Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»
в г. Смоленске

Методическое обеспечение дисциплины

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Смоленск – 2020 г.

Методические материалы составил:

д.ф.-м.н., доцент А.В. Борисов
подпись ФИО

«__24__» ___июня___ 2020 г.

Заведующий кафедрой «Оптико-электронные системы»:

подпись Беляков Михаил Владимирович

« 2 » июля 2020 г.

высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»
в г. Смоленске

Методическое обеспечение лекций
по дисциплине

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

(НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ)

Смоленск – 2020 г.

Конспект лекций[1]

Статика. Основные понятия и аксиомы. Сходящаяся система сил.

1.1 **Основные понятия и положения статики. Статикой** называется раздел теоретической механики, в котором рассматриваются системы сил, приложенные к твердым телам, и условия их равновесия.

1.1.1 Сила и система сил. ***Силой*** называется мера механического взаимодействия между телами, в результате которого тела получают ускорения или деформируются. Сила характеризуется тремя параметрами: числовым значением (модулем), измеряемой в ньютонах, точкой приложения и направлением действия.

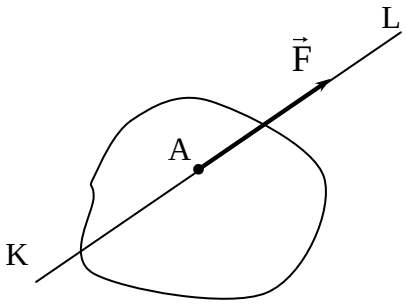


Рисунок 1.1

Системой сил называется совокупность сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$, приложенных к одному телу. Если, не изменяя состояния тела одну систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$, действующих на него, можно заменить другой системой $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m)$, то такие две системы называются ***эквивалентными системами сил***.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_m).$$

Если, не изменяя состояния тела систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$, действующих на него, можно заменить одной силой $\vec{R}$, то эта сила называется ***равнодействующей.***

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}.$$

Если под действием системы сил тело находится в равновесии, то такая система сил называется ***уравновешенной или эквивалентной нулю.***

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \sim 0.$$

1.1.2 Аксиомы статики. Аксиомы статики являются положениями, выведенными из многовекового опыта человечества.

Аксиома 1 (о равновесии системы двух сил). Под действием системы двух сил тело будет находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по величине, направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.

Аксиома 2 (о добавлении (отбрасывании) системы сил, эквивалентной нулю). Состояние тела не изменится, если к нему добавить (или отбросить) уравновешенную систему сил.

Аксиома 3 (параллелограмма сил). Две силы, приложенные в одной точке твердого тела, можно заменить одной равнодействующей силой, равной их геометрической сумме.

Аксиома 4 (о равенстве сил действия и противодействия). Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.

Аксиома 5 (отвердевания). Равновесие деформируемого тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать абсолютно твердым.

1.1.3 Связи и их реакции. Если движение тела не ограничено никакими другими телами, то такое тело называется *свободным*, в противном случае оно называется *несвободным*. Тело, которое ограничивает движение данного тела и находится с ним в соприкосновении, называется *связью*. Сила, с которой тело действует на связь, называется *силой давления*. Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется *силой реакции* или *реакцией связи*.

---

[1]Учебно-методический комплекс дисциплины «Теоретическая механика»/ Кончина Л.В., Тулегенова К.Б. – Алматы: КазНТУ. 2004. – 152 с.

Примеры определения реакций связей.

1. *Гладкая неподвижная поверхность (опора).* Если твердое тело опирается на идеально гладкую поверхность, то реакция данной поверхности приложена в точке касания и направлена по нормали к поверхностям соприкасающихся тел ($\vec{N}$ - нормальная реакция, рисунок 1.2).

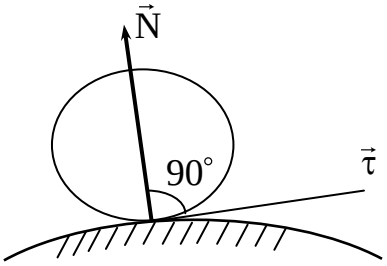


Рисунок 1.2

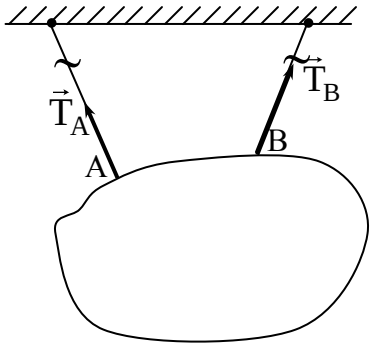
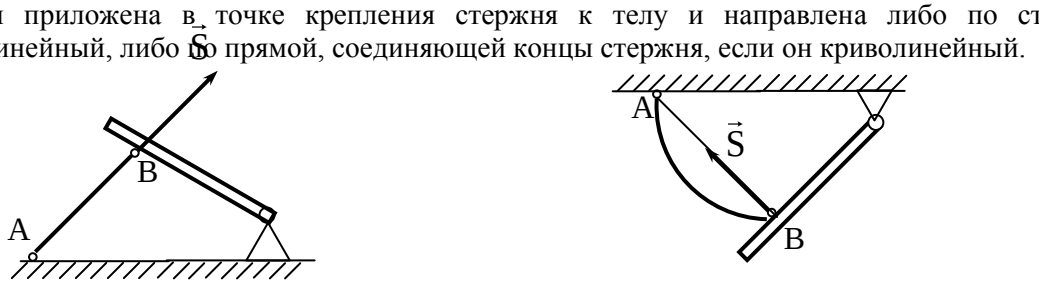


Рисунок 1.3

2. *Гибкая нерастяжимая связь* (нить, канат, трос, цепь и др.). Реакция направлена по связи от точки крепления к точке подвеса ($\vec{T}$ -сила натяжения, рисунок 1.3).

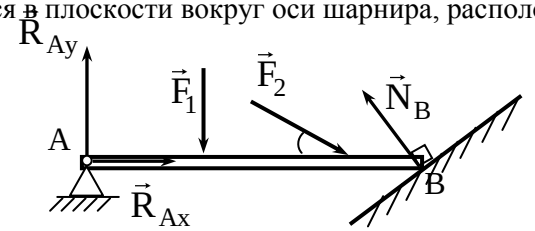
3. *Невесомый стержень* (весом стержня можно пренебречь по сравнению с нагрузками на него). Реакция приложена в точке крепления стержня к телу и направлена либо по стержню, если он прямолинейный, либо по прямой, соединяющей концы стержня, если он криволинейный.



а) б)

Рисунок 1.4

Цилиндрический неподвижный шарнир (опора, подшипник) – устройство, позволяющее твердому телу вращаться в плоскости вокруг оси шарнира, расположенной перпендикулярно этой плоскости.



При таком креплении реакция раскладывается на две составляющих, направленных по осям x и y.

4. *Цилиндрический подвижный шарнир (опора на катках).* Реакция лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, направлена перпендикулярно плоскости движения шарнира ($\vec{R}_B$ - реакция подвижного цилиндрического шарнира, рисунок 1.5)

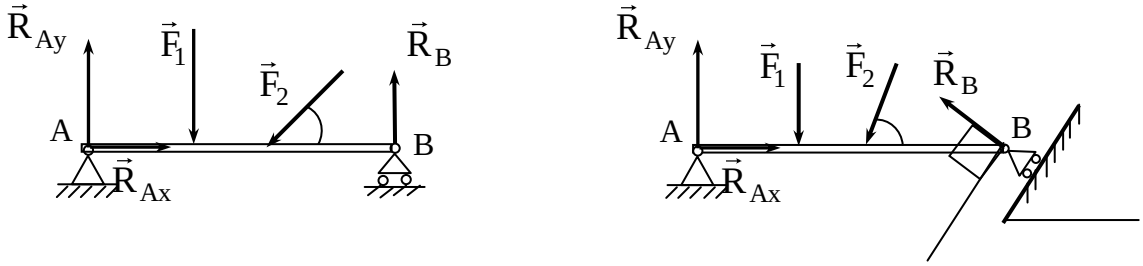
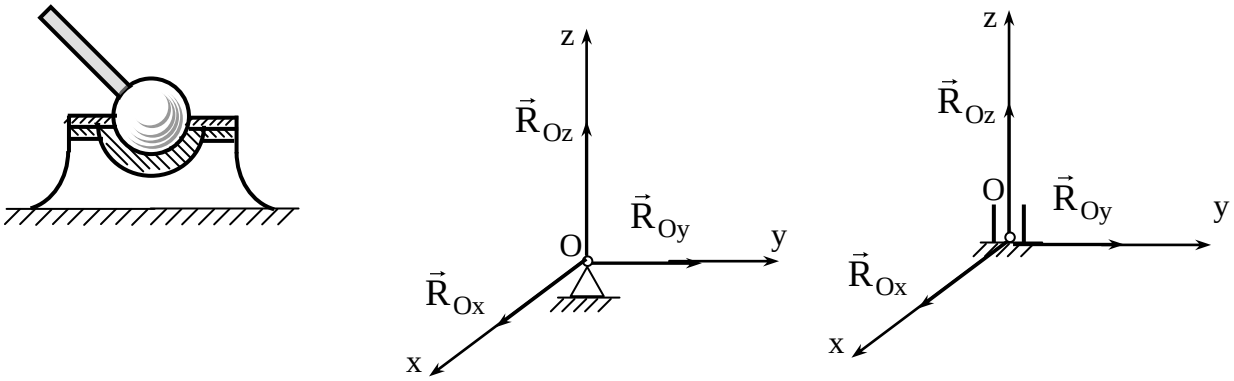


Рисунок 1.5

5. *Сферический (шаровой) шарнир* – устройство, позволяющее твердому телу вращаться внутри сферической полости вокруг центра шарнира О. Реакция $\vec{R}$ сферического шарнира (рисунок 1.6 а)) может иметь любое направление в пространстве и раскладывается на три составляющих, направленных по осям x, y, и z ($\vec{R}_{Ox}, \vec{R}_{Oy}, \vec{R}_{Oz}$ - составляющие реакции схематически изображенного сферического шарнира, рисунок 1.6 б)). Такие же составляющие реакции имеет подпятник – устройство, представляющее собой совокупность цилиндрического шарнира и опорной плоскости и позволяющее телу вращаться вокруг точки О (рисунок 1.6 в)).



а) б) в)

Рисунок 1.6

При решении задач необходимо использовать аксиому связей.

*Аксиома 6. (*освобождаемости от связей). Любую связь, действующую на тело, можно отбросить и заменить ее действие реакцией.

1.1.4 Система сходящихся сил.

Сходящейся называется такая система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей. *Теорема*. Система сходящихся сил при приведении к данному центру О имеет равнодействующую $\vec{R}$, проходящую через точку О и равную их геометрической сумме.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \,. \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

Равнодействующую системы сходящихся сил можно определить аналитически через проекции сил на оси координат, учитывая, что проекция геометрической суммы векторов на любую ось равна сумме проекций складываемых векторов на ту же ось

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \,. \qquad (1.2.2)$$

Модуль равнодействующей

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \,. \qquad (1.2.3)$$

Ее направление определяется направляющими косинусами

$$\cos(\vec{R}\overset{\Lambda}{,}\, x) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}\overset{\Lambda}{,}\, y) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R}\overset{\Lambda}{,}\, z) = \frac{R_z}{R} \qquad (1.2.4)$$

1.1.4 Условия равновесия системы сходящихся сил. *Теорема.* Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этой системы (или геометрическая сумма всех сил) была равна нулю:

$$\vec{R} = 0 \,. \qquad (1.2.5)$$

Необходимые и достаточные условия равновесия пространственной системы сходящихся сил записываются в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0. \qquad (1.2.6)$$

Для *равновесия пространственной системы сходящихся сил*, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил на каждую из трех декартовых осей координат были равны нулю.

Для *равновесия плоской системы сходящихся сил*, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на две декартовые оси координат, лежащие в плоскости действия сил (xOy), были равны нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0. \qquad (1.2.7)$$

1.1.5 Теорема о трех непараллельных силах. *Теорема.* Если на тело действуют три силы, линии действия двух из которых пересекаются в одной точке, то для равновесия тела необходимо и достаточно, чтобы все три силы лежали в одной плоскости, а их линии действия пересекались в одной точке (доказательство при чтении лекции).

Теория моментов сил. Теория пар сил.

1.3 Теория моментов.

1.3.1 Момент силы относительно точки. Под действием силы тело может не только двигаться, но и вращаться. Вращательное действие силы характеризуется моментом.

Моментом силы $\vec{F}$ *относительно точки O* называется вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$, приложенный в этой точке, величина (модуль) которого равен произведению модуля силы на плечо силы относительно точки, направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через точку и линию действия силы, в ту сторону откуда вращение, совершаемое силой, видно происходящим против часовой стрелки (рисунок 1.7).

Величина или модуль момента силы относительно точки O записывается в виде:

$$\left|\vec{m}_O(\vec{F})\right| = F \cdot h\,. \qquad (1.3.1)$$

Плечом силы относительно точки называется кратчайшее расстояние (перпендикуляр) между точкой и линией действия силы.

Вектор момента силы относительно точки можно записать в виде векторного произведения радиуса-вектора точки приложения силы и вектора силы:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}\,. \qquad (1.3.2)$$

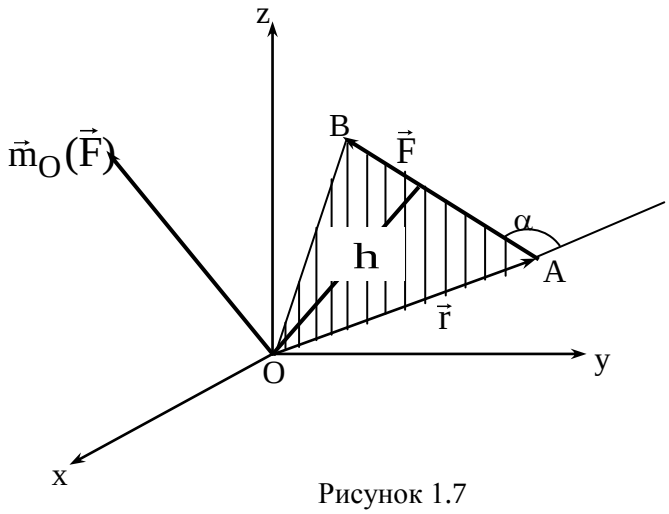


Рисунок 1.7

1.3.2 Пара сил и ее момент. *Парой сил (парой)* называются две параллельные, равные по модулю и противоположно направленные силы. Под действием пары сил тело совершает вращательное движение, следовательно, пара сил обладает моментом. Плоскость (Π), проходящая через линии действия сил, составляющих пару, называется *плоскостью действия пары*. Кратчайшее расстояние (перпендикуляр) между линиями действия сил, составляющих пару, называется *плечом пары* (рисунок 1.8).

Геометрическая сумма моментов этих двух сил относительно любой точки О с учетом того, что $\vec{F}' = -\vec{F}$, можно получить в виде:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{BA} \times \vec{F}'.$$

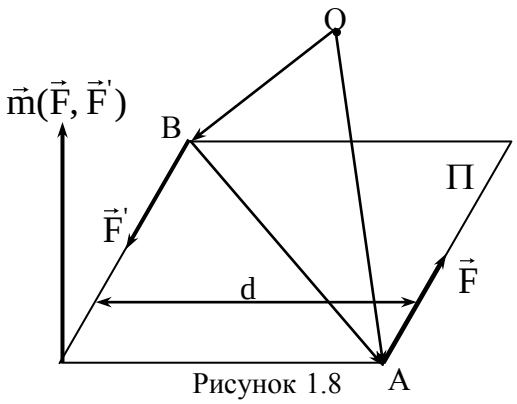


Рисунок 1.8

Это выражение называется *вектором момента пары сил*, причем оно не зависит от выбора точки О:

$$\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}') = \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{BA} \times \vec{F}'. \qquad (1.3.4)$$

Величина (модуль) момента пары сил равна произведению модуля одной из сил, составляющих пару, на плечо пары d:

$$\left| \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}') \right| = F \cdot d.$$

Вектор момента пары сил направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда поворот, совершаемый парой, виден происходящим против часовой стрелки. Приложить его можно в любой точке, так как он не зависит от выбора точки О, то есть вектор момента пары сил является свободным вектором.

1.3.3 Теоремы о парах. *Теорема 1.* Две пары сил, лежащие в одной плоскости, можно заменить одной парой, момент которой равен геометрической сумме моментов данных пар.

Теорема 2. Две пары сил с геометрически равными моментами эквивалентны.

Теорема 3. Две пары сил, лежащие в пересекающихся плоскостях можно заменить одной парой, момент которой равен геометрической сумме моментов данных пар.

Следствие из теорем 1, 2, 3. Любое количество пар сил, лежащих в разных плоскостях, можно заменить одной парой, момент которой равен геометрической сумме моментов всех пар. Таким образом, если на тело действует система пар сил с моментами $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \ldots, \vec{m}_n$, то их можно заменить одной парой с моментом

$$\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \ldots + \vec{m}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k .$$

Условие равновесия системы пар. Для равновесия тела, находящегося под действием пар сил с моментами $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \ldots, \vec{m}_n$, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма моментов всех пар была равна нулю:

$$\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \ldots + \vec{m}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k = 0 .$$

1.4 Основная теорема статики.

1.4.1 Лемма о параллельном переносе силы.

Лемма. Состояние тела не изменится, если силу перенести параллельно себе в другую точку, добавляя при этом пару сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки (доказательство при чтении лекции).

1.4.2 Основная теорема статики. Пусть на тело действует система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$. Геометрическая сумма этих сил называется *главным вектором системы:*

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k . \qquad (1.4.1)$$

Геометрическая сумма моментов всех сил относительно точки О называется *главным моментом системы* относительно точки О:

$$\vec{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_k) . \qquad (1.4.2)$$

Теорема. Любую систему сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к данному центру О можно привести к одной силе, равной главному вектору системы и приложенной в центре

приведения, и к одной паре сил, момент которой равен главному моменту системы (доказательство во время чтения лекции).

1.4.3 Условия равновесия. *Теорема.* Для равновесия системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы сил были равны нулю (без доказательства).

$$\vec{F} = 0, \quad \vec{M}_O = 0 . \tag{1.4.3}$$

1.4.4 Теорема Вариньона. *Теорема.* Если система сил имеет равнодействующую, то ее момент относительно любой точки равен геометрической сумме моментов всех сил относительно той же точки (без доказательства).

$$\vec{m}_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k), \tag{1.4.4}$$

Произвольная плоская система сил.

1.5 *Произвольной плоской* называется такая система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости. Для таких сил векторы моментов относительно точки, лежащей в плоскости действия сил, будут параллельны друг другу. В связи с этим для плоской системы сил вместо векторов моментов рассматривают их алгебраические величины.

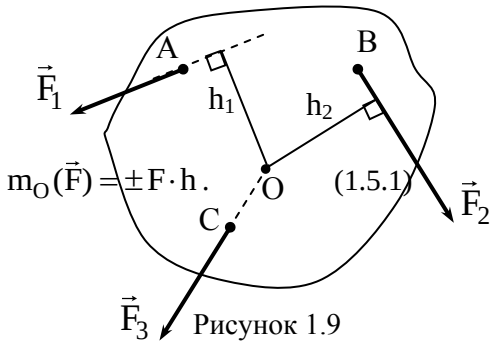


Рисунок 1.9

1.5.1 Алгебраические величины момента силы относительно точки и момента пары сил. *Алгебраической величиной момента силы относительно точки* называют взятое с определенным знаком произведение модуля силы на плечо силы относительно точки:

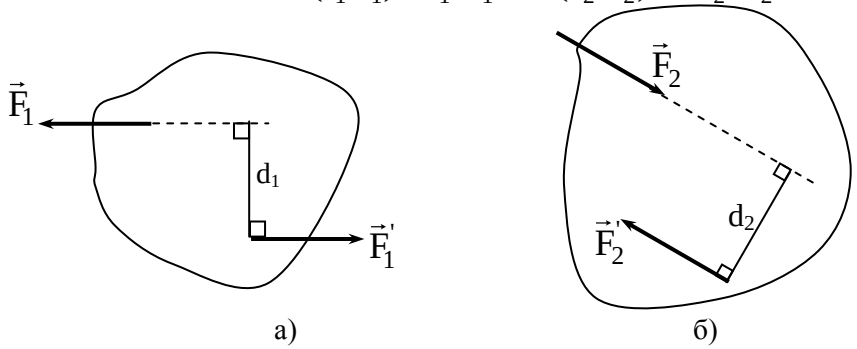
Знак плюс берется, если сила стремится повернуть тело вокруг точки против часовой стрелки, и знак минус – если по часовой.

Алгебраической величиной момента пары сил называют взятое с определенным знаком произведение модуля одной из сил, составляющих пару, на плечо пары сил:

$$m(\vec{F}, \vec{F}') = \pm F \cdot d . \tag{1.5.2}$$

Знак плюс берется, если пара стремиться повернуть тело против часовой стрелки и минус – если по часовой (рисунки 1.10 а и б).

$$m(\vec{F}_1, \vec{F}_1') = F_1 \cdot d_1, \quad m(\vec{F}_2, \vec{F}_2') = -F_2 \cdot d_2$$



а) б)

Рисунок 1.10

1.5.2 Главный вектор и главный момент произвольной плоской системы сил. Для произвольной плоской системы сил *главный вектор* является геометрической суммой всех сил и проектируется на две оси декартовой системы координат.

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} . \tag{1.5.3}$$

Величина (модуль) главного вектора определяется по формуле:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}\,, \qquad (1.5.4)$$

а направление – с помощью направляющих косинусов:

$$\cos(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{x}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{y}) = \frac{F_y}{F}. \qquad (1.5.5)$$

Главный момент относительно точки О в этом случае является алгебраической суммой моментов всех сил относительно точки О:

$$M_O = \sum_{k=1}^{n} m_O(\vec{F}_k). \qquad (1.5.6)$$

1.5.3 Условия равновесия произвольной плоской системы сил. Из общих условий равновесия системы сил (1.16) вытекают векторные условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\vec{F} = 0, \quad M_O = 0.$$

Первая форма условий равновесия произвольной плоской системы сил: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на две координатные оси (x и y), лежащие в плоскости действия сил, и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки О были равны нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} m_0(\vec{F}_k) = 0. \qquad (1.5.7)$$

Вторая форма условий равновесия произвольной плоской системы сил: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось (x), лежащую в плоскости действия сил, и алгебраические суммы моментов всех сил относительно двух точек (A и B), не лежащих на одном перпендикуляре к этой оси, были равны нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) = 0, \ \sum_{k=1}^{n} m_B(\vec{F}_k) = 0. \qquad (1.5.8)$$

Третья форма условий равновесия произвольной плоской системы сил: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы моментов всех сил относительно трех точек (A, B и C), не лежащих на одной прямой, были равны нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) = 0, \ \sum_{k=1}^{n} m_B(\vec{F}_k) = 0, \ \sum_{k=1}^{n} m_C(\vec{F}_k) = 0. \qquad (1.5.9)$$

Произвольная пространственная система сил

1.6 Произвольная пространственная система сил. *Произвольной пространственной* называется система сил, линии действия которых расположены произвольным образом в пространстве.

1.6.1 Момент силы относительно оси. Проекция вектора момента силы относительно точки О на какую-нибудь ось, проходящую через эту точку, называется *моментом силы относительно этой оси*. Исходя из проекций вектора момента силы относительно точки О на оси x, y, z, можно записать *аналитические выражения момента силы* $\vec{F}$ *относительно осей координат x, y, z:*

$$\left.\begin{aligned} m_x(\vec{F}) &= y F_z - z F_y, \\ m_y(\vec{F}) &= z F_x - x F_z, \\ m_z(\vec{F}) &= x F_y - y F_x. \end{aligned}\right\} \qquad (1.6.1)$$

Для вычисления момента силы относительно оси можно воспользоваться другим его определением: *моментом силы относительно оси* называют алгебраический момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью (рисунок 1.12).

Согласно этому определению

$$m_z\left(\vec{F}\right) = \pm F_{xy} \cdot h, \qquad (1.6.2)$$

где F_{xy} – модуль проекции силы $\vec{F}$ на плоскость xy, перпендикулярную к оси Oz, h – плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки O пересечения оси Oz с плоскостью xy.

Момент $m_z(\vec{F})$ будет иметь знак плюс, если с положительного направления оси Oz поворот, который стремится совершить сила $\vec{F}_{xy}$, виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак минус – когда по ходу часовой стрелки.

