Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»
в г. Смоленске

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Моделирование систем теплоэнергоснабжения

Направление подготовки (специальность): **13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»**

Магистерская программа: **«Энергообеспечение предприятий. Тепломассообменные процессы и установки»**

Уровень высшего образования: **магистратура**

Нормативный срок обучения: **2 года**

Форма обучения: **очная**

Год набора: **2024**

Смоленск

Методическое обеспечение составил:

________________ _к.т.н., доцент_ _Галковский В.А._
подпись ФИО

«_17_» _апреля_ 2024 г.

Заведующий кафедрой «Промышленная теплоэнергетика»:

________________ _В.А. Галковский_
подпись Ф.И.О.

«_02_» _мая_ 2024 г.

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»
в г. Смоленске

Методические рекомендации к лекционным занятиям по дисциплине «Моделирование систем теплоэнергоснабжения»

Смоленск

Учебным планом подготовки магистров по направлению 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» (магистерская программа «Энергообеспечение предприятий. Тепломассообменные процессы и установки») по дисциплине «Моделирование систем теплоэнергоснабжения» предусмотрено проведение 18-ти лекционных занятий (36 часов) по 6 темам.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

1.1. Классификация математических моделей

Теорией моделирования является раздел науки, изучающий способы исследования свойств объектов-оригиналов, на основе замещения их другими объектами-моделями. В основе теории моделирования лежит теория подобия. При моделировании абсолютное подобие не имеет места и лишь стремится к тому, чтобы модель достаточно хорошо отображала исследуемую сторону функционирования объекта. Абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта другим точно таким же.

Все модели можно разделить на два класса:

– вещественные,
– идеальные.

В свою очередь вещественные модели можно разделить на:

– натурные,
– физические,
– математические.

Идеальные модели можно разделить на:

– наглядные,
– знаковые,
– математические.

Вещественные натурные модели - это реальные объекты, процессы и системы, над которыми выполняются эксперименты научные, технические и производственные.

Вещественные физические модели - это макеты, муляжи, воспроизводящие физические свойства оригиналов (кинематические, динамические, гидравлические, тепловые, электрические, световые модели).

Вещественные математические - это аналоговые, структурные, геометрические, графические, цифровые и кибернетические модели.

Идеальные наглядные модели - это схемы, карты, чертежи, графики, графы, аналоги, структурные и геометрические модели.

Идеальные знаковые модели - это символы, алфавит, языки программирования, упорядоченная запись, топологическая запись, сетевое представление.

Идеальные *математические модели* - это аналитические, функциональные, имитационные, комбинированные модели.

В приведенной классификации некоторые модели имеют двойное толкование (например - аналоговые). Все модели, кроме натурных, можно объединить в один класс мысленных моделей, т.к. они являются продуктом абстрактного мышления человека.

Остановимся на одном из наиболее универсальных видов моделирования - математическом, ставящим в соответствие моделируемому физическому процессу систему математических соотношений, решение которой позволяет получить ответ на вопрос о поведении объекта без создания физической модели, часто оказывающейся дорогостоящей и неэффективной.

Математическое моделирование - это средство изучения реального объекта, процесса или системы путем их замены *математической моделью*, более удобной для экспериментального исследования с помощью ЭВМ.

Математическая модель является приближенным представлением реальных объектов, процессов или систем, выраженным в математических терминах и сохраняющим существенные черты оригинала. *Математические модели* в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций, описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и внешние связи.

В общем случае *математическая модель* реального объекта, процесса или системы представляется в виде системы функционалов

$$\Phi_i\,(X,Y,Z,t)=0, \qquad (1.1)$$

где X - вектор входных переменных, $X=[x_1,x_2,x_3, \ldots , x_N]^t$,
Y - вектор выходных переменных, $Y=[y_1,y_2,y_3, \ldots , y_N]^t$,
Z - вектор внешних воздействий, $Z=[z_1,z_2,z_3, \ldots , z_N]^t$,
t - координата времени.

Построение *математической модели* заключается в определении связей между теми или иными процессами и явлениями, создании математического аппарата, позволяющего выразить количественно и качественно связь между теми или иными процессами и явлениями, между интересующими специалиста физическими величинами, и факторами, влияющими на конечный результат.

Обычно их оказывается настолько много, что ввести в модель всю их совокупность не удается. При построении *математической модели* перед исследованием возникает задача выявить и исключить из рассмотрения факторы, несущественно влияющие на конечный результат (*математическая модель* обычно включает значительно меньшее число факторов, чем в реальной действительности). На основе данных эксперимента выдвигаются гипотезы о связи между величинами, выражающими конечный результат, и факторами, введенными в *математическую модель*. Такая связь зачастую выражается системами дифференциальных уравнений в частных производных (например, в задачах механики твердого тела, жидкости и газа, теории фильтрации, теплопроводности, теории электростатического и электродинамического полей).

Конечной целью этого этапа является формулирование математической задачи, решение которой с необходимой точностью выражает результаты, интересующие специалиста.

1.2. Форма и принципы представления математической модели

По принципам построения *математические модели* разделяют на:

– аналитические;

– имитационные.

В аналитических моделях процессы функционирования реальных объектов, процессов или систем записываются в виде явных функциональных зависимостей.

Аналитическая модель разделяется на типы в зависимости от математической проблемы:

– уравнения (алгебраические, трансцендентные, дифференциальные, интегральные),

– аппроксимационные задачи (интерполяция, экстраполяция, численное интегрирование и дифференцирование),

– задачи оптимизации,

– стохастические проблемы.

Однако по мере усложнения объекта моделирования построение аналитической модели превращается в трудноразрешимую проблему. Тогда исследователь вынужден использовать имитационное моделирование.

В имитационном моделировании функционирование объектов, процессов или систем описывается набором алгоритмов. Алгоритмы имитируют реальные элементарные явления, составляющие процесс или систему с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени. Имитационное моделирование позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса или системы в определенные моменты времени, однако прогнозирование поведения объектов, процессов или систем здесь затруднительно. Можно сказать, что имитационные модели - это проводимые на ЭВМ вычислительные эксперименты с *математическими моделями*, имитирующими поведение реальных объектов, процессов или систем.

В зависимости от характера исследуемых реальных процессов и систем *математические модели* могут быть:

– детерминированные,

– стохастические.

В детерминированных моделях предполагается отсутствие всяких случайных воздействий, элементы модели (переменные, математические связи) достаточно точно установленные, поведение системы можно точно определить. При построении детерминированных моделей чаще всего используются алгебраические уравнения, интегральные уравнения, матричная алгебра.

Стохастическая модель учитывает случайный характер процессов в исследуемых объектах и системах, который описывается методами теории вероятности и математической статистики.

По виду входной информации модели разделяются на:

– непрерывные,

– дискретные.

Если информация и параметры являются непрерывными, а математические связи устойчивы, то модель - непрерывная. И наоборот, если информация и параметры - дискретны, а связи неустойчивы, то и *математическая модель* - дискретная.

По поведению моделей во времени они разделяются на:

– статические,

– динамические.

Статические модели описывают поведение объекта, процесса или системы в какой-либо момент времени. Динамические модели отражают поведение объекта, процесса или системы во времени.

По степени соответствия между *математической моделью* и реальным объектом, процессом или системой *математические модели* разделяют на:

– изоморфные (одинаковые по форме),

– гомоморфные (разные по форме).

Модель называется изоморфной, если между нею и реальным объектом, процессом или системой существует полное поэлементное соответствие. *Гомоморфной* - если существует соответствие лишь между наиболее значительными составными частями объекта и модели.

1.3. Особенности построения математических моделей

Для использования ЭВМ при решении прикладных задач прежде всего прикладная задача должна быть «переведена» на формальный математический язык, т.е. для реального объекта, процесса или системы должна быть построена его математическая модель.

Математические модели в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций, описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и внешние связи.

Для построения математической модели необходимо:

- тщательно проанализировать реальный объект или процесс;
- выделить его наиболее существенные черты и свойства;
- определить переменные, т.е. параметры, значения которых влияют на основные черты и свойства объекта;
- описать зависимость основных свойств объекта, процесса или системы от значения переменных с помощью логико-математических соотношений (уравнения, равенства, неравенства, логико-математические конструкций);
- выделить внутренние связи объекта, процесса или системы с помощью ограничений, уравнений, равенств, неравенств, логико-математических конструкций;
- определить внешние связи и описать их с помощью ограничений, уравнений, равенств, неравенств, логико-математических конструкций.

Математическое моделирование, кроме исследования объекта, процесса или системы и составления их математического описания, также включает:

- построение алгоритма, моделирующего поведение объекта, процесса или системы;
- проверка адекватности модели и объекта, процесса или системы на основе вычислительного и натурного эксперимента;
- корректировка модели;
- использование модели.

Математическое описание исследуемых процессов и систем зависит от:

- природы реального процесса или системы и составляется на основе законов физики, химии, механики, термодинамики, гидродинамики, электротехники, теории пластичности, теории упругости и т.д.
- требуемой достоверности и точности изучения и исследования реальных процессов и систем.

На этапе выбора математической модели устанавливаются: линейность и нелинейность объекта, процесса или системы, динамичность или статичность, стационарность или нестационарность, а также степень детерминированности исследуемого объекта или процесса. При математическом моделировании сознательно отвлекаются от конкретной физической природы объектов, процессов или систем и, в основном, сосредотачиваются на изучении количественных зависимостей между величинами, описывающими эти процессы.

Математическая модель никогда не бывает полностью тождественна рассматриваемому объекту, процессу или системе. Основанная на упрощении, идеализации она является приближенным описанием объекта. Поэтому результаты, полученные при анализе модели, носят приближенный характер. Их точность определяется степенью адекватности (соответствия) модели и объекта.

Построение математической модели обычно начинается с построения и анализа простейшей, наиболее грубой математической модели рассматриваемого объекта, процесса или системы. В дальнейшем, в случае необходимости, модель уточняется, делается ее соответствие объекту более полным.

