечности

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определения
а) функции;
б) области определения и области значений функции;
в) четной и нечетной функции.
Приведите примеры.
2. Сформулируйте определения предела функции в точке и его геометрический смысл.
3. Сформулируйте определения (на «языке $\varepsilon-\delta$»), выраженные равенствами: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=11$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$. Сделайте рисунок.
4. Перечислите основные теоремы о пределах.
5. Сформулируйте определение функции, непрерывной в точке.

Практические задания

1. Постройте график функции и на чертеже покажите значение предела в точке, в бесконечности.

1.1 $\lim\limits_{x\to 10} \lg x = 1$.

1.2 $f(x) = \begin{cases} x^2, если\ x \neq 2, \\ 5, если\ x = 2. \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

1.3 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

1.4 $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1$.

2. Вычислите предел функции $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2 + 2x + 4}{x + 3}$, используя теоремы о пределах.

3. Вычислите пределы функции в точке:

3.1 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^2 - 6x + 8}$.

3.2 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

3.3 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^3 - 5x + 4}$.

3.4 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^5 - 1}$.

3.5 $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x^2 - 9}$.

3.6 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

3.7 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt{3x-2} - 1}$.

3.8 $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x^2} - 16}$.

4. Вычислите пределы функции в бесконечности:

4.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3 - 2}{3 - 2x + 5x^3}$.

4.2 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^4 + 3}{5x^6 + 1}$.

4.3 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4 + 1}{x^3 + 2}$.

4.4 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2 + \sqrt{x^3 + 1}}{3x + \sqrt{x^6 + 4}}$.

4.5 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + 2\sqrt{3x^4 + 5}}{3x^2 + 1}$.

4.6 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{5x^2 + 1} + 3\sqrt[5]{x^3 + 2}}{\sqrt[9]{x^7 + 2} + 2\sqrt[5]{x^6 + 1}}$.

4.7 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + 1} + 3\sqrt{x^2 + 2}}$.

4.8 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-2)(2x-3)}{x(7-2x)}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислите пределы функции в точке:

1.1 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$.

1.2 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right)$.

1.3 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$.

1.4 $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$.

1.5 $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$.

1.6 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$.

- 1.7

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{7 + x^3} - \sqrt{3 + x^2}}{x - 1}$.

-
-

2. Вычислите пределы функции в бесконечности:

- 2.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$.
- 2.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$.
- 2.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$.
-

Замечательные пределы

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение бесконечно малой и бесконечно большой функций. Перечислите их свойства. Какова связь между ними?
2. Запишите первый и второй замечательные пределы.

Практические задания

1. Вычислите пределы функций:

1.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3\sqrt{2x^4+5}}{7x^2+\sqrt{x}}$.

1.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^3+2}}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$.

1.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{2x^5+3}}{(5x^2+1)\sqrt{x+2}}$.

1.4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}+3\sqrt{x^2+3}}$.

1.5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-5})$.

1.6 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} arctgx$.

1.7 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt[3]{x^3+x^2})$.

1.8 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^x$.

1.9 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

2. Используя замечательные пределы, вычислите:

2.1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

2.2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{tg2x}$.

2.3 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg3x}{\sin 2x}$.

2.4 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

2.9 $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

2.10 $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin 2x)^{\frac{5}{\sin 2x}}$.

2.11 $\lim\limits_{x\to0}(1+tg^2x)^{\frac{2}{x^2}}$.

2.12 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 2x}{tg3x}\right)^{x+2}$.

2.5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}$.

2.6 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}$.

2.7 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{tg(x-3)}{x^2-4x+3}$.

2.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

2.13 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+x^2\right)^{\frac{1}{2x^2}}$.

2.14 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+3x}{2+x}\right)^{\frac{3}{x}}$.

2.15 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{3x+2}$.

2.16 $\lim\limits_{x\to \infty}x^2 tg\dfrac{1}{x^2}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислите пределы функций:

1. 1. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

1. 2. $\lim\limits_{x\to \infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$.

1. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{\sin 5x}$.

1. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

1. 5. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

1. 6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

1. 7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$.

1. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

Нахождение пределов с помощью эквивалентных бесконечно малых

Вопросы для самоконтроля

1. Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными?
2. Сформулируйте теорему о замене бесконечно малых эквивалентными при нахождении пределов.
3. Запишите таблицу эквивалентных бесконечно малых.

Практические задания

1. Вычислите пределы функций:

1.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,5x^2}{\sin x^2}$.

1.3 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

1.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+5}{3x^2+1}\right)^{2x^2}$.

1.4 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$.

2. Вычислите с помощью эквивалентных бесконечно малых:

2.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{e^{5x}-1}$.

2.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtg5x}{1-\cos x}$.

2.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 arctg3x}{\sqrt{1+2x^3}-1}$.

2.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7xtgx}{e^{x^2}-1}$.

2.5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos x}$.

2.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(tg5x)}{2^{\sin 3x}-1}$.

2.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\ln(1+\frac{x}{2})}$.

2.8 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\ln x}$.

2.9 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$.

2.10 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$.

2.11 $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x\sin\dfrac{1}{2^x}$.

3. Вычислите пределы степенно-показательных функций:

3.1 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos 3x)^{\frac{x^2+1}{3+x}}$.

3.2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{\sin^4 x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

3.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{2x+4}\right)^{\frac{1}{x}}$.

3.4 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 5x)^{\frac{1}{8x}}$.

3.5 $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2 2x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

3.6 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2x^2}}$.

3.7 $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x+3}-1)^{\frac{1}{x-1}}$.

3.8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+x+1}{3x^2+2}\right)^{2x+1}$.

3.9 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+2}{3x-2}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислите пределы:

1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

1. 2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

1. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$.

1. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$.