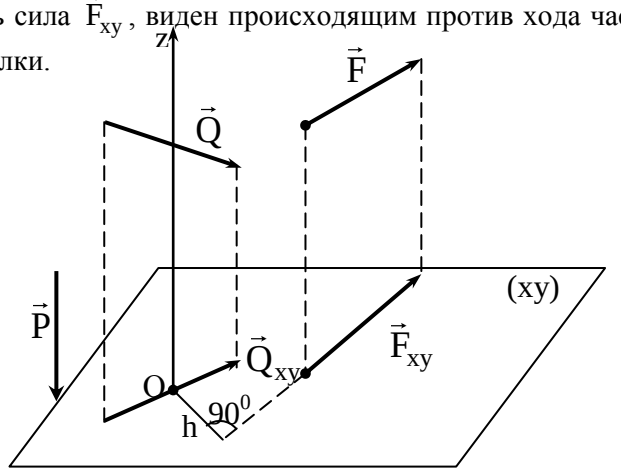


Рисунок 1.12

Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях:

1) если сила параллельна оси, так как ее проекция на плоскость, перпендикулярную этой оси, равна нулю ($P_{xy} = 0$, рисунок 1.12);

2) если линия действия силы пересекает ось, тогда плечо проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью равно нулю ($h_Q = 0$, рисунок 1.12).

1.6.2 Главный вектор и главный момент произвольной пространственной системы сил. Согласно определениям главного вектора $\vec{F}$ и главного момента $\vec{M}_O$ они являются геометрической суммой всех сил и геометрической суммой моментов всех сил относительно точки O соответственно. Для произвольной пространственной системы сил оба вектора проектируются на три оси декартовой системы координат:

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \quad F_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}; \tag{1.6.3}$$

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_x(\vec{F}_k), \quad M_y = \sum_{k=1}^{n} m_y(\vec{F}_k), \quad M_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k), \tag{1.6.4}$$

а их величины и направляющие косинусы определяются по следующим формулам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\vec{F}\,\hat{}\,\vec{x}) &= \frac{F_x}{F}, \\ \cos(\vec{F}\,\hat{}\,\vec{y}) &= \frac{F_y}{F}, \\ \cos(\vec{F}\,\hat{}\,\vec{z}) &= \frac{F_z}{F} \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} \cos(\vec{M}_O\,\hat{}\,\vec{x}) &= \frac{M_x}{M_O}, \\ \cos(\vec{M}_O\,\hat{}\,\vec{y}) &= \frac{M_y}{M_O}, \\ \cos(\vec{M}_O\,\hat{}\,\vec{z}) &= \frac{M_z}{M_O} \end{aligned}\right\}.$$

1.6.3 Условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Случай параллельных сил. Из векторных условий равновесия:

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0, \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k\right) = 0$$

для произвольной пространственной системы сил следуют аналитические условия равновесия:

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad F_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0,$$

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad M_y = \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad M_z = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k\right) = 0,$$

Таким образом, *для равновесия пространственной системы сил*, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три оси декартовой системы координат и суммы моментов сил относительно тех же осей также были равны нулю.

Трение

1.6.4 Трение скольжения. При движении или стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения возникает *сила трения скольжения*. Возникновение таких сил обусловлено шероховатостью поверхностей и наличием сцепления у прижатых друг к другу тел. В связи с этим сила реакции шероховатой поверхности ($\vec{R}$) имеет две составляющих: нормальную ($\vec{N}$), направленную по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел, и силу трения скольжения ($\vec{F}_{тр}$), направленную по касательной в сторону, противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть (рисунок 1.13).

В теоретической механике рассматривается только *сухое трение* между поверхностями тел, то есть такое трение, когда между телами нет смазывающих веществ.

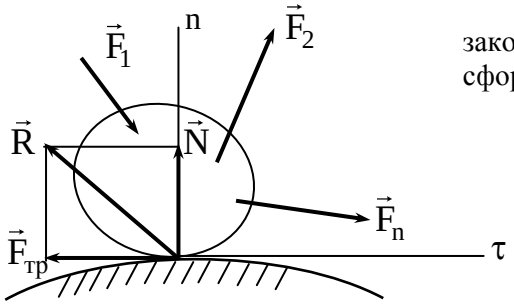


Рисунок 1.13.

Сухое трение исследовал Кулон. Установленные законы трения скольжения при покое, можно сформулировать следующим образом:

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения возникает сила трения, которая может меняться от нуля до максимального значения $F^*_{тр}$, то есть

$$0 \le F_{тр} \le F^*_{тр}.$$

2. Максимальное значение силы трения пропорционально нормальному давлению, то есть

$$F^*_{тр} = f_0 \cdot N,$$

где безразмерный коэффициент f_0 называется *статическим коэффициентом трения скольжения.*

3. Статический коэффициент трения скольжения определяется опытным путем и зависит от материалов соприкасающихся трущихся тел и состояния поверхностей (характера обработки, температуры, влажности и т. д.). Значение максимальной силы трения $F^*_{тр}$ в широких пределах не зависит от площади соприкосновения трущихся поверхностей.

Из этих законов следует, что при равновесии при наличии трения скольжения необходимо:

$$F_{тр} \le f_0 \cdot N.$$

1.6.5 Угол и конус трения.

Наибольший угол φ_0 между полной реакцией, построенной при максимальном значении силы трения, и направлением нормальной реакции называется *углом трения* (рисунок 1.14). Из рисунка 1.14 видно, что

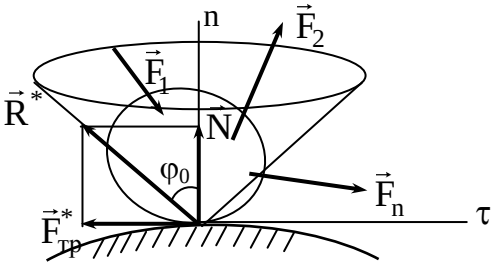


Рисунок 1.14

$$tg\varphi_0 = \frac{F^*_{тр}}{N}.$$

Но, так как $F^*_{тр} = f_0 \cdot N$, то

$$tg\varphi_0 = f_0.$$

Конусом трения называют конус, описанный вектором $\vec{R}^*$, вокруг направления нормальной реакции. Его можно получить, изменяя активные силы так, чтобы тело стремилось выйти из положения равновесия по всем возможным направлениям. При этом, если коэффициент трения скольжения во всех направлениях одинаков, то конус трения будет круговым (рисунок 1.14). Если коэффициент трения зависит от направления возможного движения тела, то конус трения будет некруговой.

Центр тяжести

1.6.6 Центр параллельных сил. Если рассмотреть систему параллельных сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$, которая имеет равнодействующую

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k,$$

то при повороте этих сил вокруг их точек приложения в одну и ту же сторону на один и тот же угол получаемые системы сил будут являться системами параллельных сил с теми же самыми модулями и точками приложения. Равнодействующая каждой из таких систем сил будет иметь тот же модуль, но различные направления. При всех поворотах линия действия равнодействующей будет проходить через одну и ту же точку С, которая называется *центром параллельных сил*.

Радиус-вектор этой точки есть *радиус-вектора центра параллельных сил:*

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k F^*_k}{\sum_{k=1}^{n} F^*_k},$$

где $\vec{r}_k$ - радиус-вектор точки приложения силы $\vec{F}_k$, а F^*_k равна либо F_k, либо $(-F_k)$ в зависимости от направления.

1.6.7 Центр тяжести твердого тела.

Равнодействующая сил тяжести $\Delta\vec{p}_1, \Delta\vec{p}_2, \ldots, \Delta\vec{p}_n$, действующих на точки тела, $\vec{P} = \sum_{k=1}^{n} \Delta\vec{p}_k$ как равнодействующая системы параллельных сил, будет все время проходить через одну и ту же точку. Модуль этой силы будет являться весом тела. *Центром тяжести тела* называется центр системы параллельных сил, которые приближенно образуют силы тяжести всех его точек. *Радиус-вектор центра тяжести тела* в соответствии с (1.8.2) можно вычислить по формуле:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \Delta p_k}{\sum_{k=1}^{n} \Delta p_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \Delta p_k}{P}.$$

Если тело нельзя разбить на отдельные точки (сплошная среда или континуум), то *радиус-вектор центра тяжести объема* можно вычислить по формуле:

$$\vec{r}_C = \frac{\iiint\limits_{(V)} \vec{r}\,\gamma\,dV}{\iiint\limits_{(V)} \gamma\,dV},$$

где γ - удельный вес тела.

Для однородных тел *радиус-векторы центров тяжести однородного объема*:

$$\vec{r}_C = \frac{\iiint\limits_{(V)} \vec{r}\,dV}{V}.$$

1.6.8 Способы определения центров тяжести.

1. *Способ симметрии*. Применяется в тех случаях, когда однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии. Центр тяжести такого тела лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

2.Способ разбиения (группировки). Применяется , когда тело можно разбить на части, положения центров тяжестей которых известны или предварительно могут быть определены. Положение центра тяжести такого сложного тела определяется по общим формулам, но вместо элементарных частиц берутся его конечные части, на которые оно разбито.

3.Способ дополнения (отрицательных весов). Применяется, когда тело имеет полости или вырезы. Он является частным случаем способа разбиения, при котором для вырезанных частей веса (объемы, площади) берутся с отрицательными знаками.

1.6.9 Центры тяжести некоторых однородных тел. Рассмотрим некоторые из таких однородных тел.

Площадь треугольника. Центр *тяжести однородной площади треугольника (точка C) лежит на пересечении его медиан*. При этом, как известно,

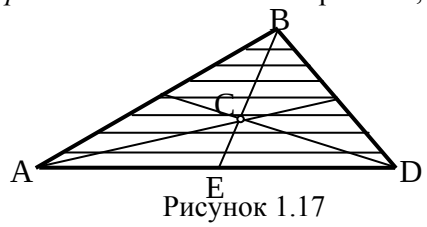


Рисунок 1.17

$$CE = \frac{1}{3}BE, \quad BC = \frac{2}{3}BE$$

Дуга окружности. Рассмотрим дугу окружности радиуса R с центральным углом AOB = 2α (рисунок 1.18). Выберем ось Ox так, чтобы она являлась осью симметрии, тогда центр тяжести дуги будет лежать на этой оси. Координату x_C центра тяжести дуги можно найти, учитывая, что дуга однородная линия, тогда

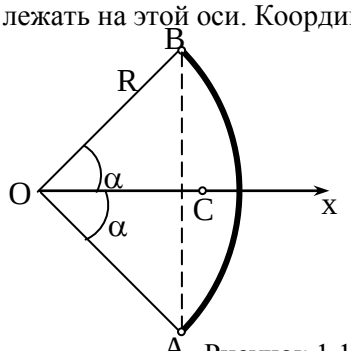
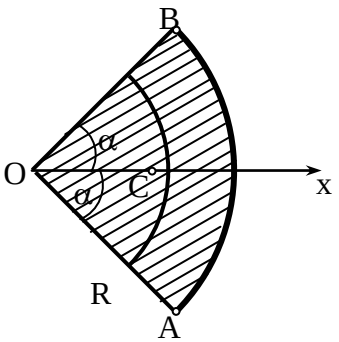


Рисунок 1.18

$$x_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} x \cdot d\ell.$$

Проведя некоторые преобразования, которые рассматриваются на лекции, *координату центра тяжести однородной дуги окружности* радиуса R с центральным углом 2α в виде

$$x_C = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (1.8.7)$$



Площадь кругового сектора. Центр тяжести площади кругового сектора радиуса R с центральным углом 2α находится на оси симметрии, которую обозначим осью Ox (рисунок 1.19).

Разобьем мысленно площадь сектора OAB радиусами, проведенными из точки O, на n секторов.

Используя формулу (1.8.7) для центра тяжести дуги окружности, можно получить формулу для определения

координаты центра тяжести площади однородного кругового сектора радиуса R с центральным углом 2α:

Рисунок 1.19

$$x_C = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}. \qquad (1.8.8)$$

Кинематика точки.

2.1 Введение в кинематику. *Движение тела* – это его перемещение по отношению к другому телу, которое называется телом отсчета. С телом отсчета связывают систему координат и часы, вместе они образуют *систему отсчета*.

2.2 Кинематика точки. В кинематике точкой называется тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями, проходимыми телом. *Основные задачами кинематики точки* можно сформулировать следующим образом: найти способы задания движения и, исходя из них, найти методы определения скорости и ускорения точки.

2.2.1 Способы задания движения точки. Задать движение точки - это значит найти такой способ, с помощью которого в любой момент времени можно найти положение точки в пространстве. В кинематике различают три способа задания ее движения.

1. *Векторный способ задания движения точки.* При этом способе задается радиус-вектор точки $\vec{r}$, как функция времени t, то есть

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (2.2.1)$$

2. *Координатный способ задания движения точки*. Этот способ задания движения требует задания системы координат и координат точки, как функций времени, так как положение точки по отношению к какой-либо системе координат полностью определяется ее координатами. В декартовой системе координат необходимо задать координаты точки x, y,в виде функций времени

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \qquad (2.2.2)$$

Уравнения (2.2.2) являются уравнениями движения точки в декартовой системе координат.

3. *Естественный способ задания движения точки.* В этом способе задается траектория точки, начало отсчета дуги на этой траектории, положительное направления отсчета дуги и длина дуги σ, как функция времени, то есть

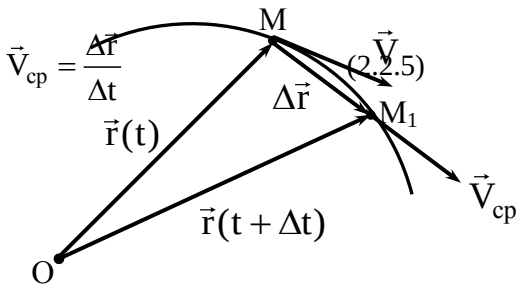
$$\sigma = \sigma(t). \qquad (2.2.3)$$

Если движение точки происходит в положительном направлении, то дифференциал дуги $d\sigma = \frac{d\sigma}{dt}dt = \dot{\sigma}(t)dt > 0$, если же движение происходит в отрицательном направлении, то этот дифференциал будет меньше нуля. Путь, проходимый точкой, будет всегда положительным, то есть $dS = |d\sigma|$.

2.2.2 Скорость и ускорение точки. Рассмотрим случаи определения основных характеристик движения точки – скорости и ускорения при различных способах задания ее движения.

1. *Векторный способ*. Пусть в момент времени t положение точки определяется радиус-вектором $\vec{r}(t)$, а в момент $t + \Delta t$ – радиус-вектором $\vec{r}(t + \Delta t)$ (рисунок 2.1). Обозначим разность этих векторов через $\Delta\vec{r}$, то есть

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \qquad (2.2.4)$$



Вектор средней скоростью направлен так же, как вектор $\Delta\vec{r}$.

Скоростью точки в данный момент называется

Рисунок 2.1

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \qquad (2.2.6)$$

Из формулы (2.2.6) следует, что *вектор скорости точки равен первой производной от ее радиус-вектора по времени:*

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \qquad (2.2.7)$$

Направлен вектор скорости по касательной к траектории точки (рисунок 2.1).

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}. \qquad (2.2.8)$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}\,- \qquad (2.2.9)$$

вектор ускорения точки равен первой производной от вектора скорости точки или второй производной от радиус-вектора точки по времени.

Вектор ускорения точки всегда направлен внутрь кривой, по которой движется точка.

2. *Координатный способ*. Рассмотрим движение в неподвижной декартовой системе координат Oxyz. П*роекции вектора скорости на оси декартовой системы координат*:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \qquad (2.2.10)$$

Величина скорости точки определяется формулой

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \qquad (2.2.11)$$

а *направление* – направляющими косинусами

$$\cos(\vec{V}\,\hat{,}\,\vec{x}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\vec{V}\,\hat{,}\,y) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(\vec{V}\,\hat{,}\,z) = \frac{V_z}{V} \qquad (2.2.12)$$

Аналогично *проекции ускорения на оси декартовой системы координат*:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z = \ddot{z}, \qquad (2.2.13)$$

величину ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (2.2.14)$$

и *направляющие косинусы вектора ускорения*:

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{x}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,y) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,z) = \frac{a_z}{a}. \qquad (2.2.15)$$

3. Естественный способ. При этом способе задания движения точки, исходя из общего определения ее скорости, после некоторых преобразований для *вектора скорости точки при задании ее движения естественным способом* получится выражение

$$\vec{V} = \frac{d\sigma}{dt}\vec{\tau}. \qquad (2.2.16)$$

Можно ввести обозначение $V_\tau = \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma}$, которое будет определять проекцию вектора скорости на касательную, тогда

$$\vec{V} = V_\tau \cdot \vec{\tau}. \qquad (2.2.17)$$

Вектор скорости будет направлен по касательной к траектории точки в положительном направлении отсчета дуги, если $\Delta\sigma > 0$, и – в отрицательном, если $\Delta\sigma < 0$. Величина скорости

$$V = |V_\tau| = \left|\frac{d\sigma}{dt}\right| = |\dot{\sigma}|. \qquad (2.2.18)$$

В*ектор ускорения точки* является геометрической суммой касательной и нормальной составляющих ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n . \qquad (2.2.19)$$

Проекция ускорения на направление касательной называется *касательным (тангенциальным) ускорением точки*

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \dot{V}_\tau = \ddot{\sigma} , \qquad (2.2.20)$$

а проекция ускорения на главную нормаль называется *нормальным ускорением точки*

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} , \qquad (2.2.22)$$

где ρ – радиус кривизны траектории.

Величина (модуль) ускорения точки определяется по теореме Пифагора и имеет вид:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\dot{V}_\tau\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2} . \qquad (2.2.21)$$

Простейшие движения твердого тела.

2.2.3 Поступательное движение твердого тела. *Поступательным* называется такое движение твердого тела, при котором всякая прямая, проведенная в теле, во все время его движения остается параллельной своему первоначальному положению. При этом движение точек определяется следующей теоремой: *при поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории, имеют в данный момент времени одинаковые скорости и ускорения* (доказательство при чтении лекции).

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A , \qquad \vec{a}_B = \vec{a}_A . \qquad (2.3.1)$$

Таким образом, при поступательном движении тела можно рассмотреть движение только одной из его точек, все остальные точки будут двигаться точно так же, как эта точка, а задача кинематики тела сводится к задаче кинематики точки.

2.2.4 Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. *Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси* называется такое движение, при котором хотя бы две точки (А и В) тела остаются неподвижными при его движении (рисунок 2.2). Прямая, соединяющая неподвижные точки, называется *осью вращения*. Такое движение тела можно описать одним параметром, за который выбирается угол поворота φ (рисунок 2.3).

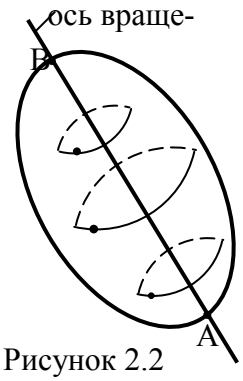


Рисунок 2.2

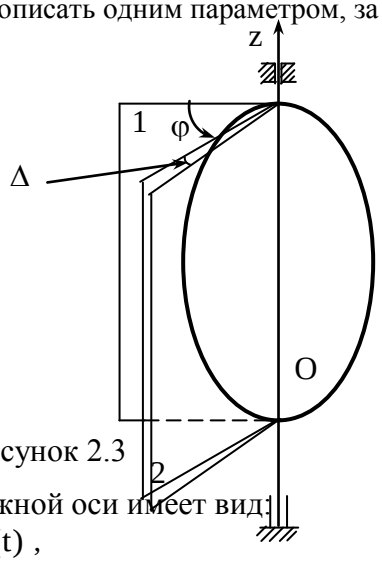


Рисунок 2.3

Уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси имеет вид:

$$\varphi = \varphi(t) , \qquad (2.3.2)$$

где φ – угол поворота тела.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются угловая скорость и угловое ускорение. *Алгебраическая величина угловой скорости тела* равна первой производной от угла поворота по времени. Модуль этой величины будем называть *угловой скоростью тела*

$$\omega = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = \left|\dot{\varphi}\right| . \qquad (2.3.3)$$

В качестве единицы измерения угловой скорости применяется рад/с или 1/с $(с^{-1})$, так как радиан – величина безразмерная.

Алгебраическая величина углового ускорения тела равна первой производной от алгебраической величины угловой скорости или второй производной от угла поворота по времени. *Угловым ускорением* тела будем называть модуль его алгебраической величины

$$\varepsilon = \left|\frac{d\omega_z}{dt}\right| = \left|\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right| \qquad \text{или} \qquad \varepsilon = |\dot{\omega}| = |\ddot{\varphi}|. \qquad (2.3.4)$$

Размерностью углового ускорения является рад/$с^2$ или 1/$с^2$ $(с^{-2})$.

2.2.5 Частные случаи вращения твердого тела. Рассмотрим два частных случая вращения твердого тела.

Равномерное вращение – это такое вращение твердого тела, при котором угловая скорость остается постоянной во все время вращения (ω = const). Так как алгебраическая величина угловой скорости отличается только знаком, то $\omega_z = \text{const}$. =*Закон равномерного вращения твердого тела*

$$\varphi = \omega_z \cdot t. \qquad (2.3.5)$$

Равнопеременное вращение – это такое вращение твердого тела, при котором угловое ускорение остается постоянным во все время вращения (ε = const), при этом постоянна также и алгебраическая величина углового ускорения $\varepsilon_z = \text{const}$.

Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела. На рисунке 2.4 изображена окружность, которую описывает точка М при вращении тела вокруг оси Oz. *Величина скорости точки* (линейная скорость) определяется формулой

$$V = \omega \cdot h. \qquad (2.3.9)$$

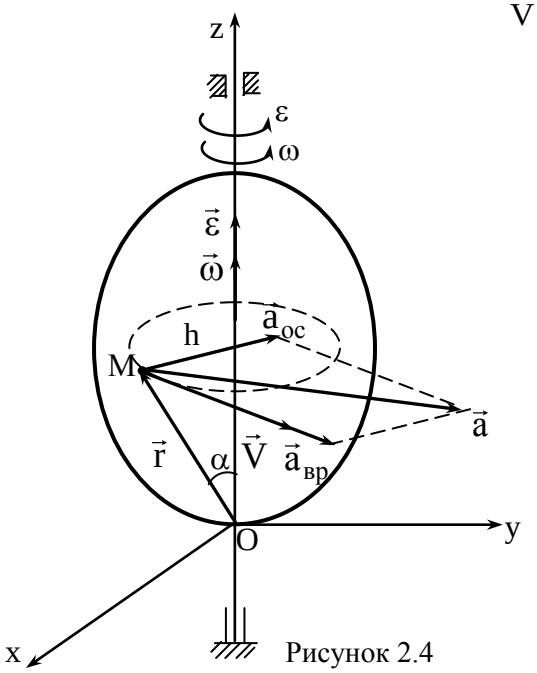


Рисунок 2.4

Вектор скорости точки направлен по касательной к этой окружности в направлении угловой скорости (рисунок 2.4).

Можно также записать вектор скорости точки М, как векторное произведение вектора угловой скорости и радиус-вектора точки (рисунок 2.4))

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (2.3.10)$$

Чтобы определить ускорение точки М надо взять производную по времени от вектора ее скорости (2.3.10). В результате получим

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \qquad (2.3.11)$$

ускорения точки М при вращательном движении тела является геометрической суммой вращательной и осестремительной его составляющих:

$$\vec{a} = \vec{a}_{вр} + \vec{a}_{ос}. \qquad (2.3.12)$$

Абсолютные величины составляющих ускорения называются соответственно вращательным и осестремительным ускорениями точки М и определяются по формулам:

$$a_{вр} = \varepsilon \cdot h, \qquad (2.3.13)$$

то есть *вращательное ускорение точки* равно произведению углового ускорения на радиус окружности, описываемой точкой

$$a_{ос} = \omega^2 h, \qquad (2.3.14)$$

осестремительное ускорение равно произведению квадрата угловой скорости на радиус окружности, которую описывает точка М при своем движении

Вектор $\vec{a}_{вр}$ направлен по касательной к окружности в направлении ε, а вектор $\vec{a}_{ос}$ - по радиусу окружности к оси вращения (рисунок 2.4). В*еличина полного ускорения точки* М

$$a = \sqrt{a_{вр}^2 + a_{ос}^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (2.3.15)$$

Плоскопараллельное движение твердого тела.