Чем выше требования к точности результатов решения задачи, тем больше необходимость учитывать при *построении математической модели* особенности изучаемого объекта, процесса или системы. Однако, здесь важно во время остановиться, так как сложная математическая модель может превратиться в трудно разрешимую задачу.

Наиболее просто строится модель, когда хорошо известны законы, определяющие поведение и свойства объекта, процесса или системы, и имеется большой практический опыт их применения.

Более сложная ситуация возникает тогда, когда наши знания об изучаемом объекте, процессе или системе недостаточны. В этом случае при *построении математической модели* приходится делать дополнительные предположения, которые носят характер гипотез, такая модель называется гипотетической. Выводы, полученные в результате исследования такой гипотетической модели, носят условный характер. Для проверки выводов необходимо сопоставить результаты исследования модели на ЭВМ с результатами натурного эксперимента. Таким образом, вопрос применимости некоторой математической модели к изучению рассматриваемого объекта, процесса или системы не является математическим вопросом и не может быть решен математическими методами.

Основным критерием истинности является эксперимент, практика в самом широком смысле этого слова.

Построение математической модели в прикладных задачах – один из наиболее сложных и ответственных этапов работы. Опыт показывает, что во многих случаях правильно выбрать модель – значит решить проблему более, чем наполовину. Трудность данного этапа состоит в том, что он требует соединения математических и специальных знаний. Поэтому очень важно, чтобы при решении прикладных задач математики обладали специальными знаниями об объекте, а их партнеры, специалисты, – определенной математической культурой, опытом исследования в своей области, знанием ЭВМ и программирования.

1.4. Компьютерное моделирование и вычислительный эксперимент. Имитационное моделирование

Компьютерное моделирование основывается на:

– построении математических моделей для описания изучаемых процессов;

– использовании новейших вычислительных машин, обладающих высоким быстродействием (миллионы операций в секунду) и способных вести диалог с человеком.

Суть компьютерного моделирования состоит в следующем: на основе математической модели с помощью ЭВМ проводится серия вычислительных экспериментов, т.е. исследуются свойства объектов или процессов, находятся их оптимальные параметры и режимы работы, уточняется модель. Например, располагая уравнением, описывающим протекание того или иного процесса, можно изменяя его коэффициенты, начальные и граничные условия, исследовать, как при этом будет вести себя объект. Более того, можно спрогнозировать поведение объекта в различных условиях.

Вычислительный эксперимент позволяет заменить дорогостоящий натурный эксперимент расчетами на ЭВМ. Он позволяет в короткие сроки и без значительных материальных затрат осуществить исследование большого числа вариантов проектируемого объекта или процесса для различных режимов его эксплуатации, что значительно сокращает сроки разработки сложных систем и их внедрение в производство.

Компьютерное моделирование и вычислительный эксперимент заставляет совершенствовать математический аппарат, используемый при построении математических моделей, позволяет, используя математические методы, уточнять, усложнять математические модели. Наиболее перспективным для проведения вычислительного эксперимента является его использование для решения крупных научно-технических и социально-экономических проблем современности (проектирование реакторов для атомных электростанций, проектирование плотин и гидроэлектростанций, магнитогидродинамических преобразователей энергии, и в области экономики – составление сбалансированного плана для отрасли, региона, для страны и др.).

В некоторых процессах, где натурный эксперимент опасен для жизни и здоровья людей, вычислительный эксперимент является единственно возможным (термоядерный синтез, освоение космического пространства, проектирование и исследование химических и других производств).

Для проверки адекватности математической модели и реального объекта, процесса или системы результаты исследований на ЭВМ сравниваются с результатами эксперимента на опытном натурном образце. Результаты проверки используются для корректировки математической модели или решается вопрос о применимости построенной математической модели к проектированию либо исследованию заданных объектов, процессов или систем.

Реальные процессы и системы можно исследовать с помощью двух типов математических моделей: аналитических и имитационных.

В аналитических моделях поведение реальных процессов и систем (РПС) задается в виде явных функциональных зависимостей (уравнений линейных или нелинейных, дифференциальных или интегральных, систем этих уравнений). Однако получить эти зависимости удается только для сравнительно простых РПС. Когда явления сложны и многообразны исследователю приходится идти на упрощенные представления сложных РПС. В результате аналитическая модель становится слишком грубым приближением к действительности. Если все же для сложных РПС удается получить аналитические модели, то зачастую они превращаются в трудно разрешимую проблему. Поэтому исследователь вынужден часто использовать *имитационное моделирование*.

Имитационное моделирование представляет собой численный метод проведения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, имитирующими поведение реальных объектов, процессов и систем во времени в течении заданного периода. При этом функционирование РПС разбивается на элементарные явления, подсистемы и модули. Функционирование этих элементарных явлений, подсистем и модулей описывается набором алгоритмов, которые имитируют элементарные явления с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени.

Имитационное моделирование - это совокупность методов алгоритмизации функционирования объектов исследований, программной реализации алгоритмических описаний, организации, планирования и выполнения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, имитирующими функционирование РПС в течении заданного периода.

Под алгоритмизацией функционирования РПС понимается пооперационное описание работы всех ее функциональных подсистем отдельных модулей с уровнем детализации, соответствующем комплексу требований к модели.

"Имитационное моделирование" (ИМ)- это двойной термин. "Имитация" и "моделирование" - это синонимы. Фактически все области науки и техники являются моделями реальных процессов. Чтобы отличить математические модели друг от друга, исследователи стали давать им дополнительные названия. Термин *"имитационное моделирование"* означает, что мы имеем дело с такими математическими моделями, с помощью которых нельзя заранее вычислить или предсказать поведение системы, а для предсказания поведения системы необходим вычислительный эксперимент (имитация) на математической модели при заданных исходных данных.

Основное достоинство ИМ:

- возможность описания поведения компонент (элементов) процессов или систем на высоком уровне детализации;
- отсутствие ограничений между параметрами ИМ и состоянием внешней среды РПС;
- возможность исследования динамики взаимодействия компонент во времени и пространстве параметров системы;

Эти достоинства обеспечивают имитационному методу широкое распространение.

Рекомендуется использовать *имитационное моделирование* в следующих случаях:

1. Если не существует законченной постановки задачи исследования и идет процесс познания объекта моделирования. *Имитационная модель* служит средством изучения явления.

2. Если аналитические методы имеются, но математические процессы сложны и трудоемки, и *имитационное моделирование* дает более простой способ решения задачи.

3. Когда кроме оценки влияния параметров (переменных) процесса или системы желательно осуществить наблюдение за поведением компонент (элементов) процесса или системы (ПС) в течение определенного периода.

4. Когда *имитационное моделирование* оказывается единственным способом исследования сложной системы из-за невозможности наблюдения явлений в реальных условиях (реакции термоядерного синтеза, исследования космического пространства).

5. Когда необходимо контролировать протекание процессов или поведение систем путем замедления или ускорения явлений в ходе имитации.

6. При подготовке специалистов новой техники, когда на *имитационных моделях* обеспечивается возможность приобретения навыков в эксплуатации новой техники.

7. Когда изучаются новые ситуации в РПС. В этом случае имитация служит для проверки новых стратегий и правил проведения натурных экспериментов.

8. Когда особое значение имеет последовательность событий в проектируемых ПС и модель используется для предсказания узких мест в функционировании РПС.

Однако ИМ наряду с достоинствами имеет и недостатки:

1. Разработка хорошей ИМ часто обходится дороже создания аналитической модели и требует больших временных затрат.

2. Может оказаться, что ИМ неточна (что бывает часто), и мы не в состоянии измерить степень этой неточности.

3. Зачастую исследователи обращаются к ИМ, не представляя тех трудностей, с которыми они встретятся и совершают при этом ряд ошибок методологического характера.

И тем не менее ИМ является одним из наиболее широко используемых методов при решении задач синтеза и анализа сложных процессов и систем.

Одним из видов *имитационного моделирования* является статистическое *имитационное моделирование*, позволяющее воспроизводить на ЭВМ функционирование сложных случайных процессов.

При исследовании сложных систем, подверженных случайным возмущениям используются вероятностные аналитические модели и вероятностные *имитационные модели*.

В вероятностных аналитических моделях влияние случайных факторов учитывается с помощью задания вероятностных характеристик случайных процессов (законы распределения вероятностей, спектральные плотности или корреляционные функции). При этом построение вероятностных аналитических моделей представляет собой сложную вычислительную задачу. Поэтому вероятностное аналитическое моделирование используют для изучения сравнительно простых систем.

Отмечено, что введение случайных возмущений в *имитационные модели* не вносит принципиальных усложнений, поэтому исследование сложных случайных процессов проводится в настоящее время, как правило, на *имитационных моделях*.

В вероятностном *имитационном моделировании* оперируют не с характеристиками случайных процессов, а с конкретными случайными числовыми значениями параметров ПС. При этом результаты, полученные при воспроизведении на *имитационной модели* рассматриваемого процесса, являются случайными реализациями. Поэтому для нахождения объективных и устойчивых характеристик процесса требуется его многократное воспроизведение, с последующей статистической обработкой полученных данных. Именно поэтому исследование сложных процессов и систем, подверженных случайным возмущениям, с помощью *имитационного моделирования* принято называть статистическим моделированием.

Статистическая модель случайного процесса - это алгоритм, с помощью которого имитируют работу сложной системы, подверженной случайным возмущениям; имитируют взаимодействие элементов системы, носящих вероятностный характер

После построения математической модели рассматриваемого объекта, процесса или системы наступает второй этап решения прикладной задачи – поиск или разработка метода решения сформулированной математической задачи. Метод должен быть удобным для его реализации на ЭВМ, обеспечивать необходимое качество решения.

Все методы решения математических задач можно разделить на 2 группы:

- точные методы решения задач;
- численные методы решения задач.

В точных методах решения математических задач ответ удается получить в виде формул.