1. 5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x}-e}{x-1}$.

1. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

1. 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5+x)-\ln 5}{x}$.

1. 8. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7.
Непрерывность функции в точке. Точки разрыва функции

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение предела числовой последовательности и его геометрический смысл.
2. Сформулируйте определение левостороннего предела функции в точке.
3. Что представляют собой точки разрыва функции? Какова их классификация?

Практические задания

1. Вычислите пределы последовательностей:

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\sqrt{n^4+3}+3n^2}{n\sqrt{35n^3}}$.

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}\ arctg\,\dfrac{2}{n}}{\sqrt{3n+2}}$.

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{3^n}}{tg\,\dfrac{1}{2^n}}$.

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n+7}\right)^{5n+3}$.

1.5 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{5+n^2}-\sqrt{3+n^2})$.

1.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(3n)!}{(n+3)!(3n-2)!}$.

1.7 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{2n}{n^2+1}$.

1.8 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+5}\right)^{n^2+3}$.

2. Найдите односторонние пределы функции. Установите, является ли функция непрерывной или нет. Определите характер точки разрыва.

2.1 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-2}, x\neq 2,\\ 0, x=2\end{cases}$

2.4 $f(x)=\begin{cases} arctg\,\dfrac{1}{x}, x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases}$

2.2 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, x\neq 2,\\ 4, x=2\end{cases}$

2.5 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, x>2,\\ x+5, x\leq 2\end{cases}$

2.3 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin|x|}{x}, x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases}$

3. Найдите пределы:

3.1 $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{x}{x-3}$.

3.3 $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

3.2 $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{x}{x-3}$.

3.4 $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

4. Существует ли

4.1 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$?

4.2 $\lim\limits_{x\to 1} arctg\,\dfrac{1}{x-1}$?

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислите пределы последовательностей:

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$.

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$.

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

2. Исследуйте функцию на непрерывность и постройте ее график:

2.1 $f(x)=\dfrac{1}{x-|x|}$.

2.2 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3}, x>-3,\\ -x^2, x\leq -3\end{cases}$

3. Выполнение заданий расчетно-графической работы по теме.
4. Подготовка к контрольной работе.

Примерный вариант контрольной работы по теме

1. Вычислите предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{7n}-\sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$.

2. Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$, б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1+\cos(x-3\pi)}$, г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{3x}}{\sin 3x-tg2x}$, д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+8}{x-2})^x$.

3. Если функция имеет предел в точке, следует ли отсюда, что она непрерывна в этой точке? Почему?
4. Исследуйте функцию на непрерывность и постройте ее график

$$y=\begin{cases} x^2, x\ge 2 \\ \dfrac{1}{x-2}, x<2 \end{cases}.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8.
Производная, её геометрический смысл. Таблица производных. Дифференцирование сложных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков

Производная, её геометрический смысл. Таблица производных.
Вопросы для самоконтроля

1. Что называют производной функции в точке?
2. Каков геометрический, физический и экономический смысл производной функции в точке x_0 ?
3. Запишите уравнения касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке x_0.
4. Какова связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции в точке?
5. Сформулируйте основные правила дифференцирования функций.
6. Дайте определение дифференциала функции в точке.

Практические задания

1. Исходя из определения производной, найдите $f'(x)$, если

а) $f(x)=e^{3x}$, б) $f(x)=e^{x^2}$.

2. Покажите, что функция $y=f(x)$ не имеет производной в точке $x_0=0$. Постройте график функции. Выясните, как отразится на графике отсутствие производной в точке $x_0=0$. Будет ли график функции непрерывен в точке $x_0=0$?

а) $f(x)=2x+|x|$, б) $f(x)=|arctgx|$.

3. Составьте уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ с абсциссой $x_0=1$, если

а) $f(x)=e^{3x}$, б) $f(x)=e^{x^2}$.

4. Составьте уравнение касательной, проведенной к параболе $y=x^2-3x+5$ параллельно прямой $3x-y+4=0$.

5. Составьте уравнение касательной и нормали, проведенных к кривой $f(x)=x^3$ в точке с абсциссой 2.
6. Найдите производные и дифференциалы функций:

6.1 $y = 3x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$.

6.2 $y = x^2 \log_4 x$.

6.3 $y = e^x (x^2 + \sqrt{x} - 1)$.

6.4 $y = \ln x \cdot tgx - \ln a \cdot \log_a x$.

6.5 $y = (\pi + e) \cdot e^x \cdot \ln x$.

6.6 $y = \dfrac{3\ln x}{x}$.

6.7 $y = 2\ln x - \dfrac{3}{x^2}$.

6.8 $y = \dfrac{2^x}{\ln 2}(\ln x - \dfrac{1}{x})$.

6.9 $y = \dfrac{x \cdot arctgx}{1 + x^2}$.

6.10 $y = \left(\sqrt[5]{x^3} + \dfrac{3}{x^4}\right)\left(\sqrt[7]{x} + 3\right)$.

6.11 $y = \dfrac{x^3 + 5\sin x}{x^5 + 3\cos x}$.

6.12 $y = \sin 3 \cdot 5^x$.

6.13 $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{x^5}\right)e^x$.

6.14 $y = \dfrac{x\ln x}{7x + tgx}$.

Найти производную функции в точке x_0:

7.1 $y = 3\arcsin x - 4\sqrt{x}$, $x_0=0$.

7.2 $y = e^x \cos x$, $x_0=\pi$.

7.3 $y = e^x \cdot tgx$, $x_0=0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Исходя из определения производной, найдите $f'(x)$, если $f(x) = \sin x$
2. В каких точках линии $y = x^3 + x - 2$ касательная к ней параллельна прямой $y = 4x - 1$?
3. Найдите производные и дифференциалы функций:

3.1 $y = \dfrac{x^2 + 1}{3(x^2 - 1)} + (x^2 - 1)(1 - x)$.