2.3 *Плоскопараллельным или плоским* называется движение твердого тела, при котором все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

2.3.1 Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела. Рассмотрим произвольное плоское движение твердого тела. Пусть все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости xOy. Прямая, проведенная в теле, перпендикулярной плоскости xOy, будет перемещаться поступательно. Следовательно, траектории, скорости и ускорения всех точек этого отрезка будут одинаковы.

Это позволяет свести изучение плоского движения твердого тела к изучению движения плоской фигуры, полученной в сечении, в ее плоскости.

Для задания положения плоской фигуры на плоскости относительно системы координат Oxy, лежащей в плоскости фигуры, достаточно задать на этой плоскости положение отрезка AB (рисунок 2.5), скрепленного с фигурой.

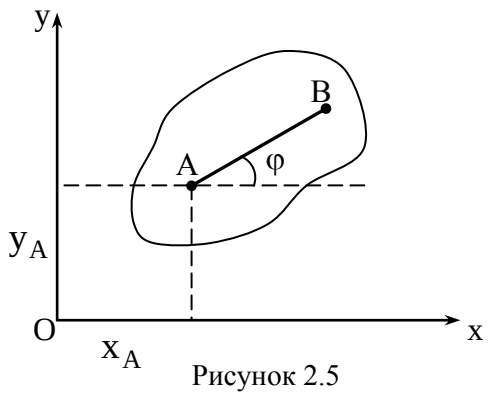


Рисунок 2.5

Положение этого отрезка будет вполне задано, если задать координаты точки A (x_A, y_A) и угол φ, который образует отрезок AB с любой осью, например Ox. Эти характеристики движения будут являться функциями времени, следовательно, *уравнения плоскопараллельного движения твердого тела* имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x_A &= f_1(t), \\ y_A &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.1)$$

Легко показать, что плоское движение можно представить как сумму двух перемещений: поступательного и вращательного. Таким образом, *плоскопараллельное движение твердого тела можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного вместе с полюсом (точка A) и вращательного вокруг полюса.*

2.3.2 Скорости точек при плоском движении. Рассмотрим движение плоской фигуры в своей плоскости и выберем точку A за полюс, то есть считаем, что скорость этой точки известна (рисунок 2.6).

Из рисунка

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \qquad (2.4.2)$$

Взяв от равенства (2.4.2) первую производную по времени получим теорему о сложении скоростей при плоском движении: *скорость любой точки B плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса A и скорости точки B при вращении вокруг полюса A.*

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \qquad (2.4.3)$$

Рисунок 2.6

Вектор скорости точки B при вращении вокруг точки A

$$\vec{V}_{BA} = \dot{\vec{\rho}} = \frac{d\rho}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \qquad (2.4.4)$$

направлен этот вектор перпендикулярно AB в направлении ω, а величина его

$$V_{BA} = \omega \cdot AB. \qquad (2.4.5)$$

2.3.3 Теорема о проекциях скоростей двух точек. *Теорема. Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.*

2.3.4 Мгновенный центр скоростей (МЦС). Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью МЦС. Другим наглядным методом определения скоростей точек является метод, основанный на понятии мгновенного центра скоростей.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

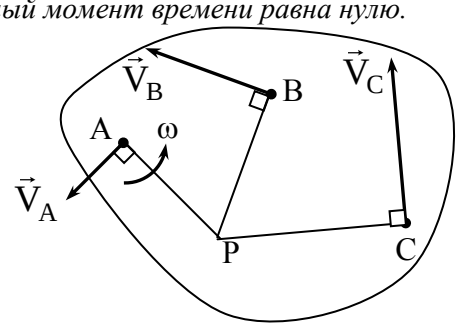


Рисунок 2.7

Если угловая скорость вращения фигуры отлична от нуля $(\omega \neq 0)$, то мгновенный центр скоростей существует.

Пусть точка P - мгновенный центр скоростей (рисунок 2.7). Так как скорость мгновенного центра скоростей равна нулю, то его удобно выбрать в качестве полюса. Тогда для точки B можно записать

$$\vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP},$$

но $\vec{V}_P = 0$, следовательно, $\vec{V}_B = \vec{V}_{BP}$. Таким образом,

$$V_B = \omega \cdot BP, \qquad (2.4.6)$$

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} = \cdots = \omega. \qquad (2.4.7)$$

При *плоском движении скорости всех точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до МЦС*, а векторы скоростей точек направлены перпендикулярно отрезкам, соединяющим эти точки с МЦС.

2.3.5 Частные случаи определения мгновенного центра скоростей.

1. Известны величина и направление скорости одной точки плоской фигуры (точка A) и направление скорости другой ее точки (точка B) (рисунок 2.8). МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к направлениям векторов их скоростей (точка P)

2.

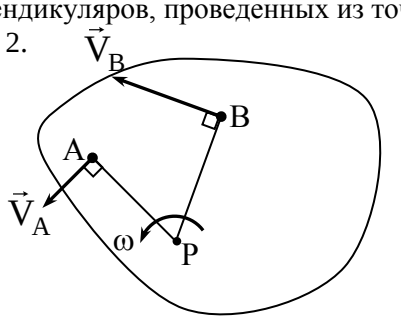
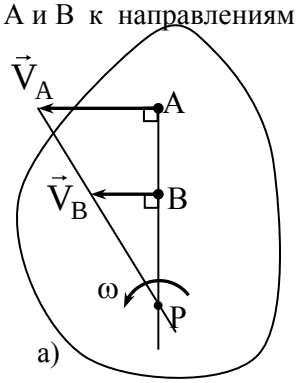
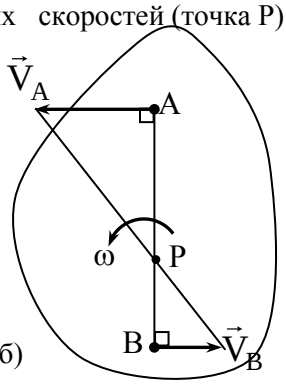


Рисунок 2.8



а)



б)

Рисунок 2.9

3. Скорости двух точек (точки A и B) параллельны, известны по величине и направлены перпендикулярно прямой, соединяющей эти точки (рисунок 2.9).

4. Скорости двух точек (точки A и B) параллельны, но прямая, соединяющая эти точки, не перпендикулярна скорости $\vec{V}_A$ (рисунок 2.10).

Прямые, проведенные перпендикулярно к векторам $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$, не пересекаются, следовательно, МЦС находится в бесконечности или, иными словами, МЦС не существует. В этом случае тело совершает мгновенно поступательное движение.

5. Тело катится по неподвижной поверхности без скольжения (рисунок 2.11). МЦС совпадает с точкой соприкосновения тел, так как при отсутствии скольжения скорость этой точки (точка P) равна нулю.

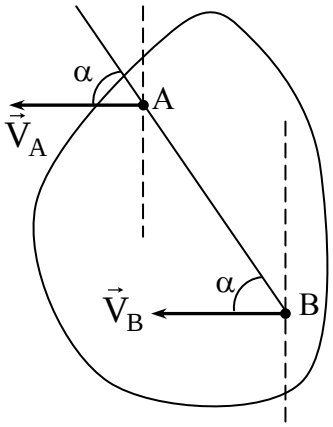


Рисунок 2.10

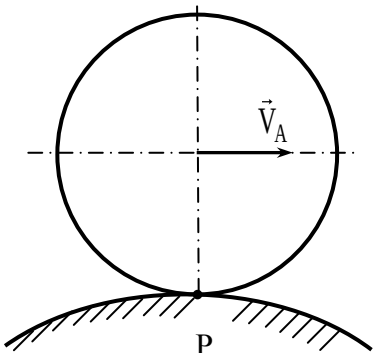


Рисунок 2.11

Ускорения точек при плоском движении. *Ускорение точки B при вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости фигуры:*

$$\vec{a}_{BA} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{BA}. \qquad (2.4.10)$$

осестремительная (для плоского движения центростремительная) и вращательная составляющие ускорения точки B при вращении вокруг точки A. Модули этих ускорений называются соответственно *центростремительным*

$$a^{ц}_{BA} = \omega V_{BA} \sin(\hat{\vec{\omega}}, \vec{V}_{BA}) = \omega V_{BA} = \omega^2 AB \qquad (2.4.11)$$

и вращательным

$$a^{вр}_{BA} = \varepsilon \rho \sin(\hat{\vec{\varepsilon}}, \vec{\rho}) = \varepsilon \rho = \varepsilon AB \qquad (2.4.12)$$

ускорениями точки B при вращении вокруг точки A.

Вектор $\vec{a}^{ц}_{BA}$ направлен из точки B в точку A, а вектор $\vec{a}^{вр}_{BA}$ перпендикулярно $\vec{a}^{ц}_{BA}$ в направлении ε (рисунок 2.12).

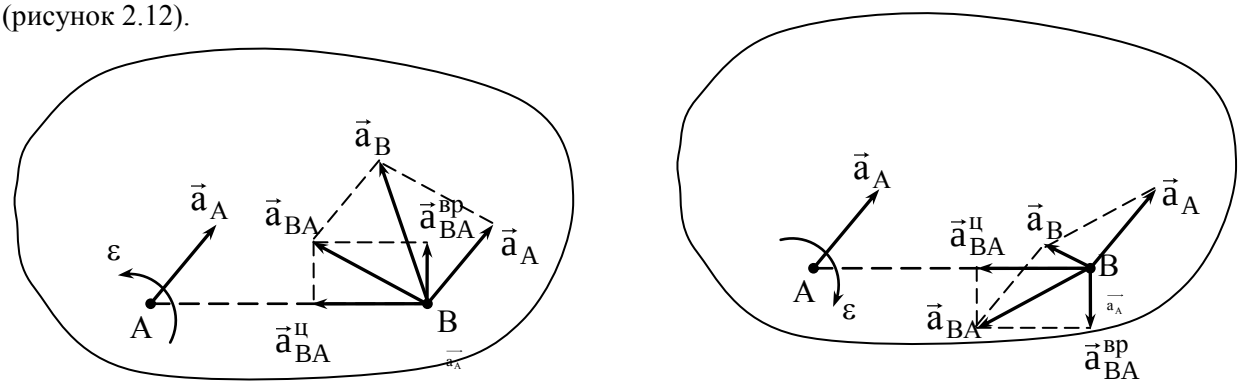


Рисунок 2.12

С учетом вышесказанного равенство (2.4.9) можно записать в виде:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}^{ц}_{BA} + \vec{a}^{вр}_{BA}, \qquad (2.4.13)$$

которое можно назвать *теоремой о сложении ускорений при плоском движении.* Таким образом ускорение любой точки B при плоском движении складывается из ускорения полюса (точка A) и центростремительного и вращательного ускорений точки B при вращении вокруг полюса.

Сложное движение точки и твердого тела.

2.4 Сложное движение точки.

2.4.1 Основные определения сложного движения точки. Введем следующие определения.

1. Движение, совершаемое точкой M по отношению к неподвижной системе координат $O_1x_1y_1z_1$, называется *абсолютным движением точки*.

2. Движение, совершаемое точкой М по отношению к подвижной системе координат Oxyz, называется *относительным движением*.

3. Движение, совершаемое подвижной системой координат Oxyz по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, называется для точки М *переносным движением*.

Абсолютная производная вектора, заданного в подвижной системе координат, равна сумме относительной производной и векторного произведения угловой скорости вращения подвижной системы координат на этот вектор:

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{b}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{b} \qquad \text{или} \qquad \dot{\vec{b}} = \tilde{\dot{\vec{b}}} + \vec{\omega}\times\vec{b}\ . \qquad (2.5.1)$$

2.4.2 Теорема о сложении скоростей. Выбирая систему координат $O_1x_1y_1z_1$ за основную неподвижную, предположим, что система Oxyz движется по отношению к основной системе произвольным образом (рисунок 2. 13).

1. Скорость точки М по отношению к неподвижной системе координат называется *абсолютной скоростью* $\vec{\mathbf{V}}$.

2. Скорость точки по отношению к подвижной системе координат называется *относительной скоростью* $\vec{\mathbf{V}}_\mathbf{r}$.

3. *Переносной скоростью* $\vec{\mathbf{V}}_\mathbf{e}$ точки называется скорость той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка. Это важное понятие скорости связано с тем, что точка при своем движении проходит через разные точки тела, с которым связана подвижная система координат.

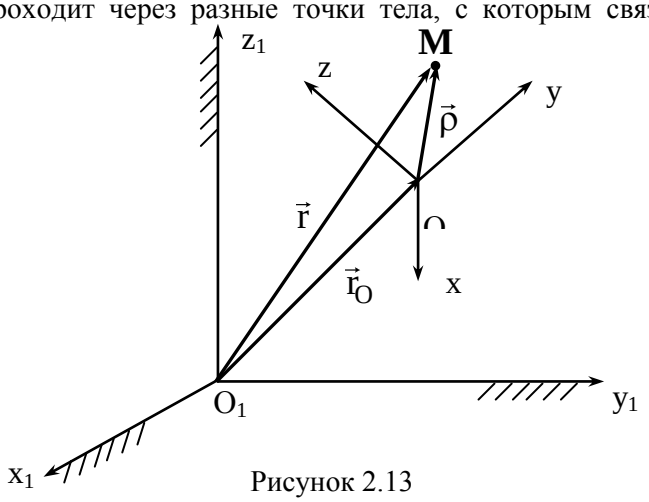


Рисунок 2.13

На рисунке 2.13 радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определяет положение точки М относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$, радиус-вектор $\vec{r}_O = \vec{r}_O(t)$ определяет положение начала подвижной системы координат Oxyz относительно неподвижной $O_1x_1y_1z_1$, а радиус-вектор $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ определяет положение точки М в подвижной системе координат Oxyz. В соответствии с рисунком 2.13 имеем

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}\,, \qquad (2.5.2)$$

где $\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - вектор, заданный в подвижной системе координат.

Из этого равенства можно получить *теорему о сложении скоростей* при сложном движении, которая гласит, что *абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:*

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e\,. \qquad (2.5.3)$$

Здесь

$$\frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \vec{V}_r \qquad (2.5.4)$$

является *относительной скоростью точки М*, а

$$\vec{V}_e = \vec{V}_O + \vec{\omega}_e\times\vec{\rho} \qquad (2.5.5)$$

переносной скоростью.

2.4.3 Теорема Кориолиса (теорема о сложении ускорений). Теорема Кориолиса устанавливает связь между ускорениями точки при сложном движении. Определения ускорений точки совпадают с определениями скоростей, поэтому отдельно эти определения не приводятся.

Чтобы найти абсолютное ускорение точки продифференцируем равенство (2.5.3) с учетом (2.5.4) и (2.5.5) по времени. В результате получим *теорему Кориолиса*

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C, \qquad (2.5.6)$$

которая гласит, что *абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений.*

Относительное ускорение:

$$\vec{a}_r = \frac{d\tilde{\vec{V}}_r}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}, \qquad (2.5.7)$$

переносное ускорение:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}) \qquad (2.5.8)$$

и *кориолисово или поворотное ускорение:*

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r. \qquad (2.5.9)$$

Кориолисово ускорение точки. Модуль этого ускорения, как модуль векторного произведения двух векторов, определяется по формуле

$$a_C = 2\left|\omega_e\right|\cdot\left|V_r\right|\cdot\sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{V}_r). \qquad (2.5.10)$$

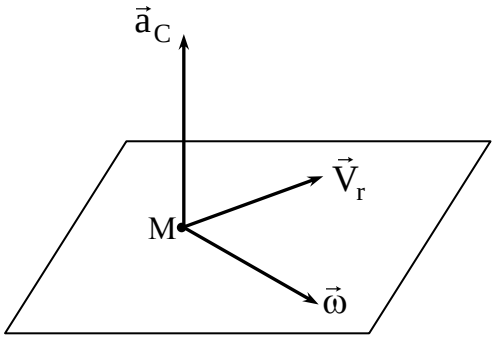


Рисунок 2.14

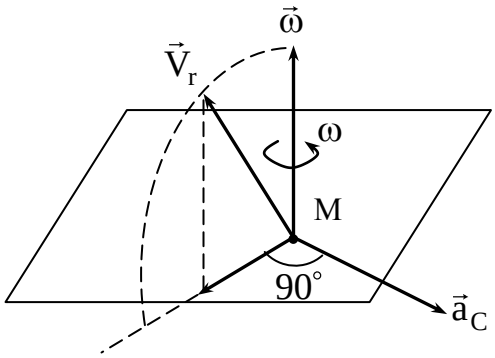


Рисунок 2.15

Направление его определяется направлением векторного произведения, то есть вектор $\vec{a}_C$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{V}_r$ в ту сторону, откуда кратчайший поворот от $\vec{\omega}$ к $\vec{V}_r$ виден происходящим против хода часовой стрелки (рисунок 2.14).

П*равило Н.Е.Жуковского*: вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ надо спроектировать на плоскость, перпендикулярную угловой скорости $\vec{\omega}$ подвижной системы координат, и повернуть на 90^o вокруг $\vec{\omega}$ в сторону вращения (рисунок 2.15).

На основании формулы (2.5.10) можно указать, что кориолисово ускорение равно нулю в следующих случаях:

- $\vec{\omega}_e = 0$, это будет при поступательном движении подвижной системы координат;
- угловая скорость $\vec{\omega}_e$ вращения подвижной системы координат параллельна относительной скорости точки $\vec{V}_r$;
- в момент времени, когда относительная скорость точки $\vec{V}_r = 0$.

Сложное движение твердого тела.

2.4.4 Сложение поступательных движений.

Пусть тело Р движется поступательно со скоростью $\vec{V}_1$ относительно системы Oxyz, а сама эта система движется поступательно со скоростью $\vec{V}_2$ относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Чтобы найти скорость какой-либо точки М тела Р, надо применить теорему о сложении скоростей (2.5.7), в результате чего получиться, что *при сложении двух поступательных движений результирующее движение будет тоже поступательным, а его скорость равна геометрической сумме скоростей составляющих движений*.

$$\vec{V}_M = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 . \qquad (2.6.1)$$

Если скорости всех точек только в данный момент времени оказываются равными между собой, то такое движение тела называется *мгновенно поступательным.*

2.4.5 Сложение вращений вокруг параллельных осей. Пусть тело вращается с угловой скоростью ω_2 вокруг оси Oz относительно системы координат Oxyz, а последняя вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси O_1z_1 относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$, причем оси Oz и O_1z_1 параллельны. Тогда тело будет совершать плоскопараллельное движение в плоскости, перпендикулярной осям Oz и O_1z_1. Здесь возможны три частных случая.

1. *Вращения направлены в одну сторону (рисунок 2.16). Результирующе движение является вращением, мгновенная ось которого делит внутренним образом расстояние между осями составляющих вращений на части, обратно пропорциональные угловым скоростям (2.6.2). Угловая скорость результирующего вращения равна сумме угловых скоростей составляющих вращений* (2.6.3).

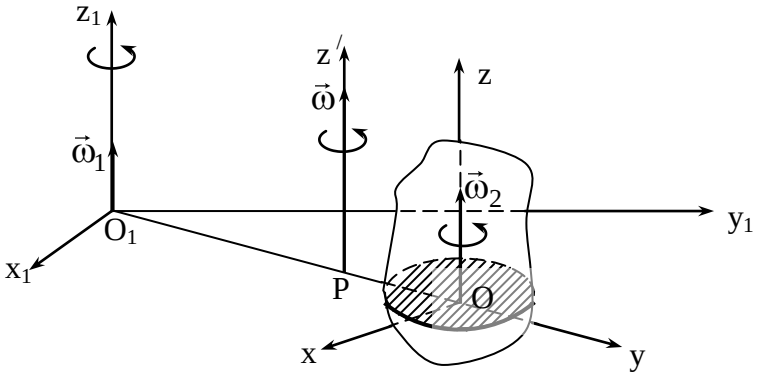


Рисунок 2.16

Ось $Pz^{/}$, которая параллельна осям Oz и O_1z_1, и называется *мгновенной осью вращения*.

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{O_1P}{OP} . \qquad (2.6.2)$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 . \qquad (2.6.3)$$

2. *Вращения направлены в противоположные стороны. Е*сли тело участвует в двух направленных в противоположные стороны вращениях вокруг параллельных осей, то *результирующее движение является вращением, мгновенная ось проходит за осью с большей угловой скоростью и делит расстояние между осями составляющих вращений внешним образом на части, обратно пропорциональные угловым скоростям (2.6.2). Угловая скорость результирующего вращения равна разности угловых скоростей составляющих вращений*

$$\omega = \omega_2 - \omega_1 . \qquad (2.6.4)$$

2.4.6 Сложение вращений вокруг пересекающихся осей. Пусть тело вращается в системе координат Oxyz вокруг оси z с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, а система координат Oxyz вращается вокруг оси z_1 неподвижной системы с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ (рисунок 2.17). Точка О остается неподвижной, то есть результирующее движение можно рассматривать, как движение тела с одной неподвижной точкой. Такое движение иногда называют *сферическим*, которое в данный момент является вращательным вокруг мгновенной оси $Oz^{/}$, проходящей через неподвижную точку О. Мгновенная ось меняет свое направление в пространстве.

Угловая скорость результирующего вращения

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 . \qquad (2.6.5)$$

Совокупность двух вращений, происходящих вокруг пересекающихся осей, эквивалентна одному вращению, происходящему с мгновенной угловой скоростью, равной геометрической сумме угловых скоростей складываемых вращений.

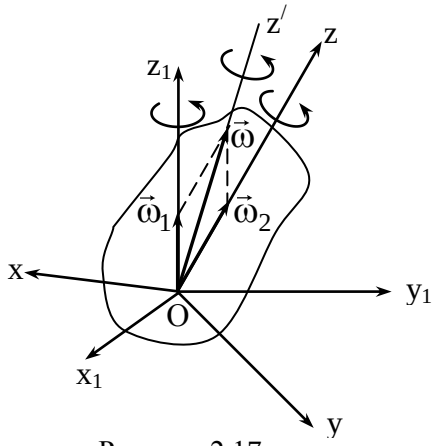


Рисунок 2.17

2.4.7 Сложение поступательного и вращательного движений *Скорость поступательного движения перпендикулярна угловой скорости вращательного движения* ($\vec{V}_O \perp \vec{\omega}$) (рисунок 2.18). *При сложении поступательного и вращательного движений, когда скорость поступательного движения перпендикулярна угловой скорости вращательного движения, результирующее движение является вращением вокруг оси, проходящей через точку O_2 с угловой скоростью, равной угловой скорости заданного вращения.* Расстояние, на котором расположена новая ось от заданной, определяется формулой

$$d = O_1O_2 = \frac{V_O}{\omega}. \qquad (2.6.6)$$

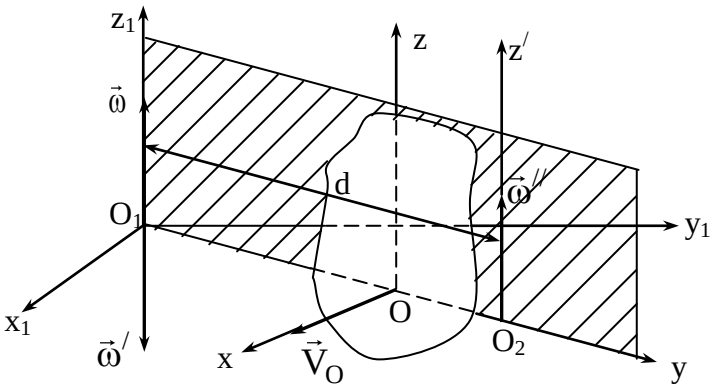


Рисунок 2.18

1. *Скорость поступательного движения параллельна угловой скорости вращательного движения* ($\vec{V}_O \parallel \vec{\omega}$) (рисунок 2.19). *При сложении поступательного и вращательного движений, когда скорость поступательного движения параллельна угловой скорости вращательного движения, результирующее движение является винтовым движением или кинематическим винтом, ось которого совпадает с осью заданного вращения.*

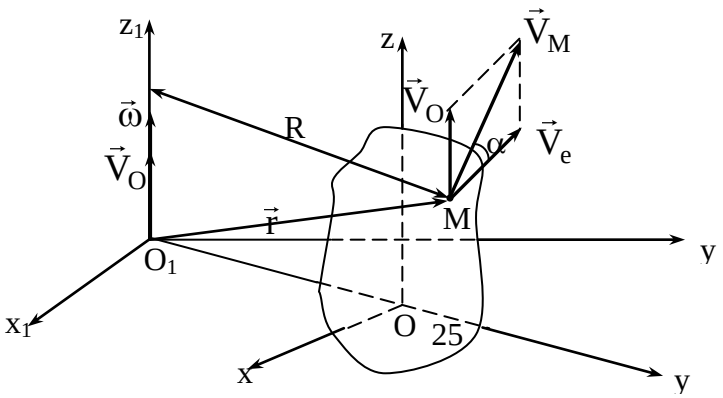


Рисунок 2.19

Время одного оборота тела в винтовом движении

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Любая точка тела перемещается за это время параллельно оси на расстояние, равное

$$h = V_O T = \frac{2\pi V_O}{\omega}, \qquad (2.6.7)$$

называемое *шагом винта*. Величина

$$p = \frac{V_O}{\omega} \qquad (2.6.8)$$

называется *параметром винта.*

Ось O_1z_1 называется *осью винта*.