Для большинства задач, встречающихся на практике, точные методы решения или неизвестны, или дают очень громоздкие формулы. Однако, они не всегда являются необходимыми. Прикладную задачу можно считать практически решенной, если мы сумеем ее решить с нужной степенью точности.

Для решения таких задач разработаны численные методы, в которых решение сложных математических задач сводится к последовательному выполнению большого числа простых арифметических операций. Непосредственная разработка численных методов относится к вычислительной математике.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

Математическая модель теплоэнергетической установки (ТЭУ) представляет собой совокупность системы уравнений балансов, уравнений, описывающих характеристики оборудования, системы неравенств, определяющих область допустимых решений и выражения функции целей. Рассмотрим подробнее данные компоненты.

2.1. Система балансовых уравнений в ТЭУ

Система уравнений балансов в ТЭУ устанавливает такое соотношение между термодинамическими и расходами и параметрами связей, которое обеспечивает получение заданной стационарной нагрузки установки с определенными конструктивно – компоновочными характеристиками.

Уравнения для всей установки и её внешних связей отнесенные к одному и тому же промежутку времени имеют вид:

- уравнение баланса энергии для каждого k-го элемента:

$$\sum_{j=1}^{J_k-N_k}(\gamma Gh)_j+\sum_{n=1}^{N}(\gamma P)_n \qquad (2.1)$$

- уравнение балансов расходов для каждого l – энергоносителя k-го элемента оборудования:

$$\sum_{j=1}^{J_{kl}}G_j=0 \qquad (2.2)$$

- уравнение гидравлического баланса для каждого l – энергоносителя k-го элемента оборудования:

$$(p'\pm\Delta p-p'')_{kl}=0 \qquad (2.3)$$

- уравнение изменения энтальпии каждого l – энергоносителя k-го элемента оборудования:

$$(h'\pm\Delta h-h'')_{kl}=0, \qquad (2.4)$$

где k – коэффициент, учитывающий потери энергии связанного потока в окружающую среду;
Δp, Δh – характеристики изменения давления, энтальпии. Со знаком «-», если имеют место процессы расширения, дросселирования, охлаждения, со знаком «+» - процессы сжатия и нагрева.
J – общее число связей;
N – число однопараметрических связей;
P – мощность;
G – расход;
γ - удельный вес.

Так, например, для котельного агрегата необходимо записать 5 уравнений баланса:

1) уравнение теплового баланса аппарата,
2) уравнение материального баланса расхода пара,
3) уравнение материального баланса продуктов сгорания,
4) уравнение баланса гидравлического расхода пара,
5) уравнение баланса аэродинамических напоров по продуктам сгорания.

В данных уравнениях приравнивание к нулю означает рассмотрение стационарных режимов работы установки.

2.2. Описание основных характеристик оборудования

В качестве основных характеристик для ТЭУ можно принять:

- характеристики изменения давления каждого l – энергоносителя в каждом k-ом элементе оборудования:

$$\Delta p_{kl}=\Delta p_{kl}(z_k,z_k^K) \qquad (3.5)$$

- характеристики изменения температуры каждого l – энергоносителя в каждом k-ом элементе оборудования:

$$\Delta \tau_{kl}=\Delta \tau_{kl}(z_k,z_k^K) \qquad (3.6)$$

- характеристика изменения расхода каждого l – энергоносителя в каждом k-ом элементе оборудования:

$$\Delta G_{kl}=\Delta G_{kl}(z_k,z_k^K) \qquad (3.7)$$

- характеристика изменения средней скорости l – потока в каждом k-ом элементе:

$$U_{kl}=U_{kl}(z_k,z_k^K) \qquad (3.8)$$

- характеристика наибольшей температуры стенки для каждой q – конструктивной части k-го элемента оборудования, изготовленного из материала m:

$$t_{qkm}=t_{qkm}(z_k,z_k^K) \qquad (3.9)$$

- характеристика абсолютной и относительной толщины стенки каждой q – конструктивной части k-го элемента оборудования, изготовленного из материала m:

$$\beta_{qkm}=\beta_{qkm}(z_k,z_k^K) \qquad (3.10)$$

- характеристика расхода металлов и других материалов для каждой q – конструктивной части в k-ом элементе:

$$M_{qkm}=M_{qkm}(z_k,z_k^K) \qquad (3.11)$$

Термодинамические, расходные и конструктивные параметры установки не могут принимать совершенно произвольные значения, а могут изменяться лишь в пределах технически осуществимых и физически возможных состояний энергоносителей и конструкций. Вся совокупность таких ограничений представляет собой систему неравенств в многомерном пространстве. Таким образом, определяется допустимая область технических решений при составлении математической модели ТЭУ.

2.3. Выражение функций цели

Для сравнения вариантов целесообразно рассмотреть расчетные затраты. В выражения расчетных затрат входят капитальные затраты и эксплуатационные затраты:

$$З=\sigma\sum_{\tau=1}^{T}[(K_\tau+И_\tau)(1+\sigma)^{T-\tau}]+И_{нэ}\,, \qquad (2.5)$$

где К – капиталовложения,
И – эксплутационные издержки,
τ – эксплутационные издержки,
σ – коэффициент эффективности капиталовложений,
$И_{нэ}$ – издержки в течение года нормальной эксплуатации.

Непременным условием сопоставления вариантов ТЭУ является их приведение к одинаковому энергетическому эффекту. Это означает необходимость выравнивания вариантов по полезному отпуску энергоресурсов (ЭЭ) и по их мощности. При рассмотрении технологических установок необходимо выравнивание их по выходу конечного продукта соответствующего качества. Применительно к этим условиям существует два метода выравнивания нагрузок:

1. Во всех вариантах принимается равным номинальной мощности генераторов. Изменение мощности собственных установок и расхода на них отпускаемой ЭЭ, приводящее к нарушению неизменной мощности установки и полезного отпуска ЭЭ, компенсируется за счет соответствующей замыкающей электростанции.
2. Для обеспечения равенства отпускаемой мощности и отпуска ЭЭ во всех вариантах рассматриваемой ТЭУ допускается возможность варьирования в небольших пределах мощности электрогенератора.
3. Для технологических установок можно предусматривать покрытие недостающих объемов или видов продукции со стороны внешних поставщиков, включая затраты на их приобретение в целевую функцию.

Если раскрыть подробно все составляющие функции затрат, то имеем:

$$З = \sigma \sum_{\tau=1}^{T} \{ \sum_{\kappa=1}^{R} [\tfrac{h_{\tau r}}{8760} \sum_{k=1}^{K} \sum_{q=1}^{Q} \sum_{m=1}^{M} (1+\alpha_{\tau r})_{kqm} (ц_{\tau} \lambda G)_{kqm} + h_{\tau r} З^{в}_{\tau r} \lambda^{в} B_{\tau r} +$$

$$+ \tfrac{h_{\tau r}}{8760} \sum_{l=1}^{L} (\lambda P)_{\tau r l} ((1+\alpha^{s}_{\tau r}) ц^{s}_{\tau} + З^{в}_{\tau r} b^{s}_{\tau r} 8760)] \} (1+\sigma_{н})^{T-r}, \qquad (2.6)$$

где R – число расчетных режимов r;
T – полная длительность работы установки;
τ - текущий год;
G – расход m-го материала в чистом виде на q узел k-го элемента установки,
λ - коэффициент расхода материала, учитывающий потери при изготовлении, транспортировке и монтаже;
$B_{\tau r}$, $\lambda^{в}$ – часовой расход топлива и коэффициент потерь;
$P_{\tau rl}$ – мощность агрегата собственных нужд;
$\lambda_{\tau rl}$ – коэффициент потерь мощности от замещающей электростанции до агрегата собственных нужд;
$h_{\tau r}$ – длительность в часах режимного периода r;
$b^{s}_{\tau r}$ – удельный расход топлива на замещающей электростанции;
$ц_{\tau}$ - приведенная стоимость материала с учетом затрат на изготовление, транспортировку и т.д.;
$ц_{\tau}^{s}$ – удельные капиталовложения в замещающую электростанцию;
$З^{s}_{\tau r}$ – удельные затраты на топливо на рассматриваемой и замещающей электростанции;
$\alpha_{\tau r}$, $\alpha^{s}_{\tau r}$ – коэффициент отчислений на амортизацию, текущий ремонт, заработанную плату и т. д.

Первое слагаемое – капиталовложения и эксплутационные затраты по различным элементам. Второе слагаемое связано с расходом топлива на установке. Третье слагаемое определяет капиталовложения и эксплутационные затраты на замещающей электростанции. Четвертое слагаемое – затраты на топливо на замещающей электростанции.

2.4. Анализ функциональных связей параметров

В геометрической интерпретации полученная математическая модель представляет собой нелинейную поверхность стационарных состояний установки в многомерном пространстве, координатами которой являются величины термодинамических и расходных параметров связей и величины конструктивных параметров узлов. Полную совокупность параметров связей установки удобно разделить на зависимые и независимые. Подмножество или частичная совокупность независимых переменных формируется из полной совокупности параметров связей, если число параметров связей превышает число уравнений. Остальные параметры связей полностью определяются мат. моделью и относятся к совокупности зависимых параметров. Превышение числа параметров над числом уравнений означает, что система имеет бесчисленное множество решений. Конкретный допустимый состав совокупности независимых X можно представить с помощью специальной матрицы функциональных связей. Единицы в строках этой матрицы дают логический признак наличия непосредственной связи переменной с одним или несколькими уравнениями модели.

Таблица 2.1

Матрица функциональных связей

№ элемента оборуд.	№ уравнения u	Признак вхождения υ переменной в u уравнение для j связи															
		1			2			3			4			…	11		
		Признак вхождения υ переменной в u уравнение для параметра ω															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	….	27	28	29
1	1	1^0			1^0			1_*									
	2		1^0			1^0			1_*								
	3										1				1_*		
	4											1^0				1_*	
	5	1^0		1_0	1^0		1_0	1		1_*	1		1^0		1		1

где 1^0 – независимые параметры связи;

1_0 – фиксированные независимые параметры связи;
1_* – зависимые параметры связи;
1 – однопараметрические связи.