3.2 $y = (\sqrt[3]{x} + 2x)(1 + \sqrt[3]{x^2} + 3x)$.

3.3 $y = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$.

3.4 $y = \dfrac{x\sin x}{1 + tgx}$.

3.5 $y = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.

3.6 $y = \dfrac{x - 1}{\log_2 x}$.

3.7 $y = \dfrac{x^3 + 2^x}{e^x}$.

3.8 $y = xe^x(\cos x + \sin x)$.

4. Найти производную функции в точке x_0:

4.1 $y = \pi x^2 - \arccos x$, $x_0=1$.

4.2 $y = \dfrac{x-1}{5x-2}$, $x_0=1$.

4.3 $y = \dfrac{e^x}{x^2}$, $x_0=1$.

Дифференцирование сложных функций. Логарифмическое дифференцирование

Вопросы для самоконтроля

Дайте определение сложной функции.
Сформулируйте теорему о производной сложной функции.
Что называют логарифмической производной функции $y(x)$? Каков ее экономический смысл?
Какова формула логарифмического дифференцирования, и в каких случаях ее применяют?
Дайте определение производной второго (третьего, n-го) порядка.
По какой формуле вычисляется дифференциал n-го порядка для функции $f(x)$ **?**

Практические задания

1. Найдите производные и дифференциалы функций:

1.1 $y = \ln(\dfrac{x}{2}+3)$.

1.2 $y = \dfrac{1}{5} tg^5 x - \cos 5x$.

1.3 $y = x^4 \ln\sin 7x$.

1.4 $y = \ln^3 \ln(x^2+1)$.

1.5 $y = \sqrt{3} arctg^3 \dfrac{x}{3}$.

1.6 $y = e^{tg 5x} + 7\sin^3 \dfrac{x}{5}$.

1.7 $y = \dfrac{\sin x^7}{\sin^7 x}$.

1.8 $y = \dfrac{3x-2}{4} \cdot 2^{\sqrt{1-e^{-x}}}$.

1.9 $y = \ln tg^2 x$.

1.10 $y = arctg^5 (\dfrac{x^3 + \sin 3x}{x})$.

1.11 $y = \sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3+\sqrt{x}}\right)^2}$.

1.12 $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$, где $\varphi(x), \psi(x) - \textit{дифференцируемые функции}$.

1.13 $y = f(\sin^2 x)$, где $f(x) - \textit{дифференцируемая функция}$.

2. Найдите производные и дифференциалы функций:

2.1 $y = \dfrac{(x-9)^3 \cdot \sqrt[5]{x-1} \cdot \sin^2 x}{(3x-7)^2 \sqrt{x^4+3}}$.

2.2 $y = (3x^4+1)^{\sin^5(x^2+1)}$.

2.4 $y = x^{e^{arctgx}}$.

2.5 $y = 2^{x^x}$.

2.3 $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{\arcsin^3 x}$.

3. Найти y''', если $y = xe^{x^2}$.

4. Найти выражения для производных n-го порядка

4.1 $y = \ln(x - a)$. 4.2 $y = e^{ax}$.

5. Точка движется прямолинейно, причем расстояние, пройденное ею, задается формулой $s(t) = t^4 - 3t^2 + 2t$. Найдите формулу для ускорения точки в момент времени t.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите производные и дифференциалы функций:

1.1 $y = tg^3 x$.

1.2 $y = 2^{x^2}$.

1.3 $y = e^{-x} + \ln(x^3 + 2x) - 3\sin\dfrac{2}{x^2}$.

1.4 $y = \sqrt[7]{\left(\dfrac{x^5 + 2}{x^5 - 2} \right)^5}$.

1.5 $y = \dfrac{\cos^3 5x}{\sin 3x}$.

1.6 $y = \sqrt[5]{x^2 + \sqrt{x}}$.

1.7 $y = \ln\cos\sqrt{3}$.

1.8 $y = x^{\sin x}$.

1.9 $y = x^3 e^{x^2} \sin 2x$.

1.10 $y = \dfrac{(1 - x^2)e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}$.

2. Найдите y'', если $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Найдите выражение для производной n-го порядка функции $y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$.

Производные высших порядков

Вопросы для самоконтроля

Повторите определения производных и дифференциалов высших порядков.
Запишите формулу Лейбница.
Дайте определение функции, заданной неявно. Как находят производные функций, заданных неявно?
Дайте определение функции, заданной параметрически. По каким формулам находятся производные функций, заданных параметрически.
Сформулируйте правило Лопиталя. При раскрытии каких неопределенностей оно может быть использовано?

Практические задания

1. Найдите $y^{(12)}$, если $y = \ln(x^2 - 4)$.
2. Найдите $y^{(10)}$, если $y = x^3 \cos x$.

3. Найдите d^2y, если $y = \arcsin x$.

4. Найдите d^9y, если $y = 2^{3x-2}$.

5. Найдите $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, если:

5.1 $\begin{cases} x = t^3 + 3t, \\ y = \sin 3t \end{cases}$. 5.2 $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = arctgt \end{cases}$. 5.3 $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t \end{cases}$. 5.4 $x^2 + y^2 = 1$.

6. Вычислите пределы:

6.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x - \sin x}{e^{tg2x} - 1}$.

6.2 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos x - \sin x}{1 - 2\sin(\frac{2}{3}x)}$.

6.3 $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{\ln(2n^3 - 1)}{\ln(n^3 + 1)}$.

6.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 5x}$.

6.5 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

6.6 $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[x]{x}$.

6.7 $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$.

6.8 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Примените формулу Лейбница для вычисления производной $\left((x^2+1)\sin x\right)^{(20)}$.