Динамика материальной точки.

3.1 Введение в динамику. *Динамика* – раздел теоретической механики, в котором рассматривается движение материальных тел с учетом действующих сил. Динамика материальной точки. В общем случае движение тела зависит не только от его массы и действующих сил, но и от взаимного расположения частиц, образующих тело. Чтобы при первоначальном изучении динамики отвлечься от влияния формы тела, вводится понятие материальной точки. *Материальной точкой* называют материальное тело, размерами которого при изучении его движения можно пренебречь.

3.1.1 Основные законы динамики точки. Основными законами динамики материальной точки являются три закона Ньютона.

Первый закон Ньютона. Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения то тех пор, пока какая-либо сила не выведет ее из этого состояния. Системы отсчета, по отношению к которым выполняется первый закон Ньютона, называются *инерциальными*.

Второй закон Ньютона. Ускорение, получаемое точкой, пропорционально действующей на нее силе, и направлено так же как эта сила. Коэффициентом пропорциональности является масса точки.

Математическая запись этого закона имеет вид:

$$ma = F, \quad m\vec{a} = \vec{F}. \qquad (3.2.1)$$

Если на точку действуют несколько сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, то второй закон Ньютона принимает вид:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k. \qquad (3.2.2)$$

Третий закон Ньютона. Две материальные точки действуют друг на дру га с силами, равными по величине, направленными вдоль прямой, соединяющей точки в противоположные стороны.

3.2.2 Основные задачи динамики точки. Основные задачи динамики материальной точки формулируются для двух ее состояний.

Свободная материальная точка - точка, движение которой не ограничено никакими другими телами. Для такой точки рассматриваются две основные задачи динамики:

Первая основная задача: Зная массу точки и закон ее движения, найти действующие на нее силы.

Вторая основная задача динамики: Зная массу точки и действующие на нее силы, найти закон ее движения.

Обе задачи решаются с помощью второго закона Ньютона (3.2.2).

Несвободная материальная точка - точка, движение которой ограничено другими телами. Для такой точки ко всем действующим на нее активным силам $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ необходимо добавить силы реакций, которые можно обозначить одной силой $\vec{R}$. Второй закон Ньютона принимает вид:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \vec{R}\,. \qquad (3.2.3)$$

Для несвободной материальной точки с помощью (3.2.3) решаются также две основные задачи динамики:

Первая основная задача: Зная массу точки, закон ее движения и действующие на нее активные силы, найти силы реакций.

Вторая основная задача динамики: Зная массу точки и действующие на нее активные силы, найти закон ее движения и силы реакций.

Решение первой основной задачи динамики точки. Решение этой задачи сводится к составлению второго закона Ньютона, который затем проектируется на оси координат.

3.2.3 Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки. Положение материальной точки в инерциальной системе отсчета будем определять радиус-вектором $\vec{r}$. Сила, действующая на точку в общем случае может зависеть от времени t, положения точки, то есть от $\vec{r}$ и от скорости точки $\vec{V}$, то есть $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V})$. С учетом того, что ускорение точки $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, а скорость $\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, второй закон Ньютона или основное уравнение динамики точки примет вид:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}), \qquad (3.2.4)$$

которое называется *дифференциальным уравнением движения материальной точки в векторной форме.*

Дифференциальное уравнение (3.2.4) эквивалентно трем скалярным уравнениям. В проекциях на неподвижные оси декартовой системы координат они примут вид:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z\,. \qquad (3.2.5)$$

Решение второй задачи динамики точки сводится к интегрированию дифференциальных уравнений ее движения (3.2.5), которые представляют собой систему трех дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций x, y, z.

Общее решение этих уравнений зависит от шести произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_6, то есть

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, ..., C_6),\\ y &= y(t, C_1, C_2, ..., C_6),\\ z &= z(t, C_1, C_2, ..., C_6). \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.6)$$

В декартовой системе координат нужно задать соответствующие проекции. Начальные условия:

$$\text{t=0:}\ \left.\begin{aligned} &x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \quad - \text{начальное положение},\\ &\dot{x} = V_{0x}, \dot{y} = V_{0y}, \dot{z} = V_{0z} - \text{начальная скорость} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.2.7)$$

3.3 Прямолинейные колебания материальной точки. Учение о колебаниях составляет основу ряда областей техники. Несмотря на то, что они рассматриваются в различных областях основы всех колебаний остаются одними и теми же.

Общие теоремы динамики материальной точки. Принцип Даламбера.

3.4.1 Импульс силы. Количество движения точки. Одной из основных динамических характеристик движения точки является количество движения.

Количеством движения точки называется векторная величина, равная произведению массы точки на вектор ее скорости ($m \cdot \vec{V}$). Направлен вектор $m \cdot \vec{V}$ так же, как вектор скорости, то есть по касательной к траектории точки.

Импульс силы характеризует действие силы за некоторый промежуток времени. *Элементарным импульсом силы* называется векторная величина $d\vec{S}$, равная произведению вектора силы на элементарный промежуток времени:

$$d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt\,. \qquad (3.4.1)$$

Направление этого вектора совпадает с направлением действия силы.

Импульс силы за конечный промежуток времени t_1 равен интегралу от элементарного импульса, вычисленному в пределах от 0 до t_1:

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F}\,dt\,. \qquad (3.4.2)$$

Импульс силы, не зная уравнений движения точки, можно вычислить для двух видов сил:

1. Если сила постоянна и по величине, и по направлению ($\vec{F} = \overrightarrow{const}$), тогда $\vec{S} = \vec{F}\cdot t_1$.
2. Если сила является функцией времени.

В тех случаях, когда сила зависит от положения точки или ее скорости, для вычисления импульса силы необходимо знать уравнения движения точки.

При решении задач импульс силы необходимо проектировать на оси координат:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x\,dt, \quad S_y = \int_0^{t_1} F_y\,dt, \quad S_z = \int_0^{t_1} F_z\,dt\,. \qquad (3.4.3)$$

3.4.2 Теорема об изменении количества движения точки. Учитывая, что вектор ускорения точки является первой производной от вектора скорости по времени, основной закон динамики точки можно переписать в виде:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k\,. \qquad (3.4.4)$$

Уравнение (3.4.4) выражает *теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме:* производная по времени от количества движения точки равна геометрической сумме всех действующих на точку сил.

Рассмотрим движение точки М, на которую действуют силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, на конечном промежутке времени от t = 0 до $t = t_1$ из положения M_0 в положение M_1, причем скорость точки при этом меняется от $\vec{V}_0$ до $\vec{V}_1$. Обе части равенства (3.4.4) умножим на dt и возьмем определенные интегралы с обеих сторон:

$$mV_1 - mV_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k\,. \qquad (3.4.5)$$

Уравнение (3.4.5) выражает *теорему об изменении количества движения точки в интегральной (конечной) форме:* изменение количества движения точки за конечный промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.

3.4.3 Момент количества движения точки и теорема о его изменении.

Моментом количества движения точки относительно центра О называется векторная величина $\vec{m}_O(m\vec{V})$, определяемая равенством

$$\vec{m}_O(m\vec{V}) = \vec{r}\times m\vec{V}\,, \qquad (3.4.7)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки относительно центра О. Вектор $\vec{m}_O(m\vec{V})$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через $m\vec{V}$ и точку О в ту сторону, с которой кратчайший поворот от вектора $\vec{r}$ к вектору $m\vec{V}$ виден происходящим против часовой стрелки. Его величина $\left|\vec{m}_O(m\vec{V})\right| = mV\cdot h$, где h – кратчайшее расстояние (перпендикуляр) между центром О и касательной к траектории в точке М.

Теорема об изменении момента количества движения точки определяет изменение вектора $\vec{m}_O(m\vec{V})$ со временем.

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{V}) = \vec{m}_O(\vec{F})\,. \qquad (3.4.9)$$

Это уравнение выражает *теорему об изменении момента количества движения точки относительно центра*: производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-либо центра О равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.

Для момента количества движения выполняются два закона сохранения:

1. Если момент действующей силы относительно некоторого центра равен нулю, то момент количества движения точки относительно этого центра будет постоянным и по величине, и по направлению.

2. Если момент действующей силы относительно некоторой оси равен нулю, то момент количества движения точки относительно этой оси будет постоянным. Этот результат следует из (3.4.10).

3.4.4 Работа силы. Мощность. Работа служит характеристикой действия силы на некотором перемещении точки.

Элементарной работой силы $\vec{F}$, приложенной в точке М (рисунок 3.3), называется скалярная величина

$$d'A = F_\tau \cdot ds, \qquad (3.4.11)$$

Так как $F_\tau = F \cdot \cos\alpha$, где α - угол между $\vec{F}$ и Mτ, получим из (3.4.11) другое выражение для элементарной работы:

$$d'A = F \cdot \cos\alpha \cdot ds. \qquad (3.4.12)$$

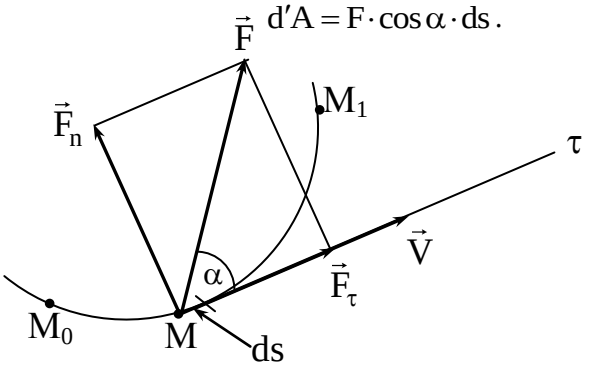


Рисунок 3.3

Из (3.4.12) следует:

1. Если угол α острый ($0 < \alpha < 90^0$), то работа положительна. В частности, при $\alpha = 0$ элементарная работа $d'A = F \cdot ds$.
2. Если угол α тупой ($90^0 < \alpha < 180^0$), то работа отрицательна. В частности, при $\alpha = 180^0$ элементарная работа $d'A = -F \cdot ds$.
3. Если угол $\alpha = 90^0$, то есть *если сила направлена перпендикулярно перемещению или скорости, то элементарная работа силы равна нулю.*

Элементарную работу можно записать в виде:

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \qquad (3.4.13)$$

Выражение (3.4.13) можно представить через проекции векторов в виде:

$$d'A = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz, \qquad (3.4.14)$$

в котором x, y, z – координаты точки приложения силы $\vec{F}$.

Все четыре выражения (3.4.11), (3.4.12), (3.4.13) и (3.4.14) для элементарной работы силы эквивалентны.

Работа силы на любом перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.

В соответствии с формулами (3.4.11) – (3.4.14) работу силы можно записать в четырех видах:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0M_1} F_\tau ds, \qquad (3.4.15)$$

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0M_1} F\cos\alpha ds, \qquad (3.4.16)$$

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0M_1} \vec{F} d\vec{r}, \qquad (3.4.17)$$

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \qquad (3.4.18)$$

Во всех случаях интеграл берется вдоль кривой M_0M_1, то есть является криволинейным.

Если сила постоянна или зависит только от положения точки, то для вычисления работы такой силы не нужно знать закон движения точки.

Мощностью называется величина, определяющую работу, совершаемую силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность

$$N = \frac{A}{t},$$

где t – время, в течение которого произведена работа A. В общем случае

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}, \qquad (3.4.19)$$

то есть *мощность силы равна скалярному произведению силы* $\vec{F}$ *на скорость точки* $\vec{V}$.

3.4.5 Кинетическая энергия точки и теорема об ее изменении. *Кинетической энергией точки* называется скалярная величине, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости – $\frac{mV^2}{2}$.

Рассмотрим материальную точку, на которую действуют силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Пусть точка М перемещается по кривой из положения M_0, где она имеет скорость $\vec{V}_0$, в положение M_1, где ее скорость равна $\vec{V}_1$.

Используя основное уравнение динамики точки (второй закон Ньютона) можно получить следующее равенство:

$$d(\frac{mV^2}{2}) = \sum d'A_k , \qquad (3.4.25)$$

которое называется *теоремой об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме*: полный дифференциал кинетической энергии материальной точки равен сумме элементарных работ действующих на точку сил.

Интегрирование (3.4.25) с учетом того, что при перемещении точки из положения M_0 в положение M_1 ее скорость меняется от $\vec{V}_0$ до $\vec{V}_1$, то получим:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_k . \qquad (3.4.26)$$

Уравнение (3.4.27) выражает *теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной (конечной) форме*: изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ действующих на точку сил на том же перемещении.

3.4.6 Силовое поле и силовая функция. Будем рассматривать силы, которые зависят только от положения точки в пространстве.

Силовым полем называется область пространства, в каждой точке которой на помещенную в ней материальную точку действует сила, однозначно определенная по величине и направлению, то есть известна сила $\vec{F}$, зависящая от радиус-вектора точки и времени $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$. Ее проекции $F_x = F_x(x, y, z, t)$, $F_y = F_y(x, y, z, t)$, $F_z = F_z(x, y, z, t)$.

Если сила $\vec{F}$ зависит явно от времени, то силовое поле называется *нестационарным*, если не зависит – то *стационарным*. Далее будем рассматривать только стационарные силовые поля, для которых $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, а $F_x = F_x(x, y, z,)$, $F_y = F_y(x, y, z)$, $F_z = F_z(x, y, z)$.

Такие поля обладают двумя общими свойствами:

1. Работа сил стационарного поля зависит от начального M_0 и конечного M_1 положений точки и траектории, но не зависит от закона движения точки по этой траектории.

2. Имеет место равенство: $A_{2,1} = -A_{1,2}$,

где $A_{2,1}$ – работа сил стационарного поля по перемещению материальной точки из положения M_1 в положение M_2, а $A_{1,2}$ – работа сил поля при движении точки по той же траектории в обратном направлении от M_2 к M_1.

Силовое поле называют *потенциальным*, если существует такая функция U = U(x, y, z), зависящая от координат точки (стационарное поле), частные производные от которой по координатам равны проекциям силы на соответствующие оси, то есть

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \; F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \; F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (3.4.27)$$

Функция U = U(x, y, z) называется *силовой функцией*.

3.4.7 Потенциальная энергия. В случае потенциального силового поля наряду с силовой функцией вводится другая функция, характеризующая запас энергии в данной точке поля, – *потенциальная энергия материальной точки*.

Потенциальной энергией Π материальной точки в рассматриваемой точке силового поля М называют работу, которую совершают силы поля, действующие на материальную точку при перемещении ее из точки М в начальную точку M_0, то есть

$$\Pi = A_{MM_0}. \qquad (3.4.28)$$

Из определения следует, что потенциальная энергия является функцией координат, то есть $\Pi = \Pi(x, y, z)$.

Формулу работы можно записать так:

$$\Pi = -U + \text{const}, \quad \text{или} \quad \Pi = -U. \qquad (3.4.29)$$

1.5 Принцип Даламбера для материальной точки.

Рассмотрим материальную точку, на которую действуют активные силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ и сила реакции $\vec{R}$. Основное уравнение динамики для этой точки

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \vec{R}$$

перепишем в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \vec{R} + (-m\vec{a}) = 0. \qquad (3.5.1)$$

Введем обозначение

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}. \qquad (3.5.2)$$

Вектор $\vec{\Phi}$, равный по модулю произведение массы точки на ее ускорение и направленный противоположно вектору ускорения, называется *силой инерции материальной точки*.

С учетом (3.5.2) равенство (3.5.1) примет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0. \qquad (3.5.3)$$

(3.5.3) выражает *принцип Даламбера для материальной точки*, который гласит, что при движении материальной точки активные силы, сила реакции и сила инерции образуют уравновешенную систему сил.

Динамика механической системы. Общие теоремы динамики механической системы.

3.7 Введение в динамику системы.

3.7.1 Механическая система, ее масса и центр масс. Под *механической системой* понимают совокупность материальных точек, движение и положение каждой из которых зависит от движения и положения других точек системы. *Массой системы* называется сумма масс всех точек, входящих в систему:

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k, \qquad (3.7.1)$$

где m_k – масса материальной точки с номером k, а n – число точек системы.

Центром масс или центром инерции механической системы называется геометрическая точка, радиус-вектор которой определяется равенством:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{M}. \qquad (3.7.2)$$

3.7.2 Классификация сил. Так же, как в разделе статики и в динамики материальной точки, силы, действующие на систему можно разделить на активные, не зависящие от связей, и реакции связей.

Для механической системы силы, кроме того, можно разделить на внешние и внутренние. *Внутренними силами* называются силы взаимодействия между точками, входящими в систему, обозначаются они $\vec{F}^i$. *Внешними силами* называются силы, с которыми точки, не входящие в систему, действуют на точки, входящие в систему, Эти силы обозначаются $\vec{F}^e$.

Внутренние силы системы обладают двумя свойствами:

Первое свойство. Геометрическая сумма всех внутренних сил равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^i = 0\,. \qquad (3.7.4)$$

Второе свойство. Геометрическая сумма моментов всех внутренних сил системы относительно любого центра равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{m}_O(\vec{F}_k^i) = 0\,. \qquad (3.7.5)$$

3.8 Моменты инерции.

3.8.1 Момент инерции относительно оси (осевой момент инерции). Осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса тела играет при поступательном движении.

Моментом инерции механической системы относительно оси ℓ называется скалярная величина, равная произведению масс всех точек системы на квадраты их расстояний до этой оси:

$$I_\ell = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2\,, \qquad (3.8.1)$$

где h_k – расстояние от k-ой точки до оси ℓ.

Моменты инерции механической системы относительно координатных осей x, y и z будут выражаться формулами:

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k(y_k^2 + z_k^2),\quad I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k(z_k^2 + x_k^2),\quad I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k^2 + y_k^2)\,. \qquad (3.8.2)$$

Формулы (3.8.1) и (3.8.2) справедливы как для системы, так и для твердого тела. В случае сплошного тела (непрерывное распределение масс) его разбивают на элементарные объемы dV с массой $dm = \gamma \cdot dV$, где γ – плотность тела. При этом суммы, стоящие в правых частях (3.8.1) и (3.8.2) перейдут в интегралы:

$$I_\ell = \iiint\limits_{(V)} h^2 dm = \iiint\limits_{(V)} h^2 \gamma\, dV\,, \qquad (3.8.3)$$

и

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\gamma dV,\quad I_y = \iiint\limits_{(V)} (z^2 + x^2)\gamma dV,\quad I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\gamma dV \qquad (3.8.4)$$

.

3.8.2 Радиус инерции. *Радиусом инерции тела относительно оси* называется расстояние ρ от оси до той точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела M, чтобы момент инерции точки относительно этой оси равнялся моменту инерции I_ℓ тела относительно той же оси:

$$I_\ell = M \cdot \rho^2\,. \qquad (3.8.5)$$

3.8.3 Теорема Штейнера-Гюйгенса.: момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной, и произведению массы тела на квадрат расстояния между осями (без доказательства).

В связи со сказанным выше получаем *теорему Штейнера-Гюйгенса*:

$$I_{Oz} = I_{Cz'} + M \cdot d^2\,, \qquad (3.8.6)$$

где I_{Oz} - момент инерции тела относительно произвольной оси Oz, $I_{Cz'}$ - момент инерции тела относительно оси Cz|, которая параллельна оси Oz, но проходит через центр масс тела, M – масса тела, а d – расстояние между осями Oz и Cz|.

Из формулы (3.8.6) видно, что $I_{Oz} > I_{Cz'}$. Следовательно, из всех осей данного направления наименьший момент инерции будет относительно той оси, которая проходит через центр масс тела.

3.8.4 Осевые моменты инерции некоторых тел. Моменты инерции тел сложной конфигурации часто удается вычислить, если их предварительно разбить на тела простой формы. Получим формулы для вычисления моментов инерции некоторых однородных тел.

1. Однородный тонкий стержень. Рассмотрим однородный тонкий стержень длиной AB = ℓ и массой M (рисунок 3.5). Вдоль стержня направим ось Ax. *момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его конец* в виде:

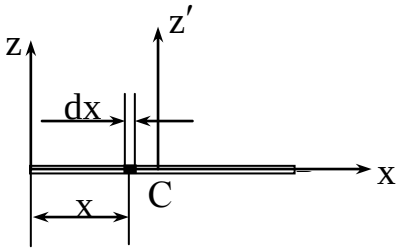


Рисунок 3.5

$$I_{Az} = \frac{M\ell^2}{3}. \qquad (3.8.7)$$

Используя теорему Штейнера-Гюйгенса (3.8.6) можно получить *момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его центр масс* в виде

$$I_{Cz'} = \frac{M\ell^2}{12}. \qquad (3.8.8)$$

2. Тонкое круглое однородное кольцо. Рассмотрим однородное кольцо радиуса R, массой M и найдем его момент инерции относительно оси Cz, проходящей перпендикулярно кольцу через его центр масс. Так как все точки кольца находятся на расстоянии h = R от оси Cz, то по формуле (3.8.1) получим, что , *момент инерции тонкого однородного кольца относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости кольца через его центр*, определяется так:

$$I_{Cz} = MR^2. \qquad (3.8.9)$$

3. Круглый однородный диск. Имеем тонкий однородный диск радиусом R и массой M. Для вычисления его момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно диску, разобьем диск на тонкие кольца, и возьмем соответствующие интегралы. В результате получим, что *момент инерции тонкого однородного кольца относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости кольца чрез его центр масс,* вычисляется по формуле:

$$I_{Cz} = \frac{MR^2}{2}. \qquad (3.8.10)$$

3.8.5 Центробежные моменты инерции. Для полной характеристики распределения массы тела относительно данной системы координат, кроме осевых моментов инерции I_x, I_y и I_z, вводят еще центробежные моменты инерции. *Центробежными моментами инерции* называются величины, определяемые равенствами:

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k, \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k, \quad I_{zx} = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k x_k, \qquad (3.8.11)$$

где m_k – массы точек, x_k, y_k, z_k – их координаты.

Как следует из формул (3.8.11), центробежные моменты инерции симметричны относительно своих индексов:

$$I_{xy} = I_{yx}, \quad I_{yz} = I_{zy}, \quad I_{zx} = I_{xz}.$$

Для сплошных тел формулы (3.8.11) по аналогии с (3.8.4) записываются в виде интегралов.

3.8.6 Главные моменты инерции и их свойства. В отличие от осевых центробежные моменты инерции могут иметь любой знак и могут обращаться в нуль. *Главной осью инерции тела* называется ось, для которой оба центробежных момента инерции, содержащие индекс этой оси, равны нулю. Например, если $I_{xz} = I_{yz} = 0$, то ось z – главная ось инерции. *Главной центральной осью инерции* называется главная ось инерции, проходящая через центр масс тела.

Отметим два частных случая, когда можно сразу определить характер оси.

1. Если тело имеет плоскость симметрии, то для всех ее точек ось, перпендикулярная к плоскости симметрии, является главной осью инерции.

2. Если тело имеет ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции и называется *осью динамической симметрии*.

Моменты инерции тела относительно главных осей инерции называются *главными моментами инерции тела*.

Понятие о главных осях инерции играет важную роль в динамике твердого тела. Если по ним направить координатные оси Oxyz, то все центробежные моменты инерции обращаются в нули и соответствующие уравнения или формулы существенно упрощаются. С этим понятием связано также решение задач о динамическом уравнении вращающихся твердых тел, о центре удара и др.

3.8.7 Дифференциальные уравнения движения механической системы. Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Заменим связи их реакциями. Обозначим через $\vec{F}_k^e$ и $\vec{F}_k^i$ равнодействующие всех внешних и внутренних сил, действующих на k-ую точку системы. Запишем для каждой точки второй закон Ньютона:

$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \\ m_2\vec{a}_2 &= \vec{F}_1^e + \vec{F}_2^i, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ m_n\vec{a}_n &= \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i. \end{aligned}\right\} \qquad (3.9.1)$$

Так как $\vec{a}_k = \ddot{\vec{r}}_k = \dfrac{d^2\vec{r}_k}{dt^2}$, то система (3.9.1) является системой дифференциальных уравнений и представляет собой *дифференциальные уравнения движения механической системы в векторной форме*. Число этих уравнений равно числу точек системы, то равно n.