2.5. Математические модели отдельных узлов теплоэнергетических установок

В математической модели ТЭУ целесообразно рассматривать отдельные узлы только в том случае, если решаются вопросы оптимизации этих узлов или отдельно взятых участков. В математическую модель узла ТЭУ включаются более подробные характеристики по применяемым материалам, по конструктивным особенностям, особенностям термодинамических процессов в узле. Для обеспечения сопоставимости и возможности выбора варианта узла необходимо обеспечение одинакового положительного эффекта от применения узла в установке.

Получение оптимального варианта узла еще не гарантирует обеспечение высокой эффективности работы системы. Так как все элементы ТЭС тесно взаимосвязаны между собой по потокам энергоносителей.

В отличии от математической модели установки математическая модель узлов включает ряд новых данных:

1. технические и технологические характеристики и параметры установки, которые включают данный узел,
2. более подробные конструктивно компоновочные признаки узла, на основе которых можно проводить его тепловой, гидравлический и прочностной анализ,
3. более подробные характеристики производственных, технологических, районных условий изготовления, транспортировки, монтажа установки,
4. более подробные характеристики применяемых материалов.

2.6. Оптимальная последовательность расчета тэу

Сложность и трудоемкость расчета ТЭУ и систем связана с наличием множества расчетных циклов, как в технологической схеме, так и в расчетах отдельных элементов оборудования. Существование цикла означает, что параметры на выходе из одного элемента является входными параметрами в другом элементе и следовательно они являются неизвестными, при расчете этого элемента. Расчет таких схем осуществляется с применением итерационных методов. При этом задается значение неизвестного параметра на входе в элемент, осуществляется расчет всей схемы и определяется расчетное значение принятого параметра. Процесс итераций продолжается до достижения заданной точности.

Расчет замкнутой циклической схемы основывается на разрыве обратных связей в ней. Такой разрыв делает схему разомкнутой, что позволяет осуществить последовательный расчет всех элементов установки.

Рассмотрим абстрактную технологическую установку рис. 2.1, в составе которой присутствуют контуры (условная схема технологической установки):

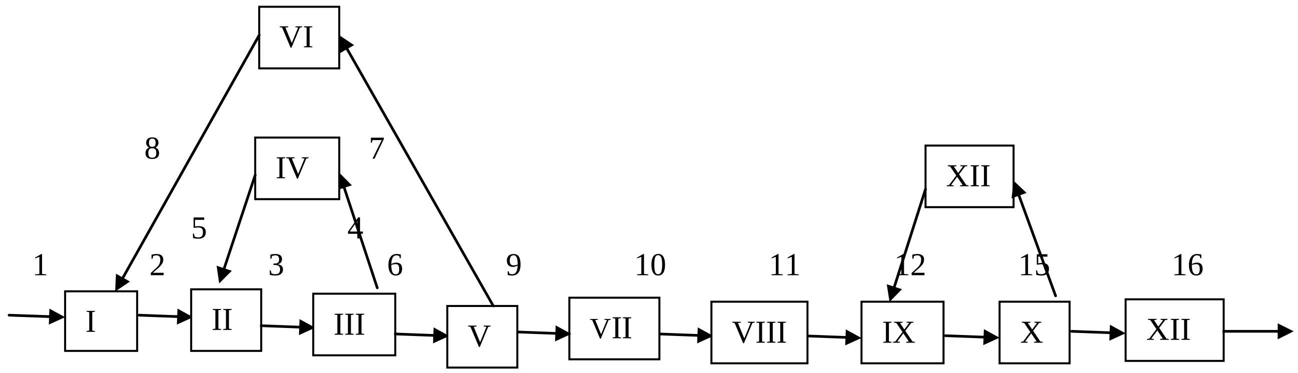


Рис. 2.1.Абстрактная технологическая установка

Расчет данной схемы можно выполнить с разрывом обратных связей несколькими способами:

1. Разрываем в качестве обратных связей 5,8,14 связь. Это приводит к включению дополнительных уравнений в рассматриваемую совокупность уравнений по всем 12 элементам.
2. В начале рассчитывается совокупность элементом 1-4 с разрывами 5 и 8 связи, затем рассчитывается 7-8 элемент. А на следующем этапе считаем 9-11 элемент с разрывом связи 14. На завершающем этапе рассматриваем 12 элемент. Этот способ позволяет понизить размерность систем нелинейных уравнений, что ведет к сокращению времени расчета и возможности получения решения.
3. Третий способ расчета заключается в том, что в полной мере используются возможности второго способа (последовательность расчетов), но в качестве обратных связей при расчете элементов 1-6 разрываем 3-ю связь. Это позволяет ввести только три уравнения дополнительных в систему

Таким образом, правильным выбором разрываемых потоков можно существенно понизить размерность системы нелинейных уравнений и часто вместо решения одной системы высокого порядка задачу можно свести к решению нескольких независимых систем уравнений меньших порядков.

Имеются две операции, с помощью которых удается понизить размерность решаемой задачи:

а) выделение схеме совокупностей элементов охваченных обратными связями, то есть образующими контур,

б) выбор внутри каждого контура наилучшей совокупности потоков, разрыв которых превращает в контур в разомкнутую последовательность, наилучшей совокупностью можно считать такую совокупность потоков, сумма параметров связей в которых минимальна.

Предварительный анализ расчетных схем с целью определения оптимальной последовательности расчета целесообразно выполнять с применением графоаналитического подхода к моделированию и структурному анализу сложных ТЭУ и систем.

3. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЭУ И СИСТЕМ

Технологическая сложность ТЭС, многомерность как по числу составных элементов, так и по числу выполняемых ими функций, высокая степень параметрического взаимодействия элементов обуславливает возникновение при решении задач анализа, оптимизации и синтеза ТЭС ряда принципиальных трудностей методического и вычислительного характера.

Эти трудности можно в значительной степени преодолеть, используя топологические модели систем.

Для решения задач математического моделирования, анализа и оптимизации систем используются четыре класса графов:

1. потоковые;
2. информационно – потоковые;
3. сигнальные;
4. структурные.

Потоковые графы отображают особенности технологические топологии системы и позволяют установить непосредственную связь между изменениями технологической топологии и количественными0 характеристиками системы. Существует четыре группы потоковых графов:

- параметрические;
- материальные;
- тепловые;
- эксергетические.

Параметрические потоковые графы используются для разработки алгоритмов оптимизации стратегии расчета систем.

Информационно-потоковые графы отображают особенности информационной структуры систем уравнений математических моделей. Их две группы: двудольные информационные графы и информационные.

Сигнальные графы отображают причинно следственные связи между переменными и параметрами линейных систем уравнений математических моделей. А также используются для решения многомерных систем линейных уравнений, для расчета показателей устойчивости, чувствительности и надежности системы.

Структурные графы отображают особенности физико-химических особенностей процессов и явлений, протекающих в элементах систем. Их две группы:

- гидравлические, применяемые для решения систем уравнений гидравлических процессов,
- тепловые - для решения систем уравнений тепловых процессов.

3.1. Принципы построения потоковых графов

Порядок составления потоковых графов:

1. изучается физико-химические основы процесса протекания явлений;
2. формируется список внешних и внутренних (фиктивных) источников и стоков вещества;
3. составляется список физических и фиктивных потоков вещества и теплоты. Далее строится графическое отображение графа.

Пример: для технологической схемы (рис. 3.1) построить параметрический потоковый граф (ППГ); материальный потоковый граф общий (МПГО); материальный потоковый граф по компонентам (МПГК); тепловой потоковый граф (ТПГ).

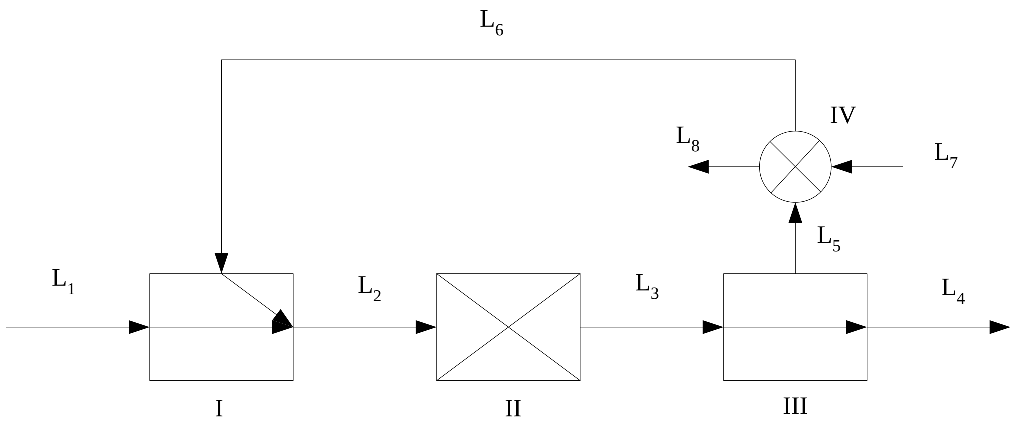


Рис. 3.1. Технологическая схема получения продукта

На данной операторной схеме представлен процесс получения некоторого продукта E из исходных компонентов A и B, процесс протекает с выделением тепла ΔH: $A + B = E + \Delta H$

I – теплообменник смешения;

II – реактор (камера получения вещества);

III – аппарат диффузорного разделения;

IV – теплообменник для охлаждения.

В химическую реакцию вступают вещества A и B, причем компонент A подается на вход I в избытке по сравнению со стехиометрическим соотношением, поэтому в аппарате диффузного разделения происходит разделение на компонент E (поток L_4) и избыток компонента A (поток L_5).

Материальный потоковый граф МПГ может быть построен с учетом всех компонентов системы, а также для отдельно взятых компонентов.