2. Найдите $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1 - t^2) \end{cases}$.

3. Найдите d^3y, если $y = \sin^2 x$.

4. Вычислите пределы:

4.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - arctgx}{x^3}$.

4.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

4.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

4.5 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$.

4.6 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9.
Исследование функций и построение графиков

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные свойства функции и укажите их геометрический смысл (область определения, область значений, асимптоты, нули функции, интервалы знакопостоянства, монотонность, четность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба).
2. По каким формулам находятся асимптоты графика функций?
3. Сформулируйте:
а) достаточное условие монотонности функции на интервале *(a;b)*;
б) достаточные условия экстремума функции в точке x_0;
в) достаточные условия выпуклости (вогнутости) функции на интервале *(a;b)*;
г) достаточные условия точек перегиба.

Практические задания

1. Найдите вертикальные и невертикальные асимптоты кривых:

1.1 $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. 1.2 $y = \frac{1}{1 - e^x}$. 1.3 $y = \frac{x}{e^x}$. 1.4 $y = \ln\frac{x}{x-3}$.

2. Проведите полное исследование и постройте график функции:

2.1 $y = \frac{x^3}{2(x-2)^2}$. 2.3 $y = \frac{x}{\ln x}$. 2.5 $y = x \sin x$.

2.2 $y = \frac{x^2}{e^x}$. 2.4 $y = x^3 e^{-x}$. 2.6 $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Проведите полное исследование и постройте график функции:

1.1 $y = \frac{2x - 1}{(x-1)^2}$. 1.3 $y = \ln(x^2 + 1)$.

1.2 $y = \frac{e^x}{x}$. 1.4 $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

2. Выполнение заданий расчетно-графической работы
подготовка к контрольной работе по теме

Примерный вариант контрольной работы

1. Найдите производную заданной функции в точке x_0=1:

а) $y = \operatorname{arctg}\frac{x^2 - 1}{x}$. б) $y = x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$.

2. Найти производную y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$.

3.Найдите вторую производную функции $y = \frac{1}{1 + x^3}$.

4. Найдите выражение для производной n-го порядка функции $y = \frac{4}{x}$.

5. Исследуйте функцию и постройте ее график $y = \dfrac{3x-2}{x^3}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10.
Таблица неопределенных интегралов. Интегрирование простейших функций

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$. Каково основное свойство первообразной?
2. Дайте определение неопределенного интеграла от функции $f(x)$. Каков геометрический смысл неопределенного интеграла?
3. Для всякой ли функции существует неопределенный интеграл?
4. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
5. В чем заключается свойство инвариантности формул интегрирования?

Практические задания

1. Найдите интегралы:

1.1 $\int (2 \cdot \sqrt[3]{x} + \dfrac{5}{x^6})dx$.

1.2 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{7-x^2}}$.

1.3 $\int \dfrac{dx}{x^2+5}$.

1.4 $\int tg^2 x dx$.

1.5 $\int \dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx$.

2. Найдите интегралы, используя свойство инвариантности формул интегрирования:

2.1 $\int \sin(x^2+1)d(x^2+1)$.

2.2 $\int \cos(\ln x)d(\ln x)$.

2.3 $\int a^{tgx} d(tgx)$.

2.4 $\int \sin\dfrac{3}{5}xdx$.

2.5 $\int \dfrac{dx}{7x+3}$.

2.6 $\int (3x+2)^{15} dx$.

2.7 $\int \sqrt[3]{5x+1}dx$.

2.11 $\int \dfrac{xdx}{\sqrt[3]{2x^2+3}}$.

2.12 $\int \dfrac{e^x dx}{e^x+1}$.

2.13 $\int \dfrac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$.

2.14 $\int \dfrac{3x+2}{x^2+3} dx$.

2.15 $\int \dfrac{\sqrt{\ln x+2}}{x} dx$.

2.16 $\int \dfrac{xdx}{\cos^2 x^2}$.

2.17 $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

2.8 $\int x^2 e^{x^3} dx$.

2.9 $\int \sin^5 x \cos x dx$.

2.10 $\int x^3 \cdot \sqrt[5]{2x^4+1} dx$.

2.18 $\int \frac{2x+\sin x}{x^2-\cos x} dx$.

2.19 $\int \frac{x+(arctgx)^2}{1+x^2} dx$.

2.20 $\int \frac{x^4+1}{x^5+5x+1} dx$.

3. Найдите интегралы выделением полного квадрата:

3.1 $\int \frac{dx}{x^2+2x+9}$.

3.2 $\int \frac{dx}{x^2-3x+7}$.

4. Найдите интегралы выделением целой части:

4.1 $\int \frac{2x+3}{x-1} dx$.

4.2 $\int \frac{x^3}{x-2} dx$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите интегралы:

1.1 $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3} dx$.

1.2 $\int ctg^2 x dx$.

1.3 $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx$.

1.4 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

1.5 $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.

1.6 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

1.7 $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4} dx$.

1.8 $\int \frac{3x-1}{x^2+9} dx$.

1.9 $\int \frac{2x-1}{x-2} dx$.

1.10 $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 11
Интегрирование рациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование иррациональных функций

Интегрирование рациональных функций
Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение рациональной дроби. Какую рациональную дробь называют правильной?
2. Какие рациональные дроби называют простейшими?
3. Опишите способ представления правильной рациональной дроби в виде суммы простейших дробей.
4. Изучите методы интегрирования простейших дробей.
5. Какова общая схема интегрирования рациональной дроби?

Практические задания

1. Представьте в виде суммы элементарных дробей:

1.1 $\dfrac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^3(x+1)(x^2 - 4x + 7)}$.

1.2 $\dfrac{x^2 + x + 3}{(x-2)^2(x-3)(x^2+4)^2}$.