Теорема о движении центра масс системы.

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e, \qquad (3.9.3)$$

которая гласит, что произведение массы всей системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех, действующих на систему, внешних сил.

Векторное равенство (3.9.3) эквивалентно трем скалярным, которые являются его проекциями на неподвижные оси декартовых координат:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e, \quad M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e. \qquad (3.9.4)$$

Из (3.9.4) следует, что их решения определяют закон движения центра масс системы. Если тело движется поступательно, то его движение полностью определяется движением центра масс.

Из теоремы о движении центра масс системы вытекает следствия:

1. *Если геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.*
2. *Если сумма проекций всех внешних сил, действующих на систему, на некоторую неподвижную ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось не изменяется.*
3. *Никакими внутренними силами нельзя изменить характер движения центра масс системы.* В частности, внутренние силы не могут вывести из равновесия центр масс системы. Внутренние силы могут оказать косвенное влияние на движение центра масс только через внешние силы.

Количество движения механической системы. *Количеством движения механической системы* называется вектор $\vec{Q}$, равный геометрической сумме количеств движения всех точек, входящих в систему:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k\vec{V}_k. \qquad (3.9.5)$$

Вектор количества движения системы можно также представить в виде

$$\vec{Q} = M\vec{V}_C, \qquad (3.9.6)$$

то есть *количество движения системы* равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс.

3.9.3 Теорема об изменении количества движения системы. Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек, запишем для нее дифференциальные уравнения движения (3.9.1) с учетом того, что ускорения точек являются первыми производными от векторов скоростей ($\vec{a}_k = \dot{\vec{V}}_k = \dfrac{d\vec{V}_k}{dt}$). Сложив все уравнения, преобразуя левую часть этого равенства и учитывая свойство внутренних сил системы, получим *теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме*:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e, \qquad (3.9.7)$$

которая гласит, что производная по времени вектора количества движения механической системы равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

В проекциях на неподвижные оси декартовой системы координат равенство (3.9.7) эквивалентно трем скалярным:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \qquad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \qquad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \qquad (3.9.8)$$

Эта теорема может быть представлена в ином виде. Обозначим количество движения механической системы в начальный момент времени $t_0 = 0$ через $\vec{Q}_0$, а в некоторый момент времени $t = t_1$ – через $\vec{Q}_1$ и проинтегрируем равенство (3.9.7), тогда

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e , \qquad (3.9.9)$$

так как интегралы, стоящие в правой части являются импульсами внешних сил.

Равенство (3.9.9) является *теоремой об изменении количества движения системы в интегральной (конечной) форме*: изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех внешних сил, действующих на систему за тот же промежуток времени.

Из теоремы об изменении количества движения системы следуют два *закона сохранения количества движения*:

1. Если геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю, то вектор количества движения этой системы будет сохраняться и по величине, и по направлению.
2. Если сумма проекций всех внешних сил, приложенных к системе, на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось будет постоянной.

Из этих законов сохранения следует, что внутренние силы не могут изменить количество движения системы.

3.9.4 Кинетический момент механической системы. *Главным моментом количества движения (или кинетическим моментом)* относительно центра О механической системы называется геометрическая сумма моментов количеств движения всех ее точек относительно того же центра:

$$\vec{K}_O = \sum \vec{m}_O(m_k \vec{V}_k) = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k . \qquad (3.9.11)$$

Здесь $\vec{r}_k$ – радиус-вектор материальной точки M_k с началом в центре О, m_k и $\vec{V}_k$ – масса и скорость этой точки. Если механическая система представляет собой сплошную среду, заполняющую некоторый объем, то сумма переходит в соответствующий объемный интеграл.

Как любой вектор $\vec{K}_O$ может быть задан своими проекциями. В частности, равенство (3.9.11) в проекциях на оси декартовой системы координат записывается в виде:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \sum (y_k m_k V_{kz} - z_k m_k V_{ky}), \\ K_y &= \sum (z_k m_k V_{kx} - x_k m_k V_{kz}), \\ K_z &= \sum (x_k m_k V_{ky} - y_k m_k V_{kx}), \end{aligned}\right\} \qquad (3.9.12)$$

где x_k, y_k, z_k – координаты точки M_k.

Выражения (3.9.12) определяют *кинетические моменты механической системы относительно координатных осей*.

В частности *кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения* определяется выражением:

$$K_z = I_z \omega_z . \qquad (3.9.13)$$

Теорема об изменении кинетического момента системы. Для системы n материальных точек разобьем все действующие на нее силы, в том числе и силы реакций, на внешние и внутренние. Тогда

$$\frac{dK_O}{dt} = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) .$$

Эту теорему можно сформулировать следующим образом: Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно центра О равна геометрической сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра О.

Спроектировав на оси координат, получим *теоремы моментов относительно осей:*

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x(\vec{F}_k^e), \qquad \frac{dK_y}{dt} = \sum m_y(\vec{F}_k^e), \qquad \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_k^e) . \qquad (3.9.14)$$

Эта теорема широко используется при изучении вращательного движения тела, в теории гироскопов, в теории удара.

Из нее следуют *два закона сохранения кинетического момента системы*:

1. Если геометрическая сумма моментов всех внешних сил относительно некоторого центра равна нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра будет сохраняться и по величине, и по направлению.

2. Если сумма моментов внешних сил относительно некоторой оси равна нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси будет постоянным.

3.9.6 Кинетическая энергия системы и твердого тела. Для одной точки кинетическая энергия, как известно, определяется формулой $\frac{mV^2}{2}$. *Кинетической энергией системы* называется скалярная величина T, равная сумме кинетических энергий всех точек, входящих в систему:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2}. \qquad (3.9.15)$$

1. *Поступательное движение твердого тела.* В этом случае, как следует из кинематики, все точки тела имеют одинаковые скорости. Из формулы (3.9.15) получаем:

$$T_{пост} = \frac{MV_C^2}{2}, \qquad (3.9.16)$$

где M – масса тела.

Таким образом, *кинетическая энергия тела при поступательном движении* равна половине произведения массы тела на квадрат скорости его центра масс.

Вращательное движение твердого тела. Если тела вращается вокруг неподвижной оси Oz, то скорость любой его точки M_k, находящейся на расстоянии h_k от оси вращения, $V_k = \omega_z \cdot h_k$. Подставляя это значение в (3.9.15), имеем:

$$T_{вр} = \frac{I_z \omega_z^2}{2}, \qquad (3.9.17)$$

то есть *кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси,* равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости.

Плоскопараллельное движение твердого тела. Как известно из кинематики, плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела в данный момент времени можно рассматривать как сумму поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения вокруг полюса. За полюс удобно выбрать центр масс тела, так как его положение не меняется относительно тела. С учетом этого можно получить, что

$$T_{плоск} = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{I_{Cz'}\omega^2}{2}. \qquad (3.9.18)$$

Кинетическая энергия тела, совершающего плоскопараллельное движение равна сумме кинетических энергий поступательного движения вместе с центром масс и вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр, перпендикулярно плоскости движения.

Если системы состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия T будет равна сумме кинетических энергий T_j всех тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \sum_{j=1}^{n} T_j.$$

3.9.8 Работа и мощность сил, действующих на систему. При изучении движения механической системы возникает необходимость вычисления работы сил, приложенных к ней. Рассмотрим некоторые частные случаи вычисления работы.

1. *Работа силы тяжести.* Если система находится в однородном поле силы тяжести, то на каждую ее точку M_k действует сила тяжести. Направим ось z вертикально вверх.

Полная работа сил тяжести при переходе системы из некоторого начального положения в конечное определится равенством:

$$A(M\vec{g}) = -Mg\int_{z_{C_0}}^{z_{C_1}} dz_C = -Mg(z_{C_1} - z_{C_0}) = Mg(z_{C_0} - z_{C_1}).$$

В этом равенстве z_{C_0} и z_{C_1} – значения координаты z_C центра тяжести системы в начальном и конечном положениях.

Если ввести понятие высоты h_C перемещений центра масс системы, то есть

$$z_{C_0} - z_{C_1} = \pm h_C,$$

то окончательно получим формулу для определения работы сил тяжести механической системы:

$$A(M\vec{g}) = \pm Mgh_C, \qquad (3.9.19)$$

то есть *работа сил тяжести системы* равна взятому со знаком плюс или минус произведению веса всей системы на вертикальное перемещение ее центра тяжести. Знак плюс берется в том случае, если центр тяжести системы перемещается вниз, и минус – если вверх.

2. *Работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси*. Пусть сила $\vec{F}$ приложена к некоторой точке тела, отстоящей от неподвижной оси вращения z на расстоянии h.

Произведение $F_\tau h$ обозначим через M_z и назовем *вращающим моментом*. Тогда получим, что *работа силы* $\vec{F}$ на конечном угле поворота определится равенством:

$$A(\vec{F}) = A(M_z) = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi, \qquad (3.9.20)$$

где φ_1 – угол поворота.

Если момент силы не изменяется во время движения, т.е. $M_z = \text{const}$, то

$$A(\vec{F}) = A(M_z) = M_z \cdot \varphi_1, \qquad (3.9.21)$$

то есть *работа постоянного момента, приложенного к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси,* равна произведению этого момента на угол поворота.

В данном случае мощность силы

$$N = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \cdot \omega_z. \qquad (3.9.22)$$

Формула (3.9.22) определяет мощность силы, действующей на вращающееся вокруг неподвижной оси твердое тело.

3. *Работа момента трения качения*:

$$A(M_{тр}) = -M_{тр} \cdot \varphi_1 = -\frac{\delta}{R} N \cdot S_C, \qquad (3.9.23)$$

где R - радиус катящегося тела, N - нормальная реакция, S_C - путь, который проходит центр масс тела.

3.9.9 Теорема об изменении кинетической энергии системы. Если рассмотреть одну из точек системы со значком k, то для нее справедлива теорема об изменении кинетической энергии, которая в дифференциальной форме записывается в виде:

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = d'A_k^e + d'A_k^i,$$

где $d'A_k^e$ и $d'A_k^i$ – элементарные работы внешних и внутренних сил, действующих на эту точку. Аналогичные теоремы можно записать для всех точек системы и сложить их. В результате получим:

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \sum d'A_k^e + \sum d'A_k^i$$

или с учетом (3.9.15)

$$dT = \sum d'A_k^e + \sum d'A_k^i. \qquad (3.9.24)$$

Равенство (3.9.24) выражает *теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.*

Рассмотрим два момента времени: начальный $t = 0$, при котором кинетическая энергия системы равна T_0, и конечный $t = t_1$, при котором кинетическая энергия системы становится равной T_1. Проинтегрировав обе части равенства (3.9.24) в пределах перемещения системы из начального положения в конечное, получим *теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральной (конечной) форме*:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i, \qquad (3.9.25)$$

которая гласит, что *изменение кинетической энергии системы при ее переходе из начального положения в конечное равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему, на том же перемещении.*

3.9.10 Закон сохранения механической энергии системы. Из теоремы об изменении кинетической энергии системы следует закон сохранения полной механической энергии.

Предположим, что все действующие на систему внешние и внутренние силы потенциальны. Тогда сумма работ этих сил на перемещении в потенциальном силовом поле будет равна разности потенциальных энергий в начальном (Π_0) и конечном (Π_1) положениях, то есть

$$\sum A_k^e + \sum A_k^i = \Pi_0 - \Pi_1 .$$

Подставляя это выражение в формулу (3.9.27), получим

$$T_1 - T_0 = \Pi_0 - \Pi_1$$

или

$$T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 = \text{const} . \qquad (3.9.26)$$

Уравнение (3.9.26) выражает *закон сохранения механической энергии системы: при движении под действием потенциальных сил сумма кинетической и потенциальной энергий системы сохраняет постоянное значение.*

3.10.1 Принцип Даламбера для системы. Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Для каждой точки этой системы можно записать принцип Даламбера и сложить полученные равенства. В результате получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{\Phi}_k = 0$$

Первая сумма этого равенства является главным вектором всех активных сил, вторая – главным вектором сил реакций, а третья – главным вектором сил инерции, то есть
Таким образом, можно написать:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0 . \qquad (3.10.1)$$

Выберем произвольный полюс О и проведем из него к точке M_k радиус-вектор $\vec{r}_k$. Умножив каждое из равенств принципа Даламбера для точки векторно слева на соответствующий вектор $\vec{r}_k$ и сложим все произведения, получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{R}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k = 0 .$$

$$\vec{M}_O^a + \vec{M}_O^R + \vec{M}_O^\Phi = 0 . \qquad (3.10.2)$$

Уравнения (3.10.1) и (3.10.2) представляют собой *принцип Даламбера для системы,* который можно сформулировать так: в каждый момент времени суммы главных векторов и главных моментов активных сил, сил реакций и сил инерции движущейся механической системы равны нулю.

3.10.2 Главный вектор и главный момент сил инерции. Исходя из его определений главного вектора и главного момента сил инерции после небольших преобразований можно получить:

$$\vec{\Phi} = -\frac{d\vec{Q}}{dt} = -M\vec{a}_C , \quad M_O^\Phi = -\frac{d}{dt}\sum \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k = -\frac{d\vec{K}_O}{dt} . \qquad (3.10.3)$$

То есть *главный вектор сил инерции механической системы* равен взятой со знаком минус производной по времени от количества движения системы или равен произведению массы системы на ускорение ее центра масс и направлен противоположно этому ускорению, а *главный момент сил инерции* равен взятой со знаком минус производной от кинетического момента системы по времени.

3.10.3 Приведение сил инерции к заданному центру. Как известно из основной теоремы статики вытекает, что при приведении к данному центру О систему сил инерции можно заменить одной силой, равной $\vec{\Phi}$ и приложенной в центре О, и одной парой сил с моментом, равным $\vec{M}_O^\Phi$. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. *Поступательное движение.* При поступательном движении силы инерции твердого тела приводятся к равнодействующей, то есть к одной силе, равной $\vec{\Phi} = -M\vec{a}_C$, приложенной в центре масс тела и направленной противоположно ускорению центра масс.

2. *Вращательное движение.* Пусть тело имеет плоскость материальной симметрии и вращается вокруг оси Oz, перпендикулярной этой плоскости. Силы инерции в этом случае приводятся к одной силе $\vec{\Phi} = -M\vec{a}_C$, приложенной в точке С, и к паре с моментом

$$M_{Oz}^{\Phi} = -\frac{dK_z}{dt} = -\frac{d(I_z \cdot \omega_z)}{dt} = -I_z \frac{d\omega_z}{dt} = -I_z \cdot \varepsilon_z$$

3. *Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс.* Если тело вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс, то естественно $\vec{\Phi} = -M\vec{a}_C = 0$, и, следовательно, силы инерции приводятся только к одной паре с моментом $M_{Oz}^{\Phi} = -I_{Oz} \cdot \varepsilon_z$.

4. *Плоскопараллельное движение.* Если тело имеет плоскость симметрии и движется параллельно этой плоскости, то силы инерции приводятся к лежащим в плоскости симметрии силе, равной $\vec{\Phi} = -M\vec{a}_C$ и приложенной в центре масс, и паре с моментом $M_{Cz}^{\Phi} = -I_{Cz} \cdot \varepsilon_z$.

3.10 Движение твердого тела. С помощью общих теорем динамики системы можно изучить различные виды движения твердого тела.

3.11.1 Поступательное движение. Тело будет двигаться поступательно, если главный момент всех внешних сил относительно центра масс и начальная угловая скорость тела будут равны нулю. Если заранее известно, что тело движется поступательно, то уравнения, выражающие теорему о движении центра масс системы, можно рассматривать как *дифференциальные уравнения движения поступательного движения твердого тела*:

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e \qquad (3.11.1)$$

или в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e, \quad M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e . \qquad (3.11.2)$$

3.11.2 Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси. Пусть на тело, имеющего неподвижную ось вращения Az, действуют активные внешние силы $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \ldots, \vec{F}_n^e$ и силы реакций в точках крепления, моменты которых относительно оси вращения будут равны нулю.

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы относительно оси z (3.9.15):

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k^e) .$$

Обозначим $\sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k^e) = M_z^e$ и назовем этот момент *вращающим моментом.* Кроме того, учтем, что для вращающегося твердого тела $K_z = I_z\omega_z$, где момент инерции твердого тела относительно оси вращения $I_z = \text{const}$. В результате получим *дифференциальное уравнение вращательного движения* твердого тела в виде:

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z^e \qquad \text{или} \qquad I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e . \qquad (3.11.3)$$

Так как вторая производная от угла поворота по времени является угловым ускорением тела ε_z, то (3.11.3) можно также переписать в виде:

$$I_z\varepsilon_z = M_z^e . \qquad (3.11.4)$$

3.11.3 Плоскопараллельное движение твердого тела.

Если на тело действуют внешние силы $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \ldots, \vec{F}_n^e$, лежащие в плоскости одного из сечений тела, то движение точки С определяется теоремой о движении центра масс системы, то есть уравнениями:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e , \qquad (3.11.9)$$

где M – масса тела, а вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, определяется уравнением

$$I_C\ddot{\varphi} = I_C\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} m_C(\vec{F}_k^e) , \qquad (3.11.10)$$

где $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ – угловое ускорение вращательного движения, I_C – момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной к плоскости движения и проходящей через центр масс тела.

Уравнения (3.11.9) и (3.11.10) являются системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений и представляют собой *дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела:*

Аналитическая механика.

3.12 Аналитическая механика.

3.12.1 Связи и их классификация. Для механической системы *связями называются ограничения, накладываемые на координаты и скорости точек системы.*

Связи, которые описываются уравнениями, называются удерживающими; связи, описание которых осуществляется с помощью неравенств, называются неудерживающими.

Связь, в уравнение которой время явно не входит, называется стационарной; если же связь явно зависит от времени, то она называется нестационарной.

*Связи называются голономными, если их уравнения могут быть записаны в виде, не содержащем производные от координат по времени или дифференциалов координат. Связи, уравнения которых содержат неинтегрируемым образом производные от координат по времени или дифференциалы координат, называются неголономными*Голономная, нестационарная, удерживающая связь в общем случае имеет следующий вид:

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0,$$

а голономная, стационарная, неудерживающая связь может быть записана так:

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) \geq 0.$$

3.12.2 Возможные перемещения точки и системы.

Возможным перемещением точки называется такое мысленное малое перемещение $\delta\vec{r}$ при фиксированном моменте времени, которое не нарушает наложенных на точку связей.

Возможным перемещением механической системы называется такое мысленное малое перемещение $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \ldots, \delta\vec{r}_n$ отдельных ее точек при фиксированном моменте времени, которое не нарушает связи, наложенные на систему.

Число независимых между собой возможных перемещений системы называется числом степеней свободы этой системы.

Введем понятие *возможной работы* δA, как об элементарной работе, которую могла бы произвести действующая на точку сила на возможном перемещении этой точки, то есть $\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$.

Связи называются идеальными, если сумма работ всех реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю.

Если $\vec{R}_k$ – равнодействующая всех реакций связей, приложенных к k-ой точке системы, то условие идеальности связей можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0. \qquad (3.12.1)$$

В частности, такими связями являются связи без трения.

3.12.3 Принцип возможных перемещений :*для равновесия системы материальных точек необходимо и достаточно, чтобы сумма всех сил, действующих на каждую точку системы, и скорости всех точек в начальный момент времени были равны нулю*

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0. \qquad (3.12.2)$$

3.12.4 Общее уравнение динамики.

Будем рассматривать механическую систему, состоящую из n материальных точек, движение которой ограничено s стационарными, удерживающими, идеальными и голономными связями. Согласно принципу Даламбера, если к каждой точке k системы, кроме равнодействующих всех активных сил $\vec{F}_k$ и сил реакций $\vec{R}_k$, добавить силу инерции $\vec{\Phi}_k = -m_k\vec{a}_k$, то система будет находиться в равновесии. По принципу возможных перемещений, если система находиться в равновесии, то сумма работ всех сил на любом возможном перемещении системы должна быть равна нулю, то есть должно выполняться равенство:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^\Phi + \sum \delta A_k^R = 0, \qquad (3.12.3)$$

где $\sum \delta A_k^a = \sum \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k$ – сумма работ активных сил, $\sum \delta A_k^\Phi = \sum \vec{\Phi}_k \cdot \delta \vec{r}_k$ – сумма работ сил инерции, $\sum \delta A_k^R = \sum \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k$ – сумма работ сил реакций на любом возможном перемещении системы.

Так как наложенные на систему связи являются идеальными, то последняя сумма в (3.12.3) равна нулю. Поэтому окончательно получаем:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^\Phi = 0. \qquad (3.12.4)$$

Равенство (3.12.4) является *принципом Даламбера-Лагранжа*: при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма работ всех активных сил, действующих на систему, и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

Уравнение (3.12.4) называют также *общим уравнением динамики.* С учетом значения силы инерции, его можно переписать в виде:

$$\sum (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \qquad (3.12.5)$$

3.12.5 Обобщенные координаты и обобщенные скорости.

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Положение каждой точки этой системы определяется тремя координатами x_k, y_k, z_k, следовательно, положение всей системы определяется 3n координатами.

Будем считать, что движение системы ограничено h голономными, идеальными, удерживающими связями:

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, h) \qquad (3.12.6)$$

Так как 3n координат удовлетворяют h уравнениям связей, то они не являются независимыми. *Число независимых координат*, определяющих положение системы, будет равно:

$$s = 3n - h. \qquad (3.12.7)$$

Независимые между собой параметры, число которых равно числу степеней свободы системы и которые однозначно определяют ее положение, называются *обобщенными координатами*. Обозначаются они буквой q.

Положение системы определяется обобщенными координатами

$$q_1, q_2, \ldots, q_s.$$

Производные от обобщенных координат называются *обобщенными скоростями* и обозначаются символами:

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s.$$

Их размерность зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Если q – линейная величина, измеряемая в метрах, то $\dot{q}$ – линейная скорость и измеряется в м/с, если q – угол, измеряемый в радианах, то $\dot{q}$ – угловая скорость и измеряется в рад/с, если q – площадь, измеряемая в м^2, то $\dot{q}$ – секторная скорость и измеряется в м^2/с и т.д.

3.12.6 Обобщенные силы. Вычислим работу всех активных сил на возможном перемещении системы (если имеются силы трения, то они присоединяются к активным силам):

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k. \qquad (3.12.8)$$

Выразим вариацию $\delta \vec{r}_k$ через вариации обобщенных координат:

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j. \qquad (3.12.9)$$

Подставив $\delta \vec{r}_k$ из (3.12.9) в (3.12.8) и изменив порядок суммирования, получим:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \qquad (3.12.10)$$

Если ввести обозначение:

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s), \tag{3.12.11}$$

которое называют обобщенной силой, соответствующей координате q_j, то тогда:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j \cdot \delta q_j = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_s . \tag{3.12.12}$$

Формула (3.12.12) представляет собой сумму работ всех сил на возможном перемещении системы. Таким образом, *обобщенные силы* – это величины, равные коэффициентам при приращениях обобщенных координат в выражении возможной работы всех сил.

Когда все действующие на систему силы являются потенциальными, то есть система движется в потенциальном силовом поле, то обобщенная сила будет определяться равенством:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{3.12.13}$$

Если все действующие на систему силы потенциальны, то обобщенная сила равна частной производной потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате, взятой с обратным знаком.

3.12.7 Условия равновесия в обобщенных координатах. Согласно принципу возможных перемещений для равновесия механической системы с идеальными, стационарными, голономными и удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы при нулевых начальных скоростях точек системы суммарная работа всех активных сил на любом возможном перемещении система равнялась нулю

$$Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_s = 0 . \tag{3.12.14}$$

Так как обобщенные координаты независимы друг от друга, то равенство (3.12.14) будет выполняться только в том случае, если все обобщенные силы будут равны нулю:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \ldots, \quad Q_s = 0 . \tag{3.12.15}$$

Уравнения (3.12.15) являются *условиями равновесия механической системы: для равновесия системы с идеальными, стационарными и голономными связями необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы системы равнялись нулю* (начальные скорости всех точек считаем равными нулю).

Если силы, действующие на систему потенциальны, то согласно равенствам (3.12.13) уравнения (3.12.15) примут вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0 . \tag{3.12.16}$$

Система, на которую действуют потенциальные силы, находится в равновесии в тех положениях, для которых потенциальная энергия системы имеет экстремум (максимум или минимум).