На потоковый граф наносится все потоки представленные на схеме, отображаются внешние потоки, потом нумеруются переходы

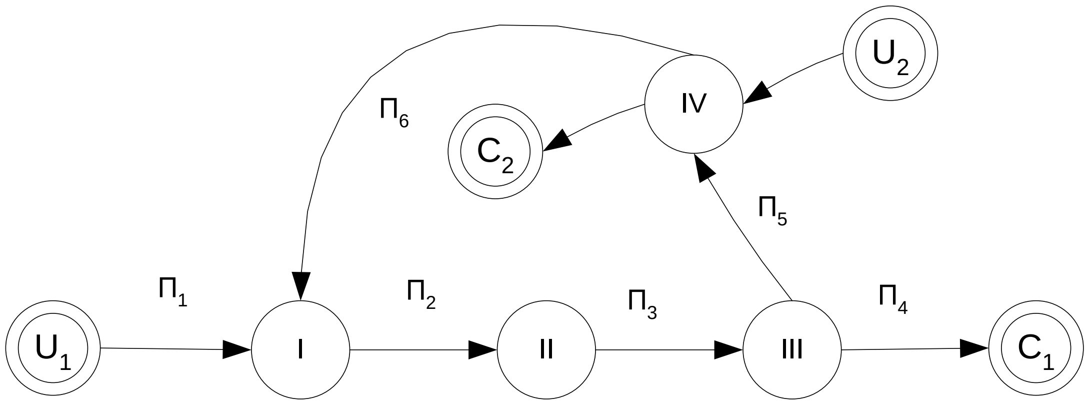


Рис. 3.2. Параметрический потоковый граф

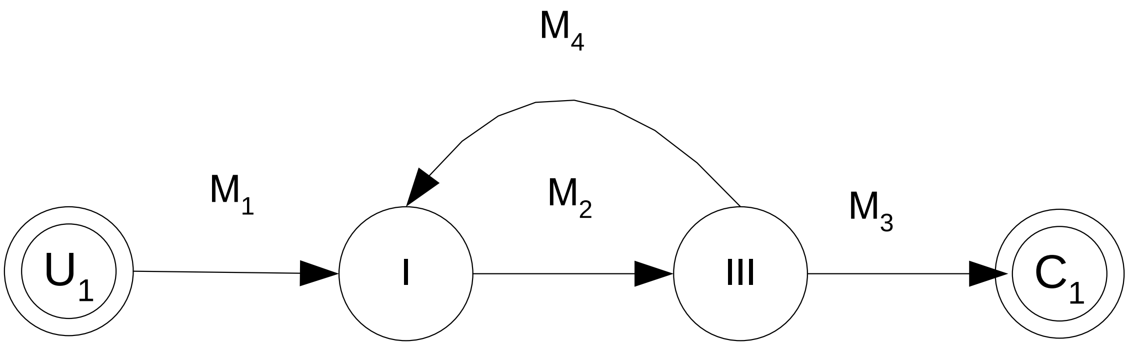
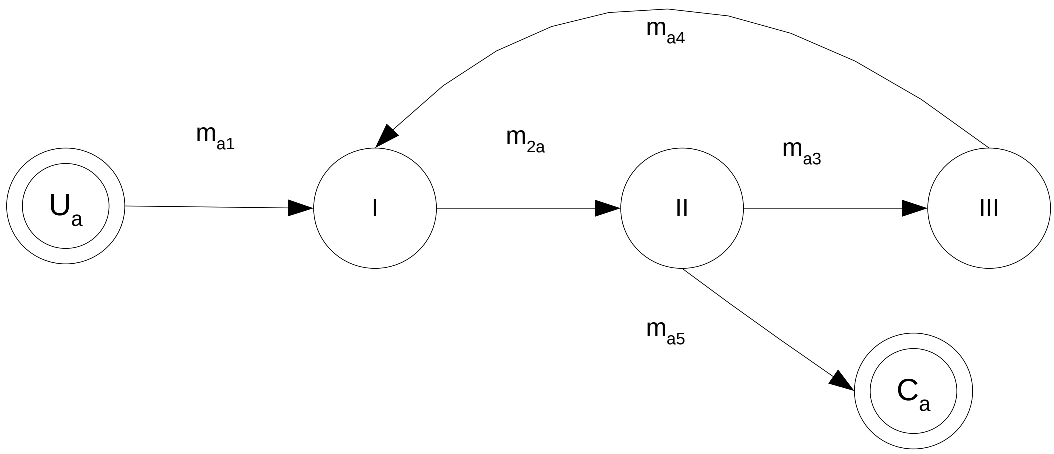
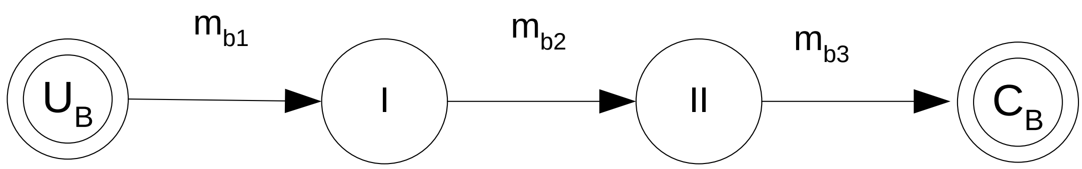


Рис. 3.3. Материальный потоковый граф

Для А:



Для B:



Для E:

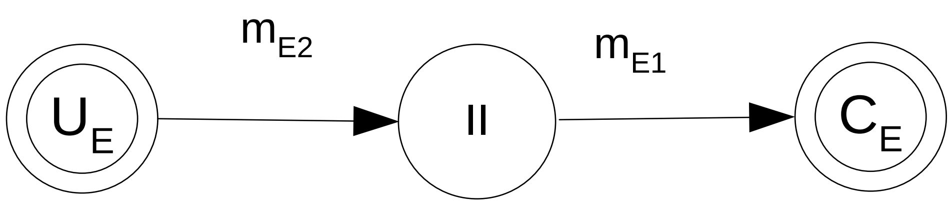


Рис. 3.4. Материальные потоковые графы по компонентам

На тепловом потоковом графе ТПГ отображаются только те вершины, где происходит изменение количества теплоты. Должны также отображаться скрытые (фиктивные) источники теплоты.

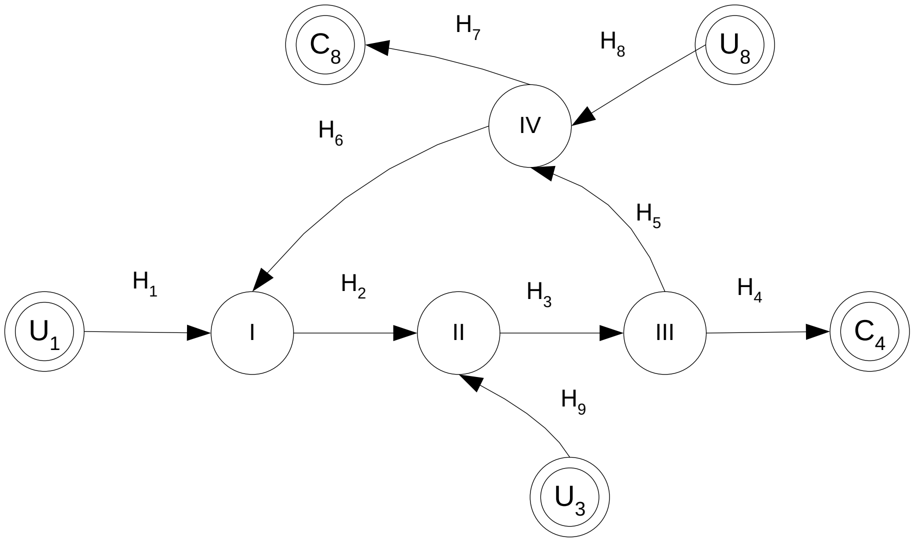


Рис. 3.5. Тепловой потоковый граф

Каждой дуге материального или теплового потокового графа соответствует определенный вес, который равен величине расхода вещества или теплоты.

Назовем W(e) – потоком вещества по дуге данного графа. Тогда для каждой дуги к-ой вершины графа МПТ или ТПГ можно записать уравнение по дугам графа инцидентным данной вершине:

$$\sum_{i=1}^{n} W(e) = 0 \text{ или } \sum_{i=1}^{k} W_i(e) - \sum_{j=1}^{n-k} W_j(e) = 0,$$

где $\sum_{i=1}^{k} W_i(e)$- входящие потоки, $\sum_{j=1}^{n-k} W_j(e)$- выходящие потоки.

Совокупность уравнений вершин для потока по дугам графа, которые составляются для всех вершин, образуют систему уравнений вершин для данного графа: [S*]*[W*]=0.

[S*] – матрица инциденций, [W*] – вектор столбец потоков по дугам графа. Таким образом, матричные уравнения вершин представляют собой матричные уравнения материальных и тепловых балансов.

3.2. Особенности построения информационных графов

Вершины информационных графов соответствуют уравнениям математической модели, а так же источникам и приемникам информации. Ветви информационного графа отображают информационные потоки, которые соответствуют информационным переменным системы переменных.

3.3. Сигнальные графы и эквивалентные преобразования сигнальных графов

Сигнальные графы – взвешенные орграфы, соответствующие линейным системам уравнений математической модели и отражающие причинно-следственные связи в системе между информационными переменными.

Вершины сигнального графа соответствуют информационным переменным или сигналам.

Каждая ветвь сигнального графа имеет вес, равный коэффициенту, характеризующему информационно параметрическую связь между сигналами. Направление ветвей идет от сигнала источника к сигналу приемника. В сигнальных графах могут присутствовать:

вершины источники, вершины стоки, смешанные вершины.

Решение сигнального графа процедура определения значений эквивалентных коэффициентам передач между вершиной источника и зависимой вершиной. Решение сигнальных графов может быть упрощено благодаря возможности преобразования сигнальных графов.