2. Найдите интегралы:

2.1 $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^4 + 8}{x^3 - 4x} dx$.

2.2 $\displaystyle\int \frac{x}{x^3 - 1} dx$.

2.3 $\displaystyle\int \frac{(3x+2)dx}{x^2 - 4x + 10}$.

2.4 $\displaystyle\int \frac{3x^3 + 3x^2 + 4}{x^2(x^2+4)} dx$.

3. Найдите интеграл $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2 - 2x + 6)^2} dx$, используя рекуррентную формулу

4. Покажите, что интегралы вида $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ можно находить следующим образом

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{1}{a(b^2 - a^2)} arctg\,\frac{x}{a} - \frac{1}{b(b^2 - a^2)} arctg\,\frac{x}{b} + C.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите интегралы:

1.1 $\displaystyle\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$.

1.2 $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx$.

1.3 $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{1 - x^4}$.

1.4 $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 12}{(x^2 - 6x + 13)^2} dx$.

Интегрирование тригонометрических функций

Вопросы для самоконтроля

1. Запишите универсальную тригонометрическую подстановку. В каких случаях она применяется?
2. В каких случаях можно применять подстановки $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = tgx$?

Практические задания

1. Найдите интегралы:

1.1 $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x}$.

1.6 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

1.2 $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + 3} dx$.

1.3 $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin x}$.

1.4 $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$.

1.5 $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$.

1.7 $\int \frac{dx}{\sin x}$.

1.8 $\int \frac{dx}{\cos x}$.

1.9 $\int \frac{dx}{\sin x}$.

1.10 $\int \sin 4x \cdot \cos \frac{x}{3} dx$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите интегралы:

1.1 $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x}$.

1.2 $\int tg^5 x dx$.

1.3 $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$.

1.4 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + tg^2 x}$.

Интегрирование иррациональных функций

Вопросы для самоконтроля

1. Укажите, какими подстановками рационализируются интегралы, относящиеся к:
а) классу дробно-линейных иррациональностей;
б) классу квадратичных иррациональностей;
в) классу дифференциальных биномов (опишите, что представляют собой эти классы).

Практические задания

1. Найдите интегралы:

1.1 $\int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1-\sqrt[6]{x-1})} dx$.

1.3 $\int \sqrt{\frac{x}{x-2}} \cdot \frac{dx}{x^2}$.

2. Укажите для следующих интегралов рационализующие подстановки:

2.1 $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[5]{1+x}} dx$.

2.2 $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} dx$.

3. Найдите интегралы:

3.1 $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{5 - x^2}}$.

3.4 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 4x + 1}}$.

3.2 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

3.3 $\int \frac{\sqrt{x^2-4}dx}{x^2}$.

3.5 $\int \sqrt{x^2-4x+11}dx$.

3.6 $\int \sqrt{5-6x-x^2}dx$.

4. Найдите интегралы:

4.1 $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx$. 4.2 $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. 4.3 $\int \frac{\sqrt[3]{2+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}dx$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите интегралы:

1.1 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$.

1.2 $\int \frac{x-5}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$.

1.3 $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$.

1.4 $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$.

1.5 $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^2}dx$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 12
Определенный интеграл и его приложения

Определенный интеграл
Вопросы для самоконтроля

1. Какую сумму называют интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$?
2. Сформулируйте определение определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. В чем заключается его геометрический смысл?
3. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
4. Сформулируйте теорему Ньютона-Лейбница.
5. Запишите формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.

Практические задания

1. Вычислите интегралы:

1.1 $\int_4^5 \frac{x+\sqrt[3]{\ln(x-3)}}{x-3}dx$.

1.2 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}dx$.

1.6 $\int_0^1 \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

1.7 $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x+3}dx$.

1.3 $\int\limits_{3}^{4} \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+10}} dx$.

1.4 $\int\limits_{0}^{1} xe^{5x} dx$.

1.5 $\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{x^4\sqrt{9-x^2}}$.

1.8 $\int\limits_{4}^{5} \frac{x+\sqrt[3]{\ln(x-3)}}{x-3} dx$.

1.9 $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1) dx$.

1.10 $\int\limits_{0}^{\pi} x^3 \sin x dx$.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислите интегралы:

1.1 $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^3 x}} dx$.

1.2 $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

1.3 $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.

1.4 $\int\limits_{3}^{8} \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$.

1.5 $\int\limits_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2} dx$.

Приложения определенного интеграла

Вопросы для самоконтроля

1. Запишите формулы для вычисления площадей плоских фигур, если граница области задана:
а) в декартовых прямоугольных координатах;
б) в полярной системе координат.

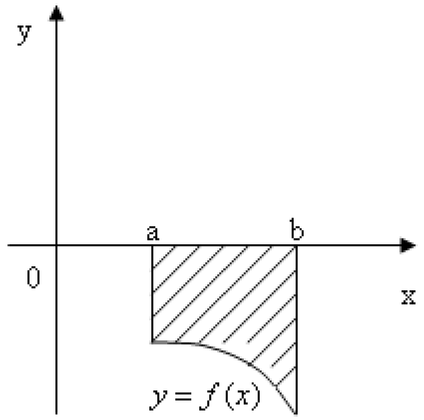
2. По какой формуле вычисляется объем тела вращения вокруг:
а) оси Ox;
б) оси Oy.

3. К какому интегралу сводится вычисление длины дуги кривой:
а) в декартовых координатах;
б) в полярной системе координат;
в) если кривая задана параметрически.