3.12.8 Уравнения Лагранжа второго рода. Общее уравнение динамики (3.12.5) дает возможность составлять дифференциальные уравнения движения механической системы, не содержащие реакции идеальных связей.

Эти уравнения можно получить после некоторых математических преобразований из общего уравнения динамики (3.12.5), переписав его в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\vec{F}_k - m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \right) \cdot \delta \vec{r}_k = 0 .$$

Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах записываются в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.12.17)$$

и называются *уравнениями Лагранжа второго рода*.

Если действующие на систему силы потенциальны, то с учетом того, что $Q_j=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$, а потенциальная энергия зависит только от координат, после некоторых преобразований уравнения Лагранжа второго рода примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0.
\end{aligned}\right\}. \qquad (3.12.18)$$

Здесь $L = T - \Pi$ называется *функцией Лагранжа*.

В заключении заметим, что число уравнений Лагранжа второго рода для механической системы равно ее числу степеней свободы.

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»
в г. Смоленске

Методические рекомендации к практическим занятиям по дисциплине

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

(НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ)

Смоленск – 2020 г.

1. Цели и задачи, объем практических занятий по дисциплине

Цель практических занятий по дисциплине «Теоретическая механика» – закрепление лекционного материала дисциплины, обучение студентов практической стороне компетенций, закрепленных за дисциплиной.

Для достижения поставленной цели на практических занятиях решаются следующие задачи:

-изучение основных теоретических положений и методов дисциплины на основе знаний, умений, полученных в результате освоения предшествующих дисциплин;

- освоение физико-математического аппарата по определению механических характеристик движения материальных точек и твердых тел, методов моделирования механических систем, методов решения типовых задач теоретической механики;

- привитие навыков применения теоретических знаний для решения практических задач исследования механических систем в дальнейшей профессиональной деятельности.

Объем практических занятий - в соответствии с рабочей программой дисциплины «Теоретическая механика».

2. Задания на практические занятия по дисциплине

Занятие: Равновесие плоской и пространственной систем сходящихся сил. Теорема о трех силах.

Методические рекомендации

Что нужно знать для решения задач статики вообще и по данной теме, в частности:

- *Основные понятия и определения статики. Аксиомы статик*.
- *Основные типы реакций связей*.
- *Теоремы синусов и косинусов* (справочник по элементарной математике).
- *Условия равновесия; теорему о трех силах*.

Порядок решения задач.

Выбрать тело (или точку), равновесие которого рассматривается в задаче.

1. Освободить выбранное тело от связей и изобразить все действующие на это тело заданные активные силы и силы реакций отброшенных связей.
2. Составить уравнения равновесия, для чего выбрать оси координат. Этот выбор можно производить произвольно, но полученные уравнения будут решаться проще, если одну из осей направить перпендикулярно к линии действия какой-либо неизвестной силы реакции. Решение удобно проводить до конца в общем виде. Тогда для искомых величин будут получаться формулы, позволяющие анализировать найденные результаты. Численные значения найденных величин желательно подставлять только в окончательные формулы.
3. Если число сходящихся сил, находящихся в равновесии, равно трем, то удобно применить геометрический метод решения этих задач. В этом случае решение сводится к тому, что вместо уравнений равновесия строится силовой треугольник, который на основании геометрического условия равновесия должен быть замкнут. Построение этого треугольника следует начинать с известной силы. Решая силовой треугольник с помощью теоремы синусов (или косинусов), находим искомые величины.

Занятие: Равновесие произвольной плоской системы сил. Определение равнодействующей распределенных сил. Равновесие составных конструкций.

Методические рекомендации

Что нужно знать из теории:

- *Момент силы относительно центра (точки).*
- *Аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил. Различные виды систем условий (три формы) равновесия. Равновесие плоской системы параллельных сил. (Сосредоточенные и распределенные нагрузки; реакция жесткой заделки).*

Порядок решения задач.

Первые три пункта (1 – 3) из предыдущего занятия используются здесь и в последующих занятиях. Добавляются лишь следующие пункты:

4. Выбрать систему осей декартовых координат.
5. Составить уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, в которые должны войти кроме активных сил и реакции связей. При этом нужно применять ту из трех форм этих условий, которая приводит к более простой системе уравнений, т.е. к такой системе, в каждой из которых входило бы по одному неизвестному. Если в задаче требуется найти силы давления, а не реакции опор, то необходимо учесть, что согласно 4-ой аксиоме, силы давления равны реакциям по модулю, но направлены в противоположные им стороны.
6. В случае равновесия системы тел необходимо отбросить внешние связи. После отбрасывания внешних связей сочлененная система тел не остается жесткой. Согласно принципу отвердевания, система тел при равновесии должна удовлетворять условиям равновесия абсолютно твердого тела. Однако эти условия, являясь необходимыми, не будут достаточными. Поэтому из них нельзя будет определить все неизвестные. Для решения задачи на равновесие системы тел необходимо дополнительно рассматривать равновесие какого-нибудь одного или нескольких тел этой системы.

Занятие: Равновесие произвольной пространственной системы сил.

Методические рекомендации

Что необходимо знать для решения задач:

- *Момент силы относительно оси.*
- *Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил.*

Порядок решения задач.

Остается практически тем же самым, что и для произвольной плоской системы сил.

Занятие: Определение положения центра тяжести плоских фигур.

Методические рекомендации

Что необходимо знать для решения задач:

- *Определение понятия центра тяжести.*
- *Общие формулы определения координат центров тяжести тел.*
- *Способы определения координат центров тяжести (способ симметрии, способ разбиения, способ интегрирования).*
- *Положения центров тяжести : а) дуги окружности, б) площади кругового сектора, с) площади полукруга, г) объема пирамиды и т.д.*

Порядок решения задач.

При решении задач на определение координат центра тяжести однородного тела необходимо

1. использовать способ симметрии, если тело имеет центр, ось или плоскость симметрии;
2. способ разбиения, если его можно разбить на части, центры тяжестей которых известны;
3. способ дополнения, если в теле имеются вырезы или полости.

Занятие: Кинематика материальной точки. Определение уравнения траектории точки, скорости и ускорения точки по величине и направлению при координатном и естественном способах задания движения.

Методические рекомендации
Что необходимо знать для решения задач:

- *Что такое траектория, скорость, уравнение движения точки.*
- *Способы задания движения точки.*
- *Формулы для определения скорости точки.*
- *Формулы ускорения точки для равнопеременного и ускоренного движений точк.*
- *Нормальное ускорение, касательное ускорение, радиус кривизны траектории.*

Порядок решения задач.

1. В зависимости от способа задания движения точки для определения ее траектории необходимо избавиться от параметра времени t.
2. При определении скорости и ускорения точки, движение которой задано координатным способом, необходимо правильно вычислить первые и вторые производные от этих координат. При этом необходимо помнить, что при определении значений производных сначала надо взять производные от функций, а затем подставлять в них значения времени.
3. При определении скорости и ускорения точки, движение которой задано естественным способом, необходимо помнить формулы для их определения и знать их направления.
4. Если заранее известно какое движение совершает точка, то можно воспользоваться готовыми формулами соответствующего движения.

Занятие: Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Определение скорости и ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Методические рекомендации
Что необходимо знать для решения задач:

- *Уравнение вращательного движения тела и формулу угла поворота.*
- *Угловую скорость и угловое ускорение.*
- *Закон равномерного и равнопеременного вращения тела.*
- *Линейную скорость и ускорение точки вращающегося тела.*

Порядок решения задач.

1. Если вращение твердого тела задано углом его поворота, то, взяв соответствующие производные от угла поворота, необходимо вычислить угловую скорость и угловое ускорение тела.
2. В тех случаях, когда известен характер вращения, можно воспользоваться готовыми формулами для определения этих величин.
3. Линейную скорость и линейное ускорение точек тела определять по известным формулам.
4. В тех случаях, когда требуется определить технические характеристики вращения (частоту, число оборотов), необходимо использовать формулы перехода к ним от величин системы СИ.
5. При решении задач, связанных с зубчатыми передачами, надо помнить, что у тел, находящихся в зацеплении, угловые скорости обратно пропорциональны их радиусам (количеству зубьев у шестерен).

Занятие: Плоскопараллельное движение твердого тела. Определение скоростей точек тела при помощи МЦС. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью теоремы о сложении скоростей. Определение ускорений точек плоской фигуры с помощью теоремы о сложении ускорений.

Методические рекомендации
Что необходимо знать для решения задач:

- *Определение положения мгновенного центра скоростей.*
- *Теорему о равенстве проекций скоростей концов отрезка плоской фигуры на направление самого отрезка.*
- *Определение скоростей точек плоской фигуры.*
- *Определение ускорений точек плоской фигуры.*

Порядок решения задач.

1. Определить скорость одной точки тела, если она заранее не задана.
2. Определить направление скорости второй точки.
3. Найти скорость второй точки с помощью теоремы о проекциях скоростей точек, либо построив МЦС и используя известные соотношения между скоростями.
4. Найти мгновенную угловую скорость тела.
5. Определить ускорение одной точки, если оно заранее неизвестно.
6. С помощью теоремы о сложении ускорений при плоском движении, построив векторы всех ускорений и найдя значения тех из них, которые можно найти, определить ускорение второй точки и угловое ускорение тела.

Занятие: Сложное движение точки. Теорема о сложении скоростей в сложном движении точки. Теорема Кориолиса.

Методические рекомендации

Что необходимо знать для решения задач:

- *Необходимо различать переносное, относительное и абсолютное движения точки.*
- *Теорему о сложении скоростей.*
- *Как вычислять абсолютную скорость точки.*
- *Теорему о сложении ускорений.*
- *Как вычислять величину и определять направление ускорения Кориолиса.*

Порядок решения задач.

1. Определить какое из представленных движений точки является относительным, а какое – переносным, и как движется имеет точки в каждом из них.
2. В зависимости от видов движения точки определить ее относительную и переносную скорости по величине и направлению.
3. Определить абсолютную скорость точки либо по теореме Пифагора, либо по теореме косинусов в зависимости от угла между векторами относительной и переносной скоростей.
4. В зависимости от видов движения точки определить относительное, переносное и кориолисово ускорения точки по величине и направлению.
5. Определить абсолютное ускорение точки с помощью проекций векторов всех ускорений на оси координат.

Занятие: Динамика материальной точки. Решение первой и второй задач динамики.

Методические рекомендации

Что необходимо знать для решения задач:

- *Законы динамики.*
- *Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси неподвижных декартовых координат.*
- *Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси естественного трехгранника.*
- *Решение прямой и обратной задач динамики.*
- *Дифференциальные уравнения и их решения для свободных, затухающих и вынужденных колебаний материальной точки.*
- *Свойства свободных, затухающих и вынужденных колебаний материальной точки.*

- *Формулы для определения круговой частоты, периода колебаний, декремента затухания.*

Порядок решения задач.

1. При решении первой задачи динамики точки изобразить все силы, действующие на точку, в том числе и силы реакций, записать второй закон Ньютона и, спроектировав его на определенные оси, найти неизвестные силы реакций.
2. При решении второй задачи динамики точки изобразить действующие на точку силы, включая силы реакций, записать второй закон Ньютона в проекциях на оси.
3. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения и с помощью начальных условий найти значения произвольных постоянных интегрирования.
4. В случае необходимости, записав конечные условия, найти нужные величины.

Порядок решения задач на теорию колебательного движения точки.

1. Изобразить все силы, действующие на материальную точку.
2. Составить дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось.
3. Проинтегрировать дифференциальные уравнения и найти произвольные постоянные интегрирования с помощью начальных условий задачи.
4. Найти характеристики полученного колебательного движения точки.

Занятие: Общие теоремы динамики материальной точки. Теорема об изменении количества движения точки. Теорема об изменении момента количества движения точки. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

Методические рекомендации

Что необходимо знать для решения задач:

- *Основные понятия: количество движения точки, импульс силы за конечный промежуток времени, момент количества движения материальной точки относительно центра, момент количества движения материальной точки относительно оси.*
- *Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения материальной точки.*
- *Определение кинетической энергии материальной точки.*
- *Определение работы силы переменной и постоянной сил на конечном перемещении; определение работ сил тяжести, упругости, трения.*
- *Теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной и интегральной формах.*
- *Принцип Даламбера, формулы величин и направления касательной и нормальной сил инерции.*

Порядок решения задач.

1. В зависимости от данных задачи определить, с помощью какой из теорем ее необходимо решить.
2. При использовании теоремы об изменении количества движения точки ее надо проектировать на оси, определяя проекции импульсов сил.
3. При использовании теоремы об изменении момента количества движения определить моменты всех сил относительно центра или оси.
4. Если задача решается с помощью теоремы об изменении кинетической энергии, то воспользоваться известными выражениями работ сил.
5. С помощью принципа Даламбера определяются неизвестные реакции связей.

Занятие: Общие теоремы динамики механической системы. Теорема об изменении количества движения механической системы, теорема о движении центра масс механической системы. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

Методические рекомендации

Что необходимо знать для решения задач:

- *Определение количества движения системы. Вычисление количества движения системы.*
- *Теорему об изменении количества движения системы. Законы сохранения количества движения.*
- *Теорему о движении центра масс системы.*
- *Определение кинетического момента системы. Кинетический момент относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела. Теорему об изменении кинетического момента системы. Законы сохранения кинетических моментов.*
- *Работу силы. Работу силы, приложенной к твердому телу.*
- *Определение кинетической энергии системы, кинетической энергия твердого тела.*
- *Теорему об изменении кинетической энергии системы.*

Порядок решения задач.

1. Для систем, совершающих поступательное движение, определить количество движения системы и с помощью теоремы об изменении количества движения найти искомые величины.
2. В случае использования закона сохранения движения центра масс, определить положение центров масс всех тел системы в начальном и конечном положениях, а затем найти искомые величины.
3. При исследовании вращательного движения твердого тела используется теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения. Для каждого тела системы необходимо найти его кинетический момент относительно оси вращения. Определить сумму моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно этой оси. И с помощью теоремы найти искомые величины.
4. При использовании теоремы об изменении кинетической энергии системы необходимо вычислить кинетическую энергию каждого тела системы в зависимости от вида его движения. Затем подсчитать работу всех сил, действующих на систему на ее перемещении из начального положения в конечное положение. И с помощью теоремы найти искомые величины

Занятие: Общее уравнение динамики механической системы.
Принцип возможных перемещений. Уравнения Лагранжа 2-го рода.

Методические рекомендации

Что необходимо знать для решения задач:

1. *Связи и их виды. Возможные перемещения.*
2. *Определение элементарной работы силы на возможном перемещении.*
3. *Принцип возможных перемещений.*
4. *Общее уравнение динамики.*
5. *Приведение сил инерции при различных случаях движений твердых тел.*
6. *Определение кинетической энергии твердых тел при поступательном, плоскопараллельном движениях, а также при вращении вокруг неподвижной оси.*
7. *Определение работ сил на возможных перемещениях системы.*
8. *Определение обобщенных сил.*
9. *Функцию Лагранжа.*
10. *Дифференциальные уравнения движения в форме уравнений Лагранжа второго рода.*

Порядок решения задач.

1. При решении задач на составление общего уравнения динамики необходимо изобразить все действующие на тела силы и моменты, силы реакций и силы инерции и моменты сил

инерции. Последние зависят от того, какое движение совершает тело. Затем дать системе возможное перемещение и подсчитать работу всех этих сил и моментов на этом перемещении. Из полученного уравнения определяются неизвестные величины.

2. При решении задач с применением уравнений Лагранжа второго рода необходимо определить число степеней свободы системы, задать обобщенные координаты, вычислить кинетическую энергию системы и обобщенные силы через обобщенные координаты и скорости. Затем, составив уравнения Лагранжа второго рода, определить искомые величины.
3. В случае действия потенциальных сил вычисляется потенциальная энергия этих сил и используются уравнения Лагранжа для потенциальных сил.

4. Примерная тематика вопросов, выносимых на экзамен по дисциплине, по темам практических занятий

1. Определение связей, сил реакций и их направлений для некоторых связей.
2. Определение системы сходящихся сил и ее равнодействующей (геометрически и аналитически).
3. Условия равновесия системы сходящихся сил (геометрические и аналитические).
4. Момент силы относительно точки как вектор.
5. Определение плеча силы относительно точки.
6. Условия равновесия системы пар сил.
7. Теорема Вариньона
8. Определение алгебраической величины момента силы относительно точки. Случай, когда этот момент равен нулю.
9. Определение алгебраической величины момента пары сил.
10. Определение главного вектора и главного момента произвольной плоской системы сил.
11. Аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил (три формы).
12. Замена распределенных сил равнодействующей.
13. Определение реакции жесткой заделки.
14. Вычисление момента силы относительно оси.
15. Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
16. Аналитические условия равновесия пространственной системы параллельных сил.
17. Определение скорости и ускорения точки при различных способах задания ее движения.
18. Определение скорости и ускорения точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, по величине и направлению.
19. Определение плоскопараллельного движения твердого тела и его основные кинематические характеристики.
20. Определение скорости точки тела при плоском движении (теорема о сложении скоростей).
21. Определение мгновенного центра скоростей (МЦС) и частных случаев его нахождения.
22. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью МЦС.
23. Определение ускорений точек плоской фигуры.
24. Определение величин и направлений ускорений $\vec{a}^{вр}_{BA}$, $\vec{a}^{ц}_{BA}$.
25. Определение абсолютного, относительного и переносного движений.
26. Теорема о сложении скоростей при сложном движении точки.
27. Теорема Кориолиса.
28. Определение величины и направления кориолисова ускорения.
29. Основные задачи динамики для свободной и несвободной материальных точек.
30. Импульс силы за конечный промежуток времени.
31. Количество движения точки и теорема о его изменении в дифференциальной и конечной формах.

32. Момент количества движения точки.
33. Теоремы об изменении момента количества движения точки относительно центра и оси.
34. Законы сохранения моментов количества движения точки относительно центра и оси.
35. Работа силы на конечном перемещении точки, ее аналитические выражения.
36. Формулы работ сил тяжести, упругости, трения, тяготения. Формула кинетической энергии точки.
37. Теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной и интегральной формах.
38. Принцип Даламбера для материальной точки.
39. Количество движение системы и теорема о его изменении. Законы сохранения количества движения системы.
40. Определение кинетического момента системы. Кинетический момента вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Законы сохранения кинетического момента системы относительно центра и оси.
41. Кинетическая энергия механической системы. Кинетическая энергия твердого тела в случаях, когда тело совершает поступательное, вращательное или плоскопараллельное движения.
42. Работы силы тяжести, вращающего момента и момента трения качения.
43. Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной и интегральной формах. Закон сохранения механической энергии для системы.
44. Возможное перемещение точки и системы.
45. Возможная работа. Определение идеальной связи. Принцип возможных перемещений.
46. Общее уравнение динамики.
47. Обобщенные координаты точки и системы. Функция Лагранжа. Уравнения Лагранжа 2-го рода.

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»
в г. Смоленске

Методические рекомендации к расчетно-графической работе по дисциплине

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

(НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ)

Смоленск – 2020 г.

1. Цели и задачи, объем практических занятий по дисциплине

Цель расчетно-графической работы по дисциплине «Теоретическая механика» – закрепление соответствующего лекционного материала дисциплины.

Тема расчетно-графической работы «Определение механических характеристик конструкций».

Для достижения поставленной цели при выполнении расчетно-графической работы студентами решаются следующие задачи:

- освоение физико-математического аппарата по определению механических характеристик движения материальных точек и твердых тел, методов моделирования механических систем;
- привитие навыков применения теоретических знаний для решения практических задач исследования механических систем в дальнейшей профессиональной деятельности;
- освоение методов обеспечения реализации основных законов классической механики для их реализации при решении задач.

Объем занятий - в соответствии с рабочей программой дисциплины «Теоретическая механика».

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ

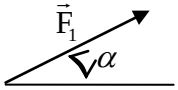
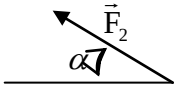
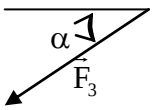
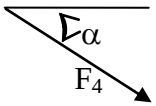
Курс теоретической механики состоит из трех разделов: статики, кинематики и динамики. Студент решает задачи, предлагаемые преподавателем по каждому из разделов. Во всех задачах номер условия выбирается по последней цифре шифра, а номер рисунка – по предпоследней. При решении задач необходимо учесть, что рисунки изображены без соблюдения масштабов, все нити и тросы являются нерастяжимыми и невесомыми. При выполнении заданий все преобразования и промежуточные вычисления должны быть последовательно проделаны, решения задач сопровождены краткими пояснениями и подробно описано, какими формулами и теоремами пользовался студент при решении задачи.

Примечание. Содержание и постановка задач С1, С3, К1, К2, К3, Д2 принадлежат Таргу С.М. (Теоретическая механика. Методические и контрольные задания. – М.: Высшая школа, 1983).

ЗАДАЧА С1. Жесткая рама закреплена в точке А шарнирно, а в точке В прикреплена или к невесомому стержню ВВ/, или к шарнирной опоре на катках; стержень прикреплен к раме и к неподвижной опоре шарнирами. На раму действуют пара сил с моментом М = 60 кН·м и две силы, величины, направления и точки приложения которых указаны в таблице С1.

Определить реакции связей в точках А и В, вызываемые данными нагрузками, если Р=5 кН.

Таблица С1

Сила								
	F_1= 10 кН		F_2= 20 кН		F_3= 30 кН		F_4= 40 кН	
Номер условия	Точка приложения	α	Точка приложения	α	Точка приложения	α	Точка приложения	α

0	-	-	K	60^0	L	45^0	-	-
1	L	60^0	-	-	-	-	K	45^0
2	-	-	L	45^0	K	30^0	-	-
3	K	30^0	-	-	-	-	L	45^0
4	-	-	K	30^0	L	45^0	-	-
5	K	45^0	-	-	L	30^0	-	-
6	-	-	L	60^0	-	-	K	45^0
7	L	30^0	-	-	-	-	K	45^0
8	K	60^0	L	45^0	-	-	-	-
9	-	-	-	-	K	45^0	L	60^0

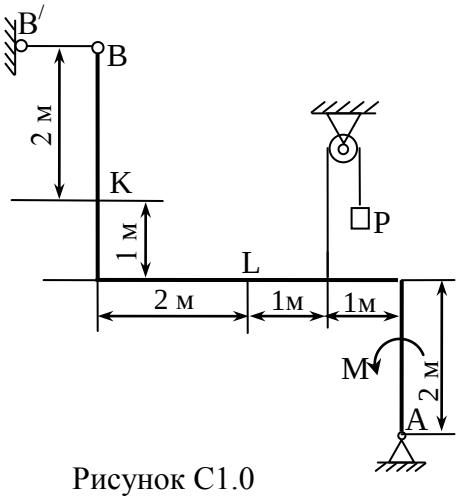


Рисунок С1.0

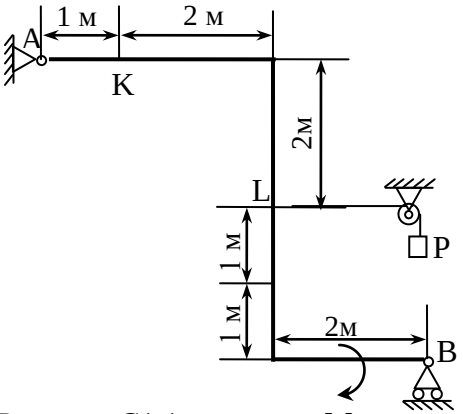


Рисунок С1.1

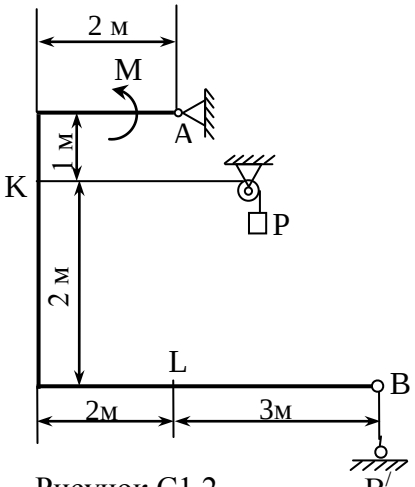


Рисунок С1.2

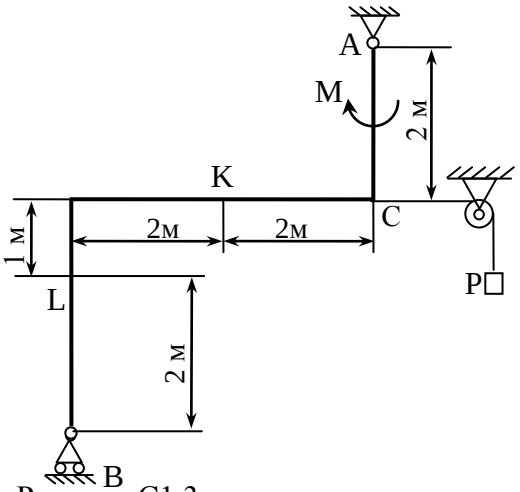


Рисунок С1.3

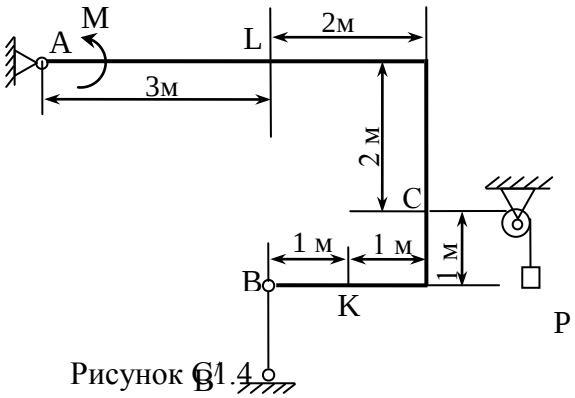


Рисунок С1.4

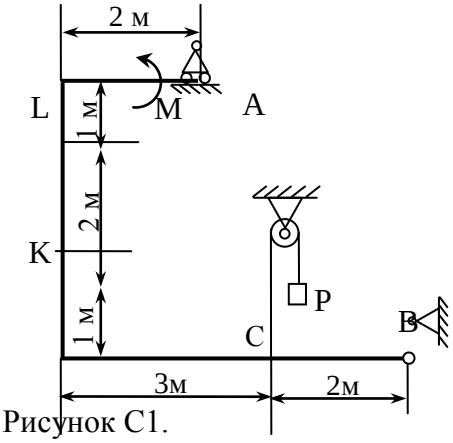


Рисунок С1.