Эквивалентные преобразования графов:

1. Передача последовательных ветвей равна произведению передач этих ветвей

$$\begin{cases} x_2=a*x_1 \\ x_3=в*x_2 \end{cases} \quad => x_3=a*в*x_1$$

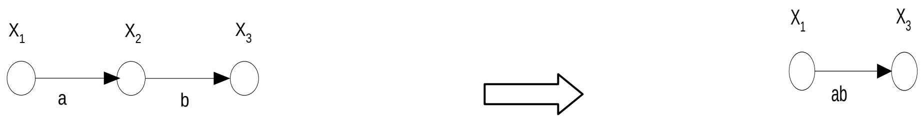


Рис.3.6. Пример передачи последовательных ветвей

2. Передача параллельных ветвей: равна сумме передач этих элементов

$x_2=x_1*a+x_1*в = x_1*(a+в)$

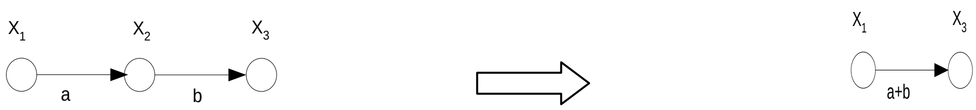


Рис. 3.7. Пример передачи параллельных ветвей

3. Устранение простой вершины, которая не входит не в контур не в петлю

$$\begin{cases} x_4=a*x_1 \\ x_2=в*x_4=a*в*x_1 \\ x_3=c*x_4=a*в*x_1 \end{cases}$$

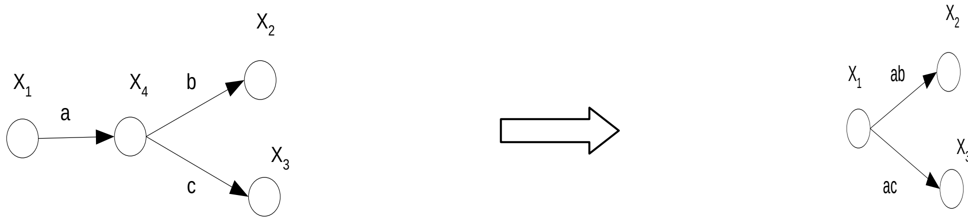


Рис. 3.8. Пример устранения простой вершины

4. Исключение петли или контура

$$\begin{cases} x_2=a*x_1+T*x_2 \text{ отсюда выражаем } x_2=\dfrac{a}{1-T}*x_1 \\ x_3=в*x_2 \end{cases}$$

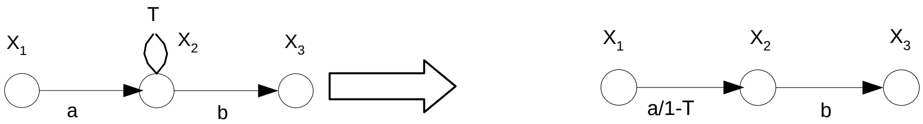


Рис. 3.9. Пример устранения петли

Для исключения петли, передача ветвей входящих в вершину при которой существует петля уменьшают в (1-T) раз.

Для устранения контура необходимо устранить любую из этих вершин, превратив его в петлю, а затем устранить петлю.

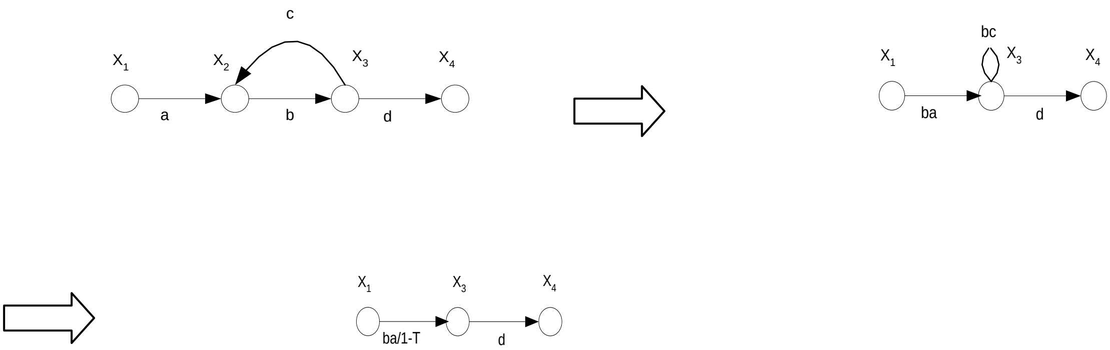


Рис. 3.10. Пример устранения контура

4. ИНВЕРТИРОВАНИЕ ПРЯМОГО ПУТИ ИЛИ КОНТУРА

Прямым путем – называют элементарный путь соединяющий вершину исток с вершиной стока. Для перехода от исходного сигнального графа к инвертированному, необходимо выполнить следующие операции:

1. изменить направление всех ветвей прямого или контуров на противоположные;
2. изменить передачи всех ветвей от нового истока к новому стоку на обратный;
3. перенести корец пути, касающийся инвертированного пути в новую вершину, оставив начало этой ветви в старой вершине;
4. коэффициенты передачи инвертированного пути является обратной величиной коэффициента передачи исходного прямого пути.

Пример: инвертирование вершины x_1:

Рис. 4.1. Инвертирование вершины x_1

При построении сигнальных графов пользуются следующими правилами:

1. сигналы передаются вдоль ветвей, только в направлении их ориентации;
2. сигнал, проходящий вдоль какой – либо ветви умножается на коэффициент передачи этой ветви;
3. сигнал изображаемой какой – либо зависимой вершиной является сигнальной суммой всех входящих в него сигналов;
4. величина от зависимой вершины передается по всем ветвям исходящим из данной вершины.

Различают нормализированные и ненормализированные сигнальные графы. Нормализированные сигнальные графы отвечают структуре нормализированной структуре уравнений, т.е. это система разрешенная относительно неизвестных параметров

Исходная система уравнений может быть нормализована в виде:

$$\begin{cases} x_1 - b_1 = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 - x_2 + a_{23} \cdot x_3 + a_{24} \cdot x_4 = 0 \\ a_{32} \cdot x_2 - x_3 = 0 \\ a_{41} \cdot x_1 + a_{43} \cdot x_3 + a_{44} \cdot x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{23} \cdot x_3 + a_{24} \cdot x_4 \\ x_3 = a_{23} \cdot x_2 \\ x_4 = x_1 \cdot \overline{a_{41}} + x_3 \cdot \overline{a_{43}} \end{cases}$$

$$\overline{a_{41}} = \frac{a_{41}}{a_{44}} \qquad \overline{a_{43}} = \frac{a_{43}}{a_{44}}$$ где:

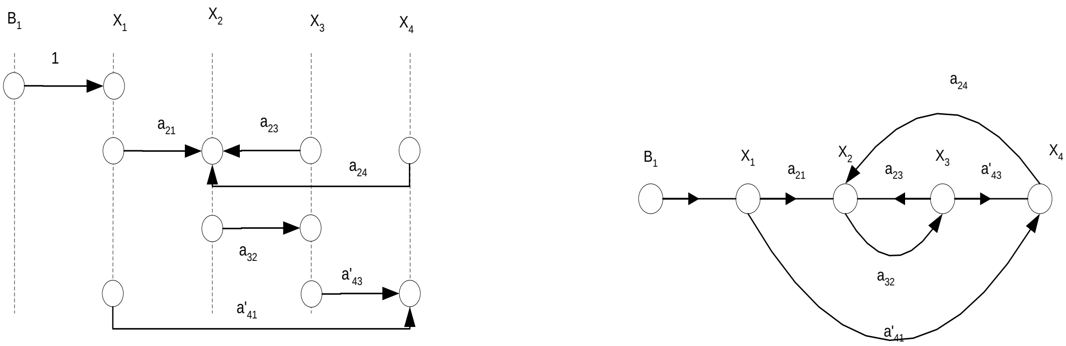


Рис. 4.2. Пример решения системы уравнений

Таким образом, на данном сигнальном графе показана вся последовательность решения системы уравнений.

Структурные потоковые графы отражают идеальные физические и причинно-следственные взаимосвязи некоторых простых или простых физических компонентов, совокупность которых характеризует особенности протекания гидромеханических, тепловых или механических процессов как в элементах, так и в системе в целом. При чем идеальных физических компонентов могут выделены условно, как совокупность нескольких компонентов (путем объединения нескольких элементов для выполнения определенных функций). В качестве идеальных физических компонентов в системе могут быть использованы:

1. компоненты создающие потенциальную или кинетическую энергию (компоненты источники, например: компрессоры, насосы, различные нагреватели);

2. компоненты рассеивающие энергию, т.е. резистивные;

3. компоненты обладающие способностью накапливать вещество или энергию системы – емкостные компоненты (баки – аккумуляторы и т.д.);

4. компоненты характеризующие инерционный эффект массы в потоке вещества, так называемые индуктивные элементы.

Каждый физический компонент имеет некоторый параметр, а его функционирование определяется некоторыми сигналами или информационными переменными. Каждой простой информационной физической компоненте соответствует некоторая ветвь сигнального графа. В результате рассмотрения сигнального графа можно получить уравнение сохранения энергии и рассмотреть различные процессы с точки зрения сохранения энергии.

5. МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАФОВ И АЛГОРИТМЫ СТРУКТУРНОГО АНАЛИЗА

5.1. Основные характеристики графов

Граф G(X, Г) задан, если заданно непустое множество X={x_1, x_2, x_3, … x_n} и многозначное отображение Г множества X. Элементы множества X изображаются точками и называются вершинами графа, а отображение Г – отрезками, соединяющими элементы X с элементами Г и называются ребрами U или дугами графов $\overline{U}$ (рис.5.1,а). Нуль-граф – граф, состоящий из изолированных вершин, не соединенных дугами (рис.5.1,б).