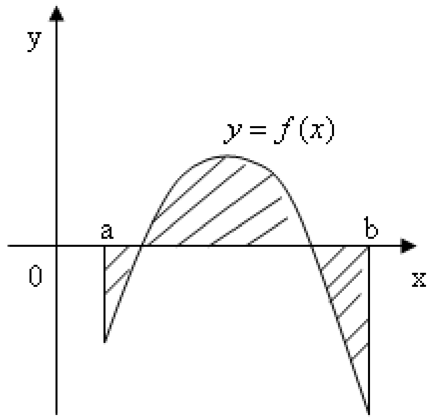
Практические задания

1. Выразите с помощью определенного интеграла площади следующих фигур:

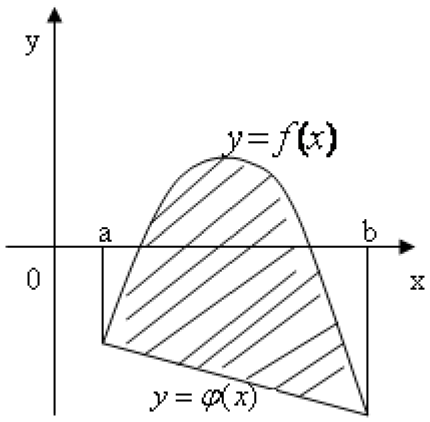
1.1



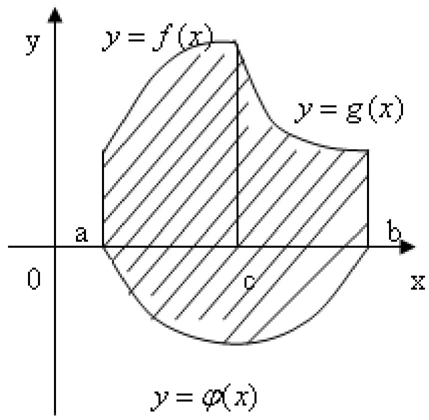
1.2



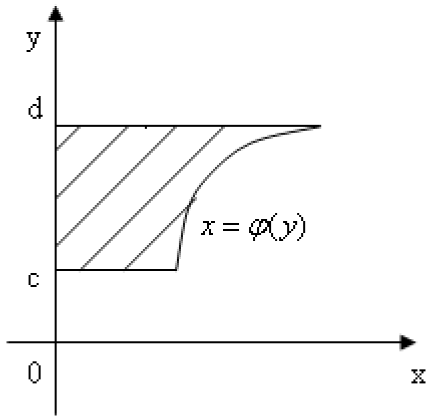
1.3



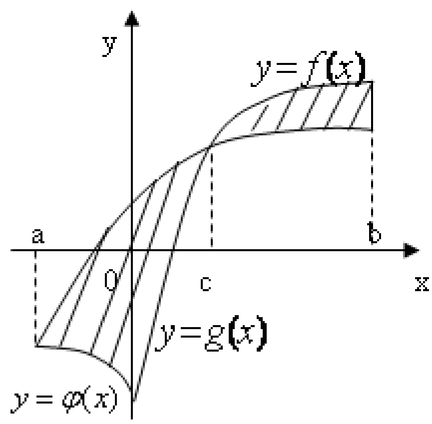
1.4



1.5



1.6



2. Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

2.1 $\begin{cases} y = 4x - x^2, \\ y = 4 - x. \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} y = x\sqrt{9 - x^2}, \\ y = 0 \end{cases}$ 2.3 $\begin{cases} y = \arcsin x, \\ y = \dfrac{\pi}{3}, y = \dfrac{\pi}{2}, y = 0 \end{cases}$

3. Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

3.1 $r = 3 + \cos 2\varphi$ 3.2 $r = \sin 2\varphi$ 3.3 $r = 4(1 + \cos\varphi)$

4. Найдите объем тел вращения (вращение вокруг оси Ox):

4.1 $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2, \\ y + x = 4 \end{cases}$ 4.2 $\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ y = e^x, \\ x = -1 \end{cases}$ 4.3 $\begin{cases} y = \sqrt{2x + 4}, \\ y = \sqrt{1 - x} \end{cases}$

5. Найдите объем тел вращения (вращение вокруг оси Oy):

5.1 $\begin{cases} y = \arccos\dfrac{x}{2}, \\ x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ 5.2 $\begin{cases} y = \ln x, \\ y = e, \\ y = 0 \end{cases}$ 5.3 $\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = 0 \end{cases}$

6. Найдите длины дуг кривых:

6.1 $y = e^x + 5, \quad 0 \le x \le \ln\sqrt{8}$

6.2 $y = 3 + \ln(x^2 - 1), \quad 2 \le x \le 3$

6.3 отсекаемой от кривой $y = x^2 + 1$ прямой $y = 2x + 1$

Задания для самостоятельного решения

1. Выполнение задания расчетно-графической работы по теме.
2. Подготовка к контрольной работе по теме.

Примерный вариант контрольной работы

1. Формула Ньютона-Лейбница.
2. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле
3. Найдите интегралы

3.1 $\int x^2\sqrt{2x^3 + 7}dx$.

3.2 $\int x \ \ln(x + 2)dx$.

3.3 $\int \sin^6 x \cos^3 x dx$.

3.4 $\int \dfrac{3x - 4}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}dx$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 3, y = 2x$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 13
Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными, однородные и линейные уравнения первого порядка.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Дайте определение решения дифференциального уравнения n-го порядка.
3. В чем состоит задача Коши для дифференциального уравнения?
4. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделенными переменными? с разделяющимися переменными?
5. Какое дифференциальное уравнение называется однородным относительно x и y? Каков общий метод решения такого уравнения?
6. Какое дифференциальное уравнение называется линейным? Каков общий метод решения такого уравнения?
7. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением Бернулли? Какие способы решения уравнений Бернулли вы знаете?

Практические задания

1. Найдите общее решение уравнения $3x\sqrt[3]{y} + (1-x^2)dy = 0$. Найдите его частное решение при $y(0) = 0$.

2. Найдите общее решение уравнения $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$.