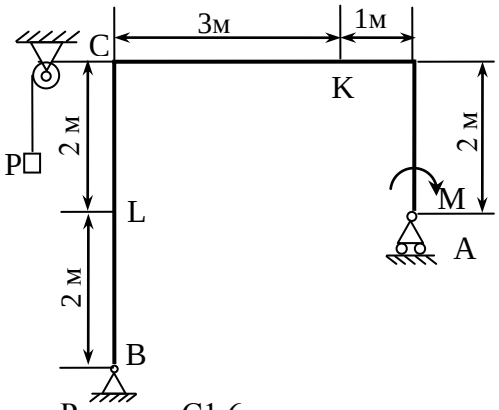


Рисунок С1.6

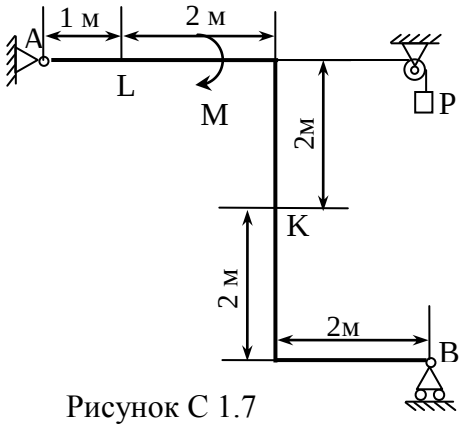


Рисунок С 1.7

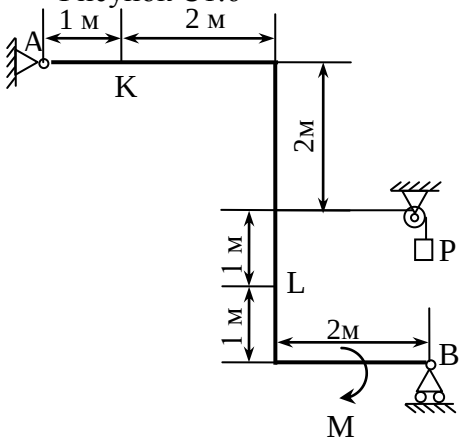


Рисунок С 1.8

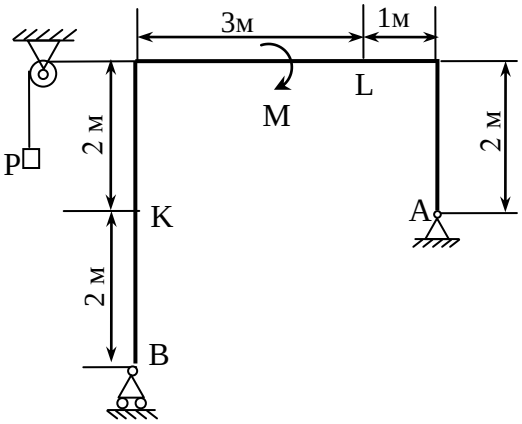


Рисунок С 1.9

ЗАДАЧА С2. Найти реакции опор составной конструкции, состоящей из двух тел, соединенных в точке С. К конструкции приложены пара сил с моментом М = 60 кН м и две силы, величины, точки приложения и направления которых указаны в таблице С1.

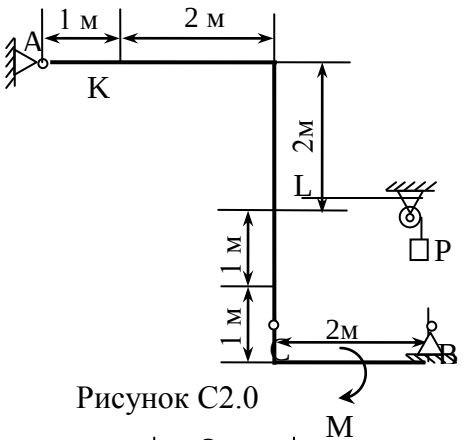


Рисунок С2.0

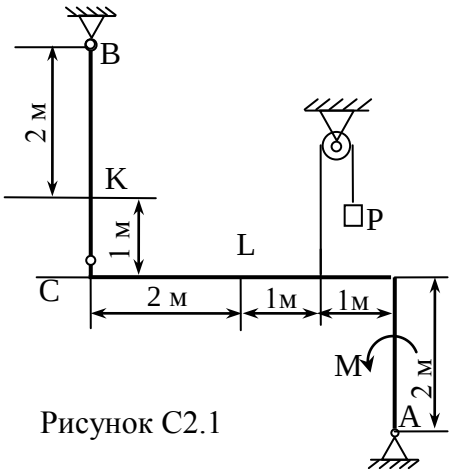
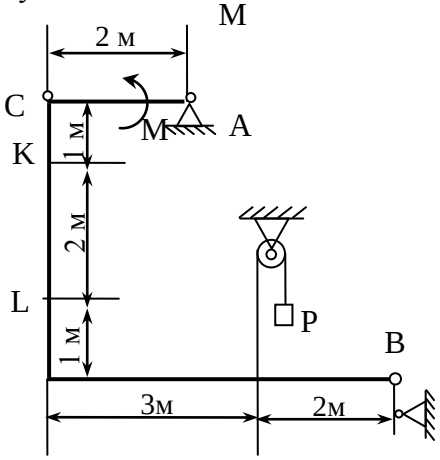


Рисунок С2.1



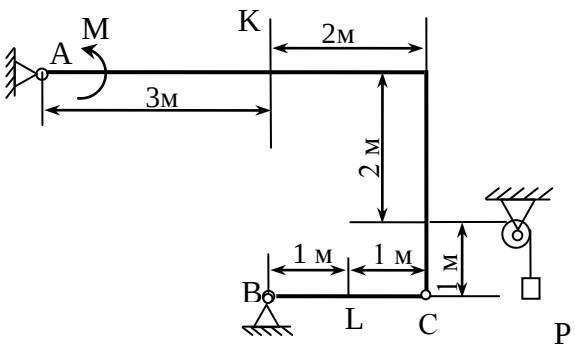


Рисунок С2.2

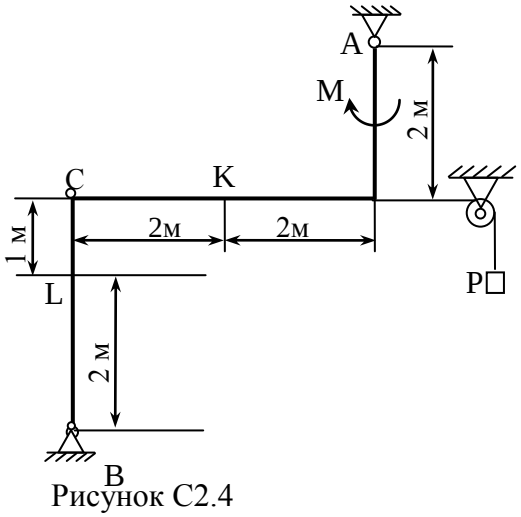


Рисунок С2.

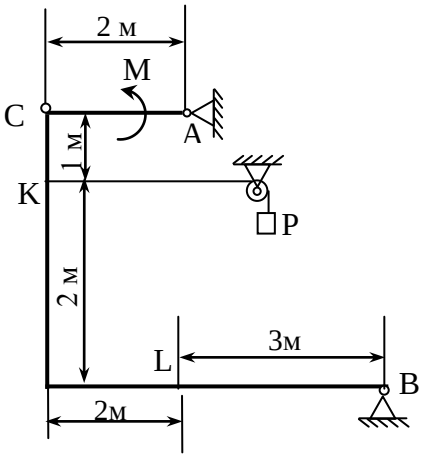


Рисунок С2.4

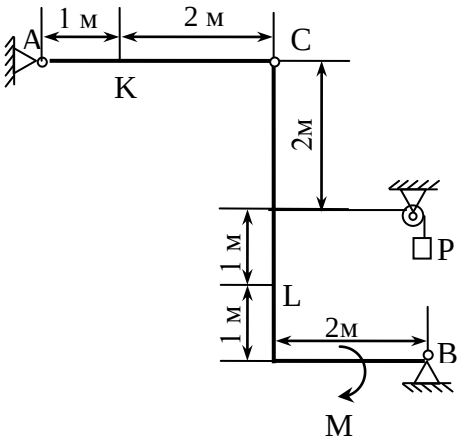


Рисунок С2.5

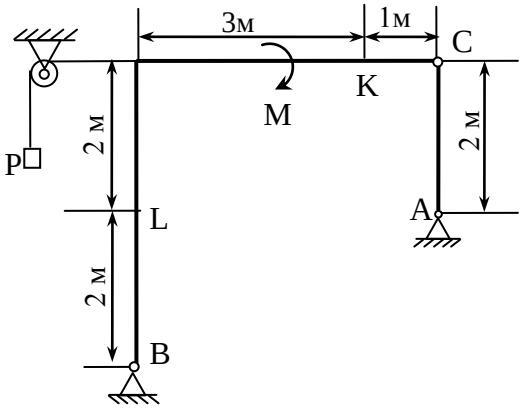
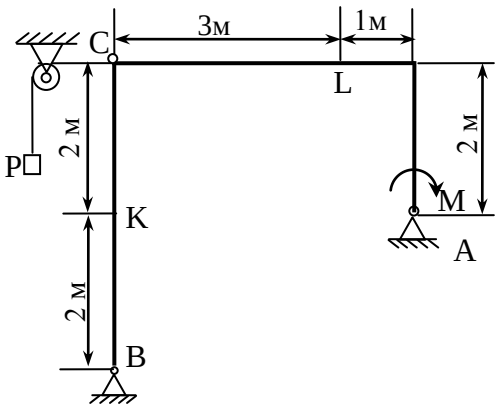


Рисунок С2.6

Рисунок С2.7



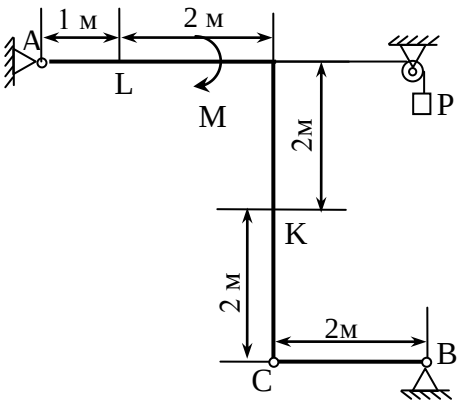


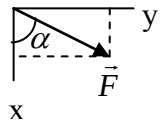
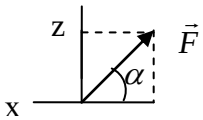
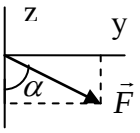
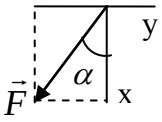
Рисунок С2.8

Рисунок С2.9

ЗАДАЧА С3. Однородная прямоугольная плита весом P = 3 кН закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим шарниром в точке B и невесомым стержнем CC/. На плиту действует сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M = 4 кН м (в плоскости плиты). Значение силы $\vec{F}$, направление и точка ее приложения указаны в таблице С2. Точка приложения силы $\vec{F}$ (K, L)

находится в середине соответствующей стороны плиты. Определить реакции опор A, B и стержня CC' при следующих значениях размеров плиты AB = =1,2 м, BC = 1,8 м.

Таблица С2

Сила								
Номер условия	F=4 кН		F=6 кН		F=8 кН		F=10 кН	
	Точка приложения	α	Точка приложения	α	Точка приложения	α	Точка приложения	α
0	K	60^0	-	-	-	-	-	-
1	-	-	L	60^0	-	-	-	-
2	-	-	-	-	K	60^0	-	-
3	-	-	-	-	-	-	K	30^0
4	-	-	-	-	K	30^0	-	-
5	-	-	L	30^0	-	-	-	-
6	-	-	-	-	L	60^0	-	-
7	K	30^0	-	-	-	-	-	-
8	-	-	L	60^0	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	K	30^0

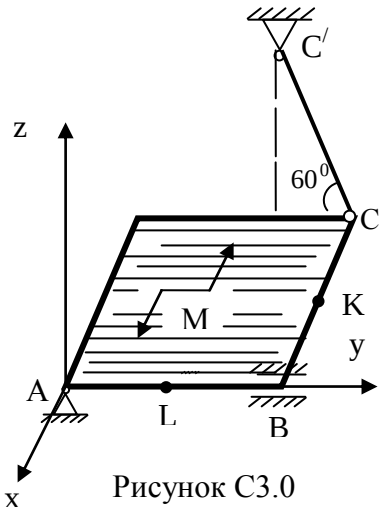


Рисунок С3.0

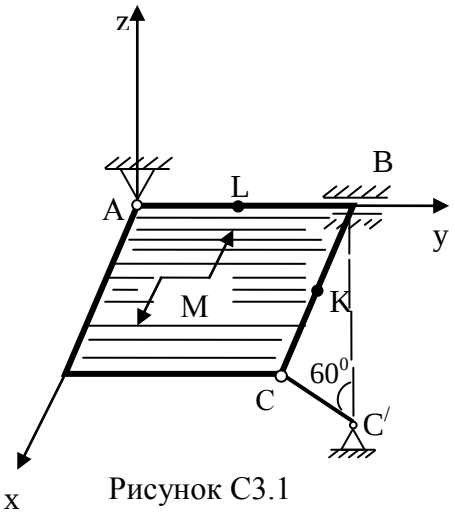


Рисунок С3.1

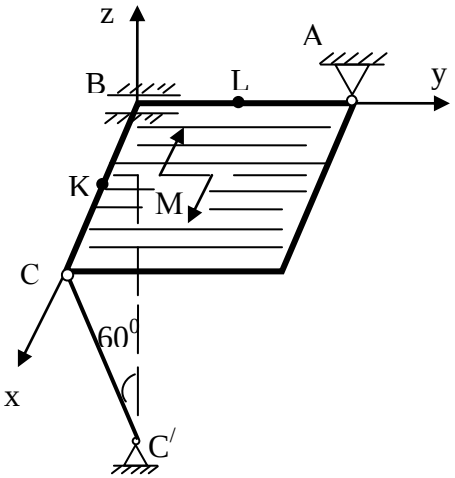


Рисунок С3.2

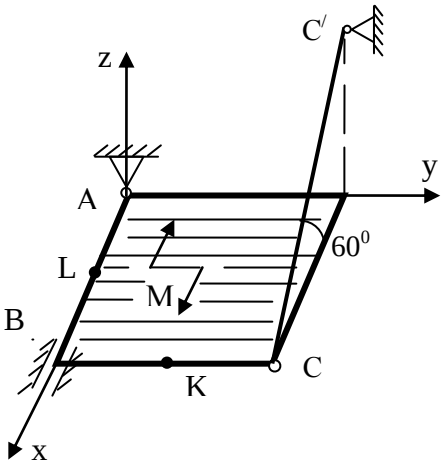


Рисунок С3.3

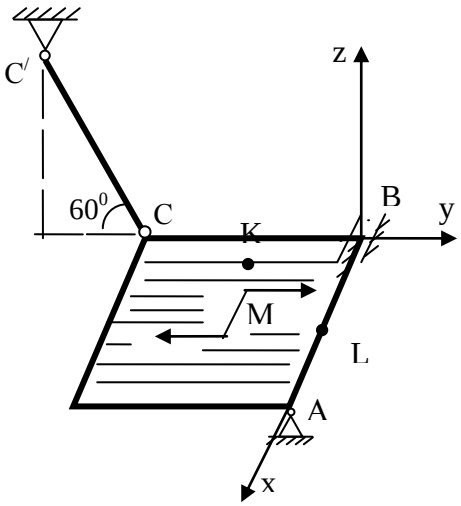


Рисунок С3.4

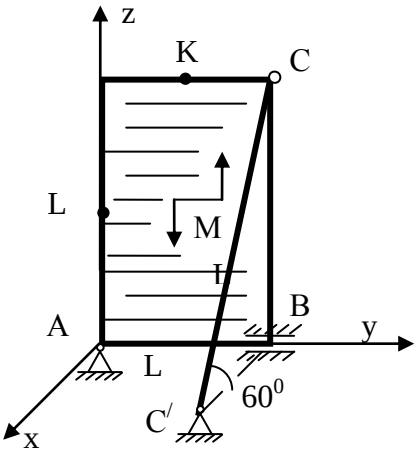


Рисунок С3.5

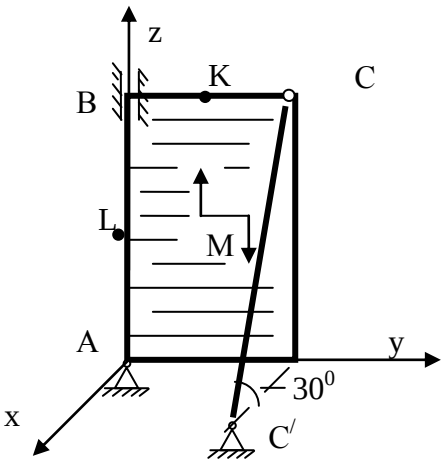


Рисунок С3.6

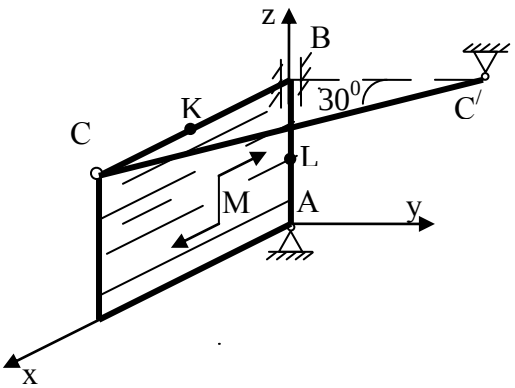


Рисунок С3.7

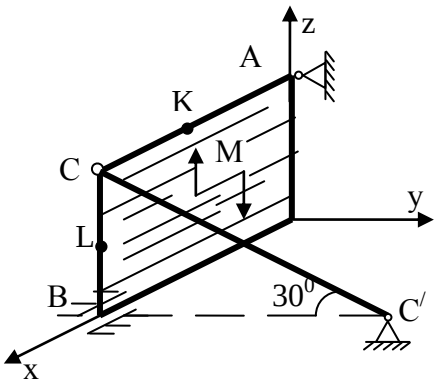


Рисунок С3.8

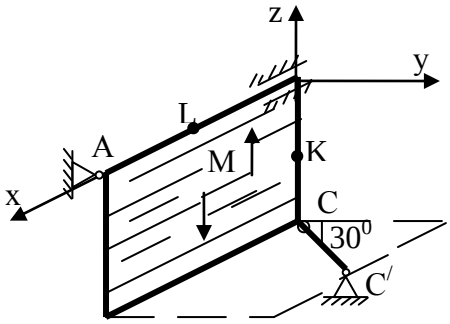


Рисунок С3.9

ЗАДАЧА К1. Точка К движется в плоскости xOy. Закон движения точки задан уравнениями $x = f_1(t), y = f_2(t)$ (x, y выражены в сантиметрах, t в секундах). Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1c$ определить скорость и ускорение точки, касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны траектории.

Примечание. Номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, номер условия в таблице К1 – по последней.

Таблица К1

Номер условия	$y = f_2(t)$		
	Рис. 0-2	Рис. 3-6	Рис. 7-9
0	$4-9\cos(\frac{\pi}{6}t)$	t^2-2	$-4\cos(\frac{\pi}{3}t)$
1	$2-3\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$8\cos(\frac{\pi}{4}t)$	$10\sin(\frac{\pi}{6}t)$
2	$4-6\cos^2(\frac{\pi}{6}t)$	$4+2t^2$	$12\sin^2(\frac{\pi}{6}t)$
3	$12\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$2(t+1)^2$	$2-4\sin(\frac{\pi}{6}t)$
4	$9\cos(\frac{\pi}{3}t)+5$	$2+2\sin(\frac{\pi}{4}t)$	$12\cos(\frac{\pi}{3}t)+13$
5	$-10\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$3t^2-2$	$3\sin(\frac{\pi}{6}t)$
6	$8\cos(\frac{\pi}{6}t)-3$	$(t+1)^3$	$16\sin^2(\frac{\pi}{6}t)-14$

7	$-9\cos^2(\frac{\pi}{6}t)$	$3-4\cos(\frac{\pi}{4}t)$	$6\cos(\frac{\pi}{3}t)$
8	$6\cos(\frac{\pi}{3}t)-4$	$2t^3$	$4-9\sin(\frac{\pi}{6}t)$
9	$2-2\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$2\sin(\frac{\pi}{4}t)$	$8\cos(\frac{\pi}{3}t)+6$

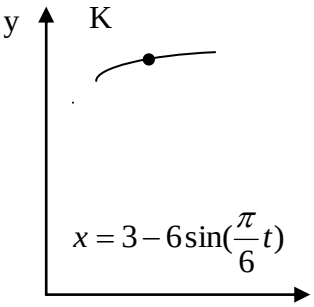


Рисунок К1.0

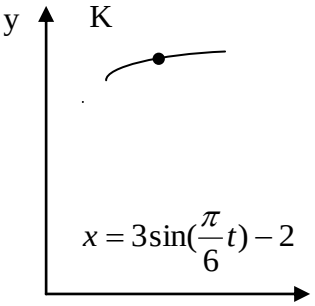


Рисунок К1.1

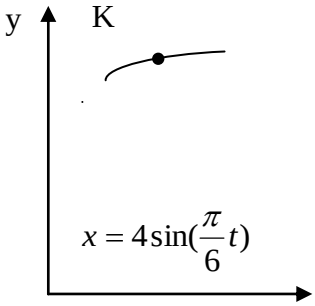


Рисунок К1.2

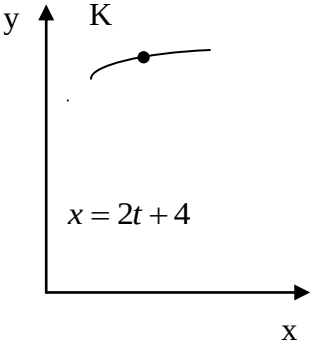


Рисунок К1.3

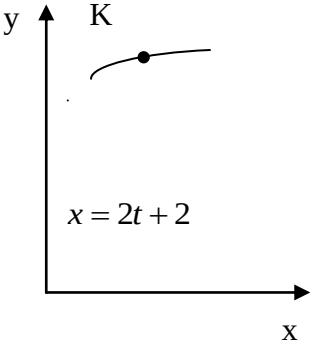


Рисунок К1.4

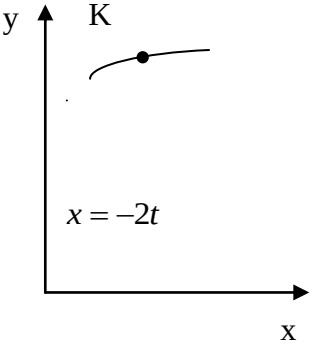


Рисунок К1.5

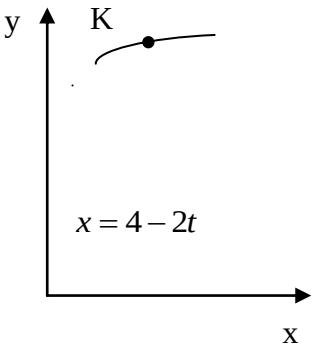


Рисунок К1.6

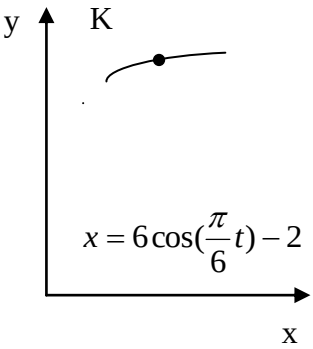


Рисунок К1.7

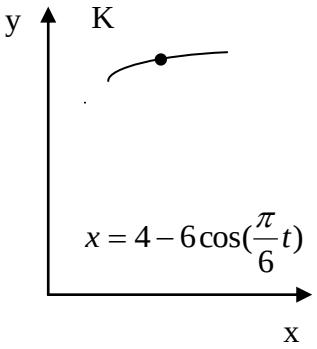


Рисунок К1.8

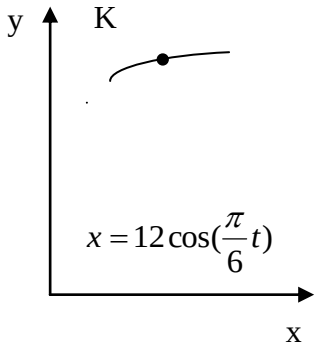


Рисунок К1.9

ЗАДАЧА К2. Плоский механизм состоит из стержней1-4 и ползуна В, соединенных между собой и с неподвижными опорами шарнирами. Длины стержней l_1=0,4 м, l_2=1,2 м, l_3= 1,4 м, l_4=0,8 м. Точка D на рисунках и точка К на рисунках 7-9 находятся в середине соответствующих стержней. Определить угловые скорости звеньев 1 и 4, мгновенные угловые скорости звеньев 2 и 3, а также скорости точек А, D, Е, К, В(если не задана скорость точки В v_B) заданного механизма.