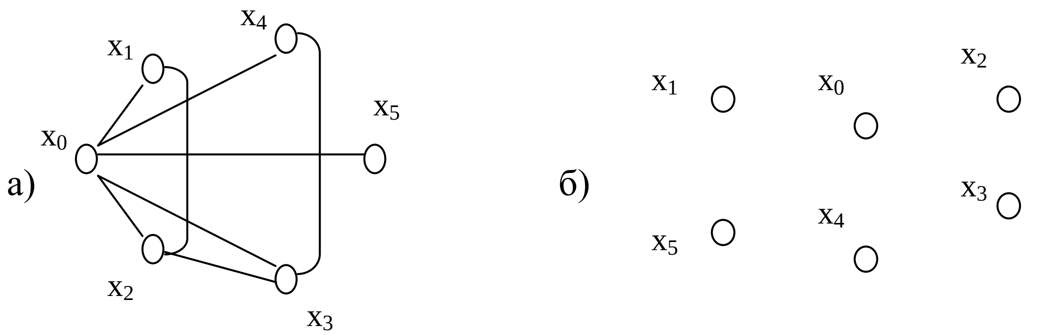


Рис. 5.1 Графическое представление графа: а - Граф G(X, Г), б – нуль-граф.

Неориентированный граф содержит только ребра. Ориентированный граф только дуги. Смешанный граф содержит ребра и дуги. Две вершины графа – смежные, если они определяют ребро или дугу графа. Две различные дуги называются смежными, если они имеют общую вершину. Каждой не изолированной вершине принадлежит одно или несколько ребер или дуг, которые называют инцидентными.

В направленных графах выделяют следующие типовые фигуры, образующиеся совокупностью их дуг:

1. Путь – последовательность дуг между любой парой вершин, в которой конец одной дуги является началом другой.

2. Контур – замкнутый путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают.

3. Петля – элементарный контур единичной длины.

В неориентированном графе выделяют типовые фигуры:

1. Цепь – непрерывная последовательность ребер между любой последовательностью вершин (простая цепь – все ребра различны, составная – есть повторяющиеся ребра).

2. Цикл – замкнутая цепь, в которой начальная и конечная вершины совпадают, также может быть простой и составной.

Взвешенный граф – ребрам, дугам или вершинам приписаны определенные веса в виде числовых значений или коэффициентов.

Связный граф – для каждой пары вершин существует соединяющая их цепь.

Несвязный граф состоит из нескольких отдельных связных графов.

Дерево – связный граф, в котором любая пара его вершин соединена только одной цепью.

Полный граф – любая пара его вершин соединена ребром.

Мультиграф – некоторые пары его вершин могут быть соединены более чем одним ребром.

Среди вершин ориентированного графа выделяют вершины – источники, вершины – истоки, и смешанные вершины.

К основным числовым характеристикам графа относятся:

υ – число вершин,

e – число ребер или дуг,

R(G) – ранг графа,

$\nu(G)$ – цикломатическое число,

$\chi(G)$ – число вершин связности,

$\lambda(G)$ – число реберной связности,

$R(G)= \upsilon - к$,

к – число связных компонентов несвязного графа r на единицу меньше,

Цикломатическое число $\nu(G)$ равно минимальному числу ребер, удаление которых приведет к образованию несвязного графа или тривиального графа, состоящего из одной вершины.

5.2. Матричное представление графа

Любой граф можно представить в виде матрицы. При рассмотрении графоаналитического подхода на этапах математического моделирования и структурного анализа используют следующие виды матриц:

- матрица ветвей [L];

- матрица смежности [S];
- матрица инцидентности [H];
- матрица циклов [M];
- матрица изоморфности [D];
- матрица достижимости [R] и контур достижимости [Q];
- матица пересечений [W];
- матрица контуров на дугах [C];
- матрица контуров на вершинах [Z];
- матрицы касаний контуров[F] и путей [E].

Каждая из матриц характеризует определенные свойства графа. Матричное представление графа позволяет отобразить структурные особенности графа. Матрицы можно использовать при составлении и решении различных систем уравнений, определении оптимальных вариантов расчета сложных технологических систем.

Пусть дан граф G(V,E), состоящий из числа вершин υ=|V| и числа дуг e=|E|.

Рассмотрим структуру данных матриц и особенности их формирования.

1. Матрица ветвей [L] – матрица порядка (2 х е) с элементами:

l_{1j} – равно номеру n-ой вершины, из которой выходит j-ая дуга.

l_{2j} – равно номеру m-ой вершины, в которую входит j-ая дуга.

2. Матрица смежности [S] – матрица порядка (υ х υ), строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа. 1 ставится, если i – вершина связана дугой с j – вершиной.

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ – если } i \text{ – вершина связана дугой с } j \text{ – вершиной;} \\ 0 \text{ – если } i \text{ – вершина не связана дугой с } j \text{ – вершиной.} \end{cases}$$

Если в матрице диагональный элемент равен единице, то возле этой вершины есть петля. Матрица [S] является квадратной, полностью отражает структуру графа и является исходной для структурного анализа

3. Матрица инцидентности [H] - размерность матрицы (υ х l)

$$h_{ij} = \begin{cases} -1 \text{ – если } j \text{ - дуга выходит из } i \text{ – вершины;} \\ 1 \text{ – если } j \text{ - дуга входит в } i \text{ – вершину;} \\ 0 \text{ – если } j \text{ – не соединена с } i \text{ – вершиной.} \end{cases}$$

4. Матрица циклов [M] – размерность матрицы (l х μ), где строки соответствуют дугам, а столбцы элементарным циклам графа.

$$\begin{cases} 0 \text{ – если } j \text{ - дуга не входит в } i \text{ –цикл;} \end{cases}$$

m_{ij} = 1 – если j - дуга входит в i –цикл и её ориентация совпадает с ори ентацией цикла;
-1 – если j - дуга входит в i –цикл, но её ориентация противоположна ориентации цикла.

Ориентация цикла принимается произвольно.

5. Матрица изоморфности (матрица процессов) [D] - размерность матрицы (n х m), где n – число вершин графа, m – максимальное из суммарного числа входящих и выходящих дуг, инцидентных i-ой вершине.

В i-строку матрицы [D] со знаком “+” вписывается номера дуг, входящих в i-вершину и со знаком “-”, выходящих из i-вершины.

Эта матрица отражает полную структуру графа, является исходной для структурного анализа, но используется только в алгоритмах анализа и не используется в матричных преобразованиях. Матрица [D] является более компактной и более универсальной в плане структурного анализа.

6. Матрица достижимости [R] и контр-достижимости [Q] - матрицы порядка (υ х υ), строки и столбцы которых соответствуют вершинам графа.

Элементы матрицы достижимости r_{ij} равны:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 – \text{если в графе существует по крайней мере один путь между } x_i \text{ и } x_j. \\ 0 – \text{в противном случае.} \end{cases}$$

То есть, данная матрица показывает из какой вершины какие другие вершины можно достигнуть.

При построении матрицы контр-достижимости отражаются структурные данные соответствующие обратной информации. Т.е. q_{ij}=1, если существует обратный путь от j к i-ой вершине.

7. Матица пересечений [W] – матрица порядка (υ х υ), строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа.

Элементы матрицы w_{ij} равны:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 – \text{если одновременно существует путь от i к j-вершине и наоборот;} \\ 0 – \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Элементы главной диагонали равны единицам.

8. Матрица контуров на дугах [C] - число строк равно числу контуров, число столбцов равно числу дуг.

Элементы матрицы c_{ij} равны:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ – если j-дуга принадлежит i-контуру.} \\ 0 \text{ – в противном случае.} \end{cases}$$

9. Матрица контуров на вершинах [Z] - Число строк равно числу контуров. Число столбцов равно числу вершин. Элементы матрицы c_{ij} равны:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ – если j-вершина принадлежит i-контуру.} \\ 0 \text{ – в противном случае.} \end{cases}$$

10. Матрицы касаний контуров и путей.

Контуры являются касающимися, если они содержат хотя бы одну общую вершину или дугу. Могут быть комбинации касающихся контуров по 2, 3, 4. в матрице касающихся контуров по 2 обозначают: $[F]_2$ строки и столбцы являются номера контуров исходного графа. Если i-й контур имеет общую вершину с j-м контуром, то они являются касающимися и элемент матрицы равен 1, иначе 0. считается что контур касается сам себя, следовательно, элементы главной диагонали равны 1. одним из главных свойств этой матрицы является симметричность относительно главной диагонали, благодаря этому в структурном анализе можно использовать только верхний или нижний треугольник.

Матрица [E] - матрица касаний путей с контурами. Размерность - число строк равно числу путей, число столбцов равно числу контуров.

Элемент этой матрицы e_{ij} равен 1 если i-й путь имеет хотя бы одну общую вершину с j-м контуром. Иначе e_{ij} равен 0.

5.3. Алгоритмы структурного анализа

5.3.1. Алгоритмы идентификации контуров и путей графа

Рассмотрим алгоритмы идентификации контуров с применением различных матриц.

1. Идентификация контуров с помощью матрицы смежности.

В этом алгоритме матрица смежности умножается сама на себя n раз и после каждого умножения анализируется содержимое главной диагонали. Если на главной диагонали получено 2 и более единиц, то, следовательно, определен контур на этих вершинах. Перемножение продолжается пока n не станет равно размерности матрицы или на главной диагонали все элементы будут равны 1.

Данный метод достаточно простой, быстро реализуемый, понятный, но он является эффективным только тогда, когда контуры в графе имею разные ранги. Если граф содержит контуры одинаковых рангов, то идентифицировать эти контуры не представляется возможным. Таким образом, использование данного метода требует предварительного анализа структуры графа на предмет выявления таких контуров и определения рангов контуров.

2. Идентификация контуров с помощью матрицы пересечений.

Данный алгоритм предусматривает построение матрицы пересечений [W] и анализ данных. Для построения матрицы [W] можно воспользоваться матричным соотношением:

$$[W]=[R]\otimes[Q]=[R]\otimes[R]^T,$$

где символ $\otimes$ - означает прямое булево умножение, когда элементы матриц умножаются друг на друга соответственно.