3. Решите уравнение $2x(x^2 + y^2)y' = y(y^2 + 2x^2)$.

4. Решите уравнение $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

5. Найдите общий интеграл уравнения $(x + y - 3)dx - (x - y - 1)dy = 0$.

6. Найдите общее решение уравнения:

6.1 $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$,

6.2 $x\ln x y' + y = x^3(3\ln x - 1)$.

7. Найдите частное решение уравнения $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$ при $y(2) = 4$.

8. Решите уравнение $xy' + y = -2x^3y^2$.

9. Решите уравнение $xy' + y = y^2 \ln x$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите общее решение уравнения

1.1 $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$, 1.2 $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$.

2. Найдите решение задачи Коши:

2.1 $(1+x)dx + (1-y)xdy = 0$, если $y\big|_{x=1} = 2$, 2.2 $xy' + y - e^x = 0$, если $y\big|_{x=a} = b$.

Найдите общее решение уравнения $y' + 2xy = 2x^3 y^3$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 14
Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите виды дифференциальных уравнений высшего порядка, допускающих понижение порядка.
2. Каково общее решение дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x)$, где $f(x)$ - заданная на некотором интервале $(a;b)$ непрерывная функция?
3. Каким способом достигается понижение порядка дифференциального уравнения вида $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, ..., y^{(n-1)})$?
4. Каким способом достигается понижение порядка дифференциального уравнения вида $f(y, y', ..., y^n) = 0$?

Практические задания

1. Найдите общее решение уравнения $x^2 y''' = 1$. Решите для него задачу Коши при условиях: $y(1) = 0, y'(1) = 1, y''(1) = 2$.
2. Найдите общий интеграл уравнения:

2.1 $y'' - 2ctgxy' = \sin^3 x$,

2.2 $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$,

2.3 $xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$.

3. Найдите общее решение уравнения $(y')^2 + 2yy'' = 0$.
4. Найдите решение задачи Коши:

а) $y'' = 2\sin^3 y \cdot \cos y$, если $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$, $y'(1) = 1$.

б) $y^3 y'' = y^4 - 16$, если $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

5. Найдите общий интеграл уравнения $y'' tgy = 2(y')^2$.
6. Определите тип дифференциального уравнения и укажите прием решения:

6.1 $x^3 y' = y(x^2 + y^2)$,

6.2 $y\dfrac{dy}{dx} = \cos x(\sin x - y^2)$,

6.3 $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$,

6.4 $yy'' + (y')^2 = 1$,

6.5 $(x^2 + 1)y''' = (y'')^2$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите общее решение уравнения:

1.1 $y'' = \ln x$,

1.2 $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$,

1.3 $yy'' = (y')^2 - (y')^3$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ 156

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Структура общего решения. Метод вариации произвольных постоянных.

Вопросы для самоконтроля

1. Каков общий вид линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами n-го порядка?
2. Какова структура общего решения ЛОДУ n-го порядка?
3. Каков общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами n-го порядка?
4. Какова структура общего решения ЛНДУ n-го порядка?
5. В каком виде можно искать частное решение ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами, если правая часть уравнения имеет вид

а) $e^{\alpha x}P_m(x)$, б) $e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$?

Практические задания

1. Найдите общее решение уравнения

1.1 $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$,

1.2 $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$,

1.3 $y'' + 2y' + 2y = 0$,

1.4 $y''' + 4y'' + 13y' = 0$,

1.5 $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$,

1.6 $y^{(9)} + 2y^{(7)} + y^{(5)} = 0$.

2. Найдите решение задачи Коши для уравнения $y''' - 13y'' + 12y' = 0$,
если $y\big|_{x=0} = 7$, $y'\big|_{x=0} = 13$, $y''\big|_{x=0} = 15$.

3. Запишите общее решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами, если:

3.1 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 2$, $\lambda_5 = -3$,

3.2 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 1 + 2i$, $\lambda_4 = 1 - 2i$, $\lambda_5 = \lambda_6 = 5$,

3.3 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3 + i$, $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3 - i$, $\lambda_7 = 0$,

3.4 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2i$, $\lambda_5 = \lambda_6 = -2i$.

4. Найдите общее решение уравнения

4.1 $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$,

4.2 $y'' + y = 4\cos 2x$,

4.3 $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$.

5. Укажите вид общего решения уравнения:

5.1 $y'' - 2y' + 5y = x^2 e^x \sin 3x$,

5.2 $y''' + 2y'' = 3x^2 e^{-2x}$,

5.3 $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin x + xe^{2x} + 5x$,

5.4 $y''' + 9y' = 2x^2 e^x + 3\cos 3x$,

5.5 $y'' - 4y' + 8y = e^x(2\cos x - \sin x)$,

5.6 $y'' - 2y' = \cos^2 x$.

Задания для самостоятельного решения

1. Выполнение заданий расчетно-графической работы по теме «Дифференциальные уравнения».
2. Контрольная работа по теме «Дифференциальные уравнения»

Примерный вариант контрольной работы

1. ЛНДУ. Структура общего решения (теорема 1).
2. Дифференциальные уравнения первого порядка: линейные и уравнения Бернулли.
3. Найдите общее решение (общий интеграл):

3.1 $xy' + y = \ln x$,

3.2 $(1 + e^x)yy' = e^x$,

3.3 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{3x}$.

4. Укажите вид общего решения уравнения:

4.1 $y''-4y'+5y=2e^{2x}\cos x$,

4.2 $y'''-2y''=x$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 16

Числовые ряды, признаки сходимости. Степенные ряды, область сходимости.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется числовым рядом?
2. Какой ряд называется сходящимся (расходящимся)?
3. В чем состоит необходимый признак сходимости ряда?
4. Сформулируйте признаки сравнения знакоположительных рядов.
5. Сформулируйте признак Коши о сходимости ряда.
6. Сформулируйте признак Даламбера о сходимости ряда.
7. Сформулируйте интегральный признак сходимости ряда.