Анализ данных матрицы [W] позволяет сделать следующие заключения: для рис. 5 по матрице [W] определяются 2 контура, причем одинакового ранга, для графа рис.4 определить контуры по матрице [W] не представляется возможным, так как представленные контуры соприкасаются. Таким образом данный метод также не универсален и требует предварительного анализа структуры графа.

3. Идентификация контуров построением прадерева с корнем.

Данный метод является одним из универсальных алгоритмов, так как не требуется предварительного структурного анализа. Для этого алгоритма требуется модифицированная матрица смежности, которая получается из исходной матрицы смежности путем замещения единиц кодовыми номерами дуг.

Алгоритм можно представить в виде последовательности следующих операций:

1. последовательный просмотр элементов матрицы по строкам до встречи с ее элементом $s_{ij} \neq 0$;
2. переход к j-ой строке матрицы указанной ее элементом не равном 0;
3. передача номеров строк и столбцов и значения s_{ij} в специальный блок цифровой последовательности, где все числа сравниваются между собой;
4. повторение п.1-3 до тех пор пока:
   a) в последовательности N повторно появится элемент $s_{ij} \neq 0$, то есть будет идентифицирован контур; после этого в соответствующую строку матрицы [C] записываются номера дуг входящие в контур;
   b) в последовательности N появится номер строки матрицы [S] не имеющей выходных связей с другими вершинами графа;
5. возврат к строке последовательности содержащей элемент предшествующий элементу $s_{ij} \neq 0$;
6. повторение пунктов 1-5 до тех пор пока не вернемся к первому элементу отличному от 0 обнаруженному в п.1;
7. переход к элементу, если:
   a) $s_{ij+1} \neq 0$ – то повторить пункты 1-7;4
   b) $s_{ij+1}=0$ – то перейти к элементу $s_{ij+2};$
8. повторить пункты 1-7 пока j не станет равным n – число столбцов;

9. переход к строке матрицы с номером v, следующим первым после номеров строк зафиксированных в блоке цифровой последовательности;

10. если строка с номером v не обнаружена, то поиск прекращается. В противном случае повторяется пункты 1-9, где s_{ij} в п. 1 заменяется вновь обнаруженным элементом s_{vj}.

Замечания:

1. так как, данный алгоритм обладает свойством избыточности, то есть одни и те же контуры определены несколько раз, то перед записью информации в матрице [C], то необходимо проверят , нет ли в матрице [C] данного контура;

2. для того чтобы исключить избыточность можно наложить условие: при составлении блока цифровой последовательности не подниматься не строку выше той в которой распложен исходный элемент.

Для устранения избыточности при определении контуров можно воспользоваться модифицированными алгоритмами:

- можно ввести специальные метки с помощью которых контролировать те дуги, на которые уже идентифицировали контуры, но при большой размерности задачи, число меток увеличивается и задача усложняется;

- в процессе поиска контуров в матрицу контуров вписывать лишь контуры содержащие лишь первую вершину графа, все прочие контуры игнорируются до тех пор пока не будут идентифицированы все контуры содержащие первую вершину. После этого в матрице [S]* исключается первая строка и первый столбец и дальнейшему анализу уже подвергается сокращенная матрица [S]*.

4. Идентификация контуров с помощью матрицы изоморфности [D].

Для повышения эффективности, целесообразно перед поиском удалить кодовые номера тех вершин графа, которые не могу образовывать контур.

Алгоритм можно представить в виде последовательности следующих операций:

1. провести построчный просмотр элементов матрицы [D] до встречи в столбце элемента $d_{ij}<0$ и последовательно $j=j^*$ зафиксировать номер строки и значение d_{ij}^*;

2. выполнить для к- ой строки содержащей элемент $d_{ij}=|d_{ij}^*|$ до тех пор пока в фиксированной последовательности чисел появится положительное число q – контур идентифицирован, если этого не произойдет, то выполнить пункт 4 при b=q;

3. выписать отрицательные элементы последовательности N, заключенные между повторно встречающимися номерами q. Это дуги идентифицированного графа;

4. вернуться к строке i=l, где l первый положительное число, которое предшествует числу q в последовательности чисел N;

5. выполнить пункты 1-4 начиная просмотр i- ой строки матрицы с элемента d_{ij} до тех пор пока $i>m$, $j=j^*+1$ m – число столбцов матрицы;

если I < m, повторить пункт 4 при q=l до тех пор пока номер i-ой строки не станет равным номеру первого члена последовательности;

6. процесс можно закончить при j>m, в строке матрицы номер, которой соответствует номеру первого члена числовой последовательности.

5.3.2.Исследование контуров и путей на касание

Исследование контуров и путей на касания производится на основе матриц [L] – пути, контуров – [Z] и матрицы инциденций [H].

Матрица [E] – матрица касаний путей с контурами можно получить с применением матричной алгебры из соотношения:

$$[E]=[L]*[Z]^T.$$

Элементы матрицы [E] равные 0 указывают на отсутствие общих вершин с i-ой строкой матрицы путей с вершинами j-ой строки матрицы контуров.

Матрица касаний контуров по два $[F]_2$ также может быть определена в соответствии с формулой:

$$[F]_2 = [Z]*[Z]^T.$$

Для преобразования матрицы контуров и матрицы путей на вершинах, необходимо в начале получить матрицу путей на дугах, а затем выполнить следующие преобразования:

$$[Z]=[C]*[H_c]^T ,$$
$$[L]=[P]*[H_c]^T,$$

где $[H_c]$ – стоковая матрица инциденций, состоящая из элементов H_{ij}=-1.

$$[H]=[H_u] + [H_c]$$

$[H_u]$ – истоковая матрица, все элементы равны 1. для удобства анализа, H_c записывается без учета знака элементов.

Для определения матрицы касаний контуров по 3 необходимо использовать матрицу $[F]_2$. находим в матрице $[F]_2$ элементы равные 0. пример: пусть это элемент будет f_{bd} тогда складываем d-ую и b-ую строки матрицы $[F]_2$ и результат записываем в матрицу $[F]_3$ матрица касаний контуров по 4 строится с использованием информации матрицы $[F]_3$, так же определяем нулевой элемент и складываем строки и т.д.

В результате этих сложений матрица все больше заполняется единицами и в пределе все элементы станут равными 1.

5.3.3.Нахождение сильных компонент и построение конденсации графа

Сильная компонента (СК) графа определяется как ее максимально сильно связный подграф. Исходный граф может содержать несколько сильных компонент, но каждая вершина может принадлежать только одной СК графа.

Способы нахождения СК:

1. Использование матрицы пересечений. Матрица [W]=[R]$\otimes$[R]^T может быть получена данным способом. При этом анализируется содержимое матрицы [W], находят строки и столбцы с одинаковым расположением 1. Единица в таком блоке указывает на номер вершин, инцидентных выделенной СК. Проще матрица [V] строится путем исключения из матрицы [W] одинаковых строк.

2. Использование матрицы контуров. При этом используется матрица контуров [Z] на вершинах на основе этой матрицы строится матрица касаний [F]$_2$ и анализируется ее информация.

Конденсацией графа называют граф, вершинами которого соответствуют СК исходного графа, а множество его дуг есть подмножества дуг графа связывающих вершины. (т.е. связывающего СК). Конденсация графа – граф, в котором отсутствуют контуры.

Исходной информацией для построения графа является матрица СК и матрица смежности.

Матрица СК определяет множество вершин конденсаций, а матрица смежности устанавливает связь между ними

Для построения конденсации целесообразно построить промежуточную матрицу [Y] в соответствии с рекомендациями: просматривая первую строку матрицы СК [V] находят номера столбцов в которых стоят 1 и суммируют соответствующие строки матрицы смежности, в результате получается первая строка матрицы [Y] и т.д.

С помощью матрицы [Y] и матрицы СК строим матрицу конденсации [S$_y$] (матрица квадратная, число строк и столбцов равно числу сильных компонент) в соответствии с алгоритмом: просматриваем i- ую строку матрицу [Y] до встречи ее с элементом y_{ij} = 1 далее переходим к i-ой строке матрицы [V] и находим ее j-й элемент: если v_{ij} =1, то следует продолжить просмотр i-ой строки матрицы [Y] или перейти к следующей строке. Если окажется, что v_{ij}=0 то в j-ом столбце матрицы [V] нужно отыскать элемент v_{kj} = 1 и **к**-ые номера i-ой строки матрицы [S$_y$] заполнить единицами, в результате получим матрицу [S$_y$].

5.3.4. Декомпозиция многосвязных систем на подсистемы

Под задачей декомпозиции многосвязных систем будем понимать выделение из исходной системы взаимодостижимых подмножеств параметров, установление связи и выявления их соподчиненности. Практически эта задача совпадает с задачей построения конденсации графа.

Алгоритм декомпозиции:

1. построить матрицу смежности многосвязной системы [S];
2. сложить матрицу [S] с единичной матрицей;
3. присвоить матрице [R] значение матрицы [S];
4. последовательно возводить матрицу [S] в степень;

5. сравнивать матрицы [R] и $[S]^j$, если они отличны друг от друга то присвоить матрице [R] значение матрицы $[S]^j$ и возвратиться к п.4, если они равны то матрица [R] найдена и необходимо ее транспонировать;

6. вычислить матрицу [W];

7. матрицу пересечений [W] перестроить в матрицу СК путем вычеркивания одинаковых строк. Если окажется что матрица [V] содержит только 1 строку, то решений нет и система не является многосвязной;

8. с помощью матрицы СК – [V] и матрицы смежности [S] строится матрица [Y];

9. с помощью матриц [Y] и [V] строится матрица конденсаций $[S_y]$ и граф конденсаций.

Примечание: теоретические материалы по темам лекционных занятий подробно изложены в рекомендованной литературе, указанной в рабочей программе дисциплины. Список экзаменационных вопросов представлен в рабочей программе дисциплины.