Практические задания

1. Исследуйте ряды на сходимость по определению.

1. 1 . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. 1. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$. 1. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$.

2. Исследуйте с помощью необходимого признака сходимости.

2. 1 . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{6n+1}$. 2. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}1$. 2. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}$.

3. Исследуйте ряды на сходимость с помощью признаков сравнения.

3. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{20n+1}$. 3. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(2n+1)}$.

3. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$. 3. 4. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$.

3. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+3}$. 3. 6 . $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

3. 7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. 3. 8 . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}\sqrt{n}}$.

3. 9 . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$. 3. 10. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

3. 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n}$.

3. 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n\sqrt{n}}$.

3. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{n}{n+1}}{n^2+2}$.

3. 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[5]{n^{11}}}$.

- 3.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2\sqrt{n}+5}$.

4. Исследуйте ряды на сходимость с помощью признаков Даламбера и Коши.

4. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$.

4. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!}$.

4. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

4. 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 3^n}$.

4. 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

4. 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

4. 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)}$.

4. 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+5}$.

4. 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4^{n-1}+(n+1)}$.

5. Исследуйте ряды на сходимость с помощью интегрального признака

5. 1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

5. 2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ найдите сумму n первых членов ряда, докажите сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости и найдите сумму ряда.

2. Исследуйте ряды на сходимость с помощью признаков сравнения:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$.

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$.

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$.

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{4n}$.

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n(n+3)}$.

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

2.7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2+\cos n}{\sqrt[4]{n^4-1}}$.

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{n}{\left(n^2+3\right)^{13/4}}$.

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^4+1}}$.

3. Исследуйте ряды на сходимость с помощью признаков Даламбера и Коши:

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$.

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$.

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n n!}$.

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$.

3.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n\frac{1}{n}$.

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 17.
Знакочередующиеся ряды. Функциональные ряды. Разложение функций в ряд Тейлора

Вопросы для самоконтроля

1. Какой ряд называется знакочередующимся?
2. Сформулируйте признак Лейбница.
3. Когда ряд называется абсолютно (условно) сходящимся?

4. Что называется функциональным рядом?
5. Что называется точкой (областью) сходимости функционального ряда?
6. Дайте определение степенного ряда. Сформулируйте теорему Абеля.
7. Что называется разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0?
8. Как выглядят разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена?

Практические задания

1. Исследуйте ряды на сходимость:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$. 1.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}$.

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. 1.4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+3}$.

1.5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. 1.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+5}{3n-1}$.

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}$. 1.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln 2n}$.

1.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n\sqrt{n}}$. 1.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{3n}$.

2. Найдите область сходимости функционального ряда:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x$. 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)!}$.

2.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(x+4)^n}$. 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^{2n}}$.

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\ln x}}$. 2.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n+5}(x+2)^n$. 2.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n$.

3. Используя разложения известных функций, разложите в ряд Тейлора следующие функции:

3.1. $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$. 3.2. $f(x)=x\cos\sqrt{x}$.

3.3. $f(x) = \sin\dfrac{2x^2}{3}$.

3.4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$.

3.5. $f(x) = xe^{-x^2}$.

3.6. $f(x) = x^5\ln(1+x^2)$.

3.7. $f(x) = \ln(9+x)$.

3.8. $f(x) = \sqrt[4]{1+3x}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Выполнение заданий расчетно-графической работы.
2. Подготовка к контрольной работе.

Примерный вариант контрольной работы

1. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{72}{n^2+5n+4}$.

2. Исследуйте ряды на сходимость:

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 2^n}{n^2}$.

2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n}{n^2(\sqrt[3]{n}+5)}$.

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n n!}{(3n)!}$.

2.4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$.

2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$.

3. Найдите область сходимости функциональных рядов

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}$.

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n-e^x)\cdot(n^2+1)}$.

4. Разложите в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{8+x^2}}$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович Краткий курс математического анализа: для втузов: М.: АльянС, 2017. - 799 с.

2. А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. Линейная алгебра в примерах и задачах: учебное пособие для втузов - Изд. 3-е, стер. - М.: ИНФРА-М, 2017. – 591с.

3. В.А. Болгов [и др.]]; под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. Сборник задач по математике: учеб. пособие для студентов втузов - М.: АльянС, 2017. - 478с.

4. Ряды: методические указания к расчётно-графическим работам по курсу "Высшая математика"/ [сост. В. И. Бобков, Н. Ф. Кулага]; Филиал ФГБОУ ВО "НИУ МЭИ" в г. Смоленске. - Смоленск: [Филиал ФГБОУ ВО "НИУ МЭИ" в г. Смоленске], 2018. - 27, [1] с.

5. А.С. Винокурова, Н.Ф. Кулага Пределы: методические указания к расчетно-графическому заданию по курсу "Высшая математика". Филиал ФГБОУ ВО "НИУ МЭИ" в г. Смоленске. - Смоленск: [Филиал ФГБОУ ВО "НИУ МЭИ" в г. Смоленске], 2017. – 47с.

6. Кузнецов, Леонид Антонович. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты : учебное пособие / Л. А. Кузнецов .— Изд.12-е испр. — СПб. : Лань, 2013 .— 238 с. : ил. ISBN 978-5-8114-0574-9 : 500.00.

7. Аналитическая геометрия : метод. указания к выполнению типового расчета по курсам "Математика" и "Алгебра и геометрия" / СФ МЭИ ; сост. Т. И. Степенкова, Ю. Е Волкова .— Смоленск : СФ МЭИ, 2010 .— 31 с. : ил.