Построение чертежа необходимо начинать со стержня, направление которого определяется углом α ; заданную угловую скорость считать направленной против хода часовой стрелки, а заданную скорость точки В – от точки В к b.

Примечание. При решении задачи следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием мгновенного центра скоростей из раздела «Плоскопараллельное движение твердого тела».

Таблица К2

Номер условия	Углы					Дано		
	α^0	β^0	γ^0	φ^0	θ^0	ω_1, рад/с	ω_4, рад/с	v_B, м/с
0	30	150	120	0	60	6	-	-
1	60	60	60	90	120	-	3	-
2	0	120	120	0	60	-	-	10
3	90	120	90	90	60	10	-	-
4	0	150	30	0	60	-	4	-
5	60	150	120	90	30	-	-	8
6	30	120	30	0	60	8	-	-
7	90	150	120	90	30	-	5	-
8	0	60	30	0	120	-	-	6
9	30	120	120	0	60	4	-	-

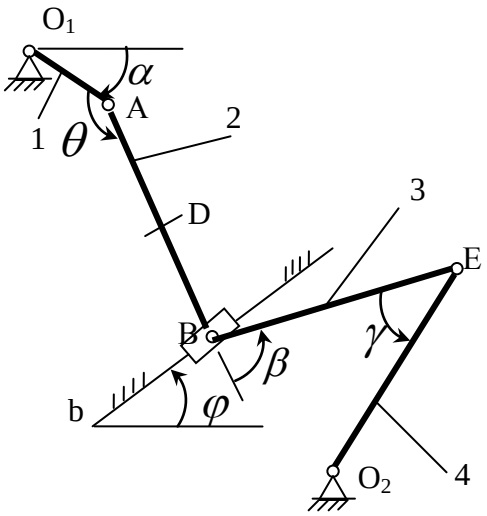


Рисунок К2.0

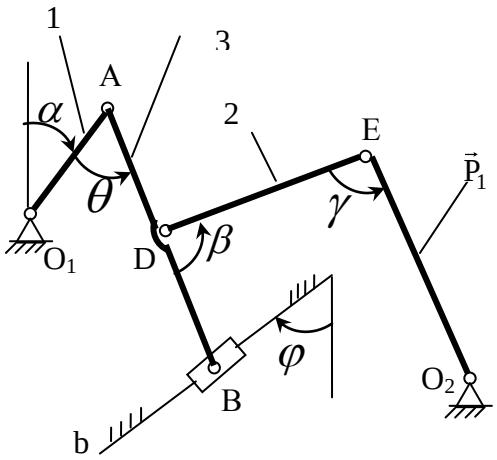


Рисунок К2.1

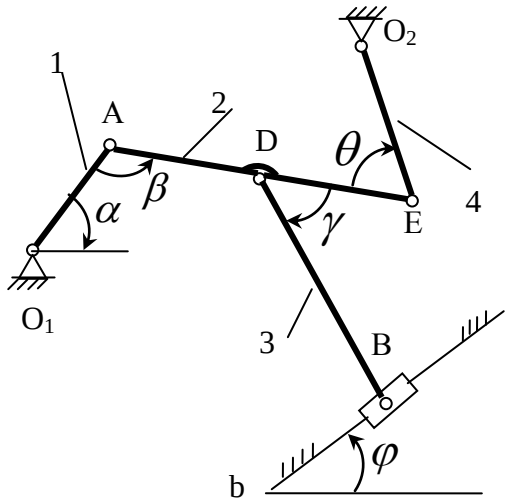


Рисунок К2.2

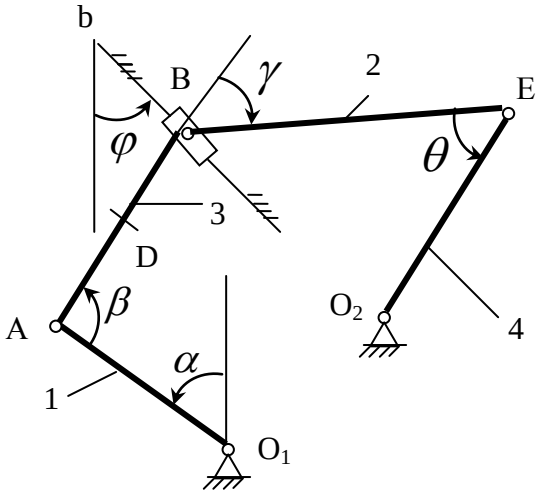


Рисунок К2.3

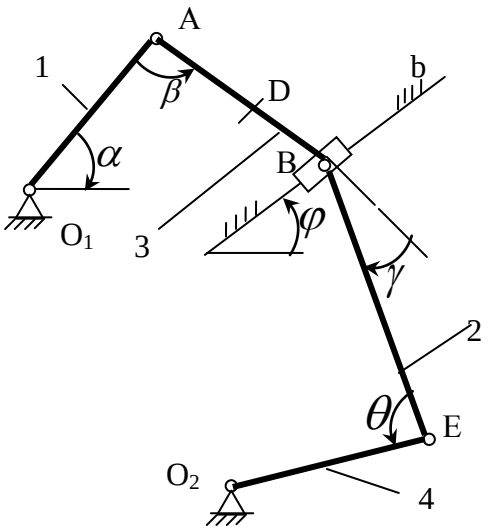


Рисунок К2.4

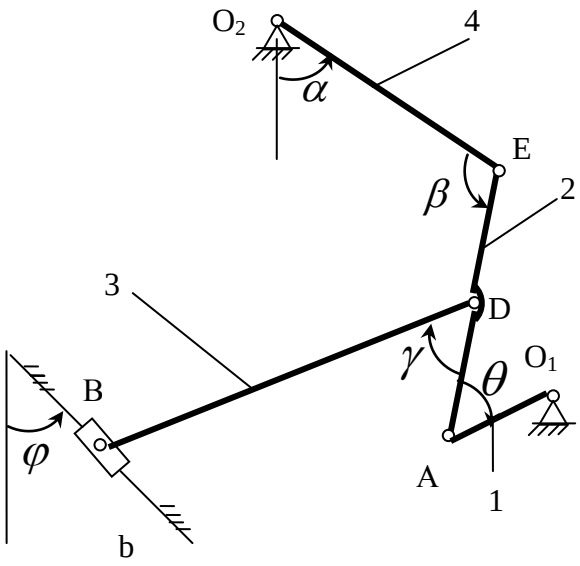


Рисунок К2.5

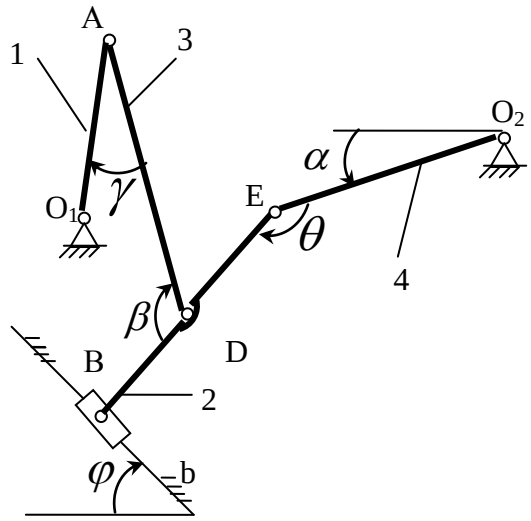


Рисунок К2.6

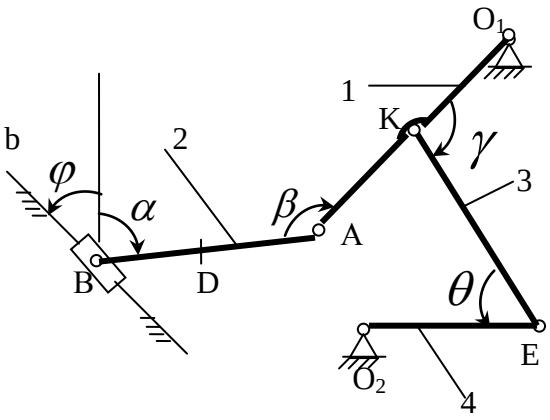


Рисунок К2.7

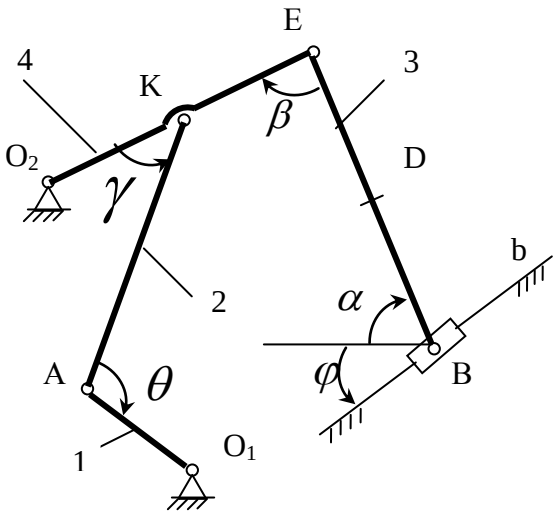


Рисунок К2.8

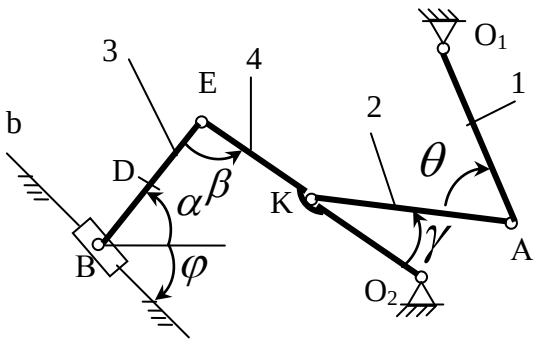


Рисунок К2.9

ЗАДАЧА К3. Пластина вращается с постоянной угловой скоростью ω, заданной в таблице К3 (при знаке направления ω, противоположно показанному на рисунке). По пластине вдоль прямой BD (рис.0-5) или по окружности радиуса R=60 см (рис.6-9) движется точка М. Закон ее относительного движения выражается уравнением s = $A\breve{M}$ и отсчитывается по дуге окружности. На рисунках точка М показана в положении s>0 (при s<0 точка М находится по другую сторону от точки А). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент времени t= 1 с.

Таблица К3

Номер условия	ω,1/с	Рис. 0-5		Рис.6-9	
		b, см	s = AM	a	s = $A\breve{M}$
0	-2	16	$60(t^4-3t^2)+56$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^4-3t^2)$
1	4	20	$60(t^3-2t^2)$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3-2t)$
2	3	8	$80(2t^2-t^3)-48$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t-t^2)$
3	-4	12	$40(t^2-3t)+32$	3R/4	$\frac{\pi}{2}R(t^3-2t^2)$
4	-3	10	$50(t^3-t)-30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2-t)$
5	2	12	$50(3t-t^2)-64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2-2t^3)$
6	4	20	$40(t-2t^3)-40$	4R/3	$\frac{\pi}{2}R(t-2t^2)$
7	-5	10	$80(t^2-t)+40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2-1)$
8	2	8	$60(t-t^3)+24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t-5t^2)$
9	-5	16	$40(3t^2-t^4)-32$	4R/3	$\frac{\pi}{2}R(2t^2-t^3)$

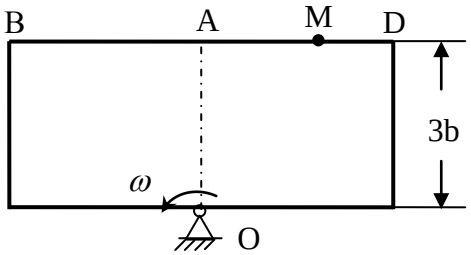


Рисунок К3.0

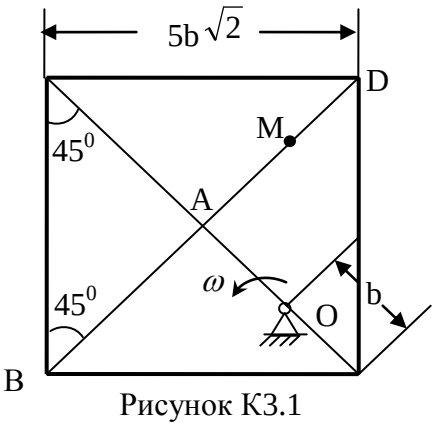


Рисунок К3.1

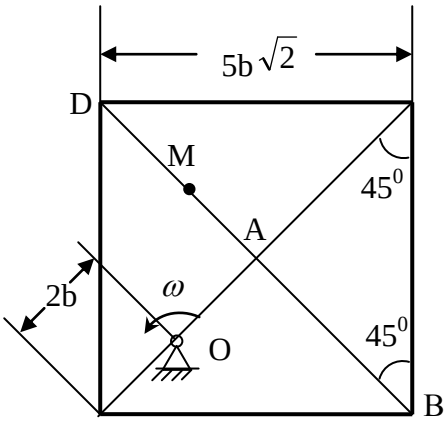


Рисунок К3.2

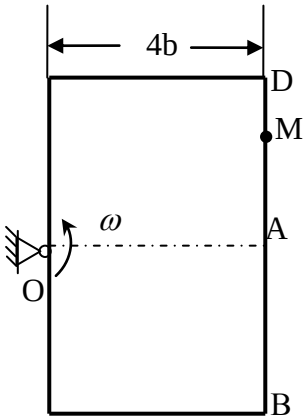


Рисунок К3.3

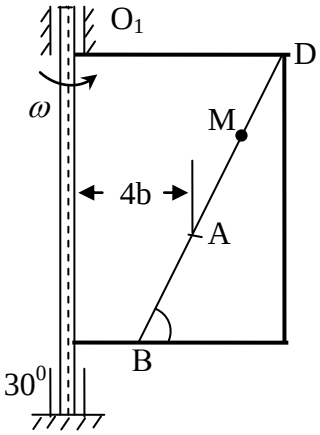


Рисунок К3.4

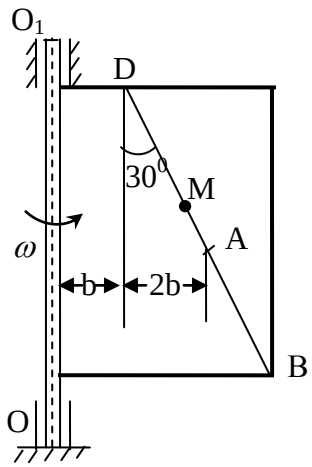


Рисунок К3.5

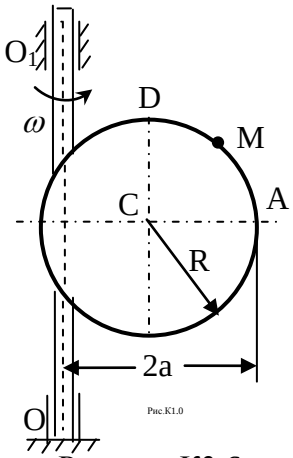


Рисунок К3.6

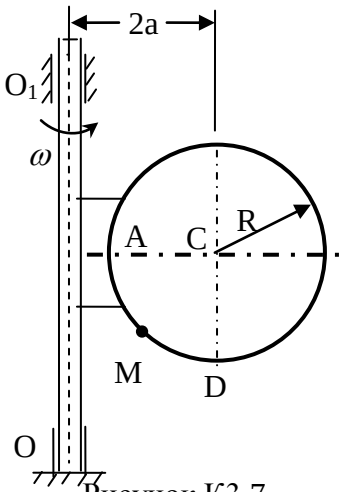


Рисунок К3.7

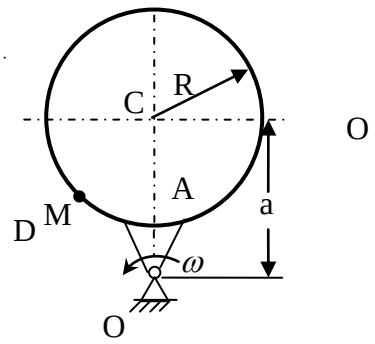


Рисунок К3.8

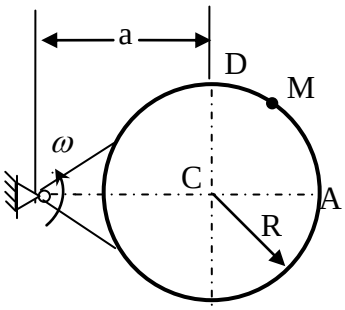


Рисунок К3.9

ЗАДАЧА Д1. Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится в состоянии равновесия под действием приложенных сил, положение равновесия определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$. Длины стержней l_1=0,4 м, l_2=1,2 м, l_3= 1,4 м, l_4=0,8 м. Точка D и точка К на рисунках находятся в середине соответствующих стержней. На механизм действуют две пары сил с моментами M_1 и M_2, приложенные к стержням 1 и 4. Система уравновешивается параллельной Bb силой $\vec{F}$, приложенной к ползуну. Определить, чему равна и в какую сторону направлена сила $\vec{F}$.

Построение чертежа необходимо начинать со стержня, направление которого определяется углом α.

Таблица Д1

Номер условия	Углы					M_1, Н м	M_2, Н м
	α^0	β^0	γ^0	φ^0	θ^0		
0	30	150	120	0	60	100	240
1	60	60	60	90	120	220	80
2	0	120	120	0	60	280	120
3	90	120	90	90	60	240	160
4	0	150	30	0	60	120	360
5	60	150	120	90	30	180	240
6	30	120	30	0	60	260	320
7	90	150	120	90	30	320	240
8	0	60	30	0	120	220	100
9	30	120	120	0	60	140	200

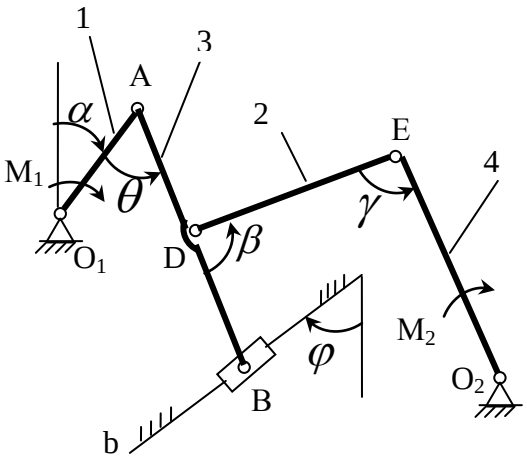


Рисунок Д1.0

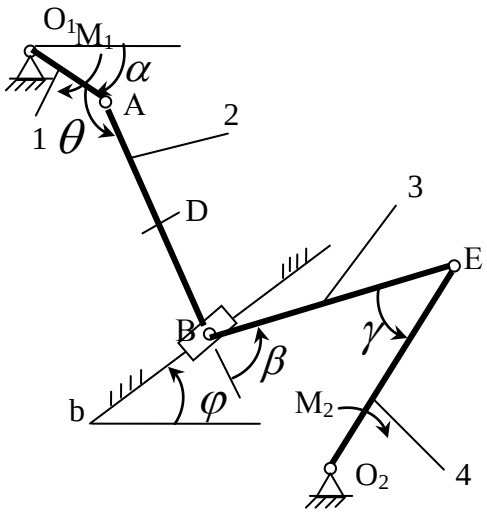


Рисунок Д1.1

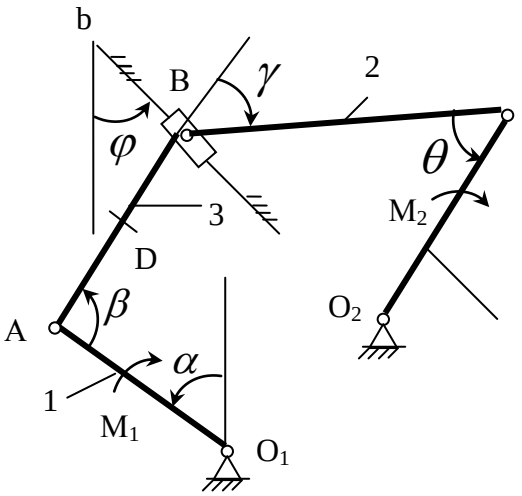


Рисунок Д1.2

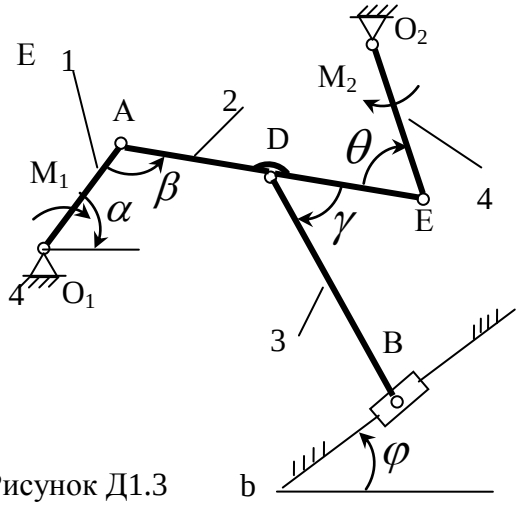


Рисунок Д1.3

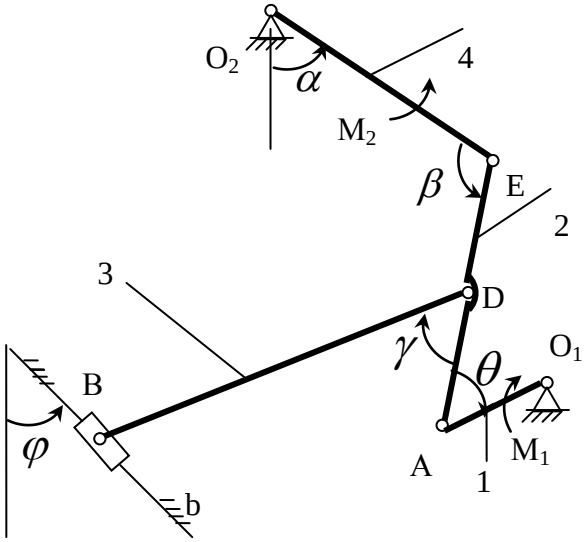


Рисунок Д1.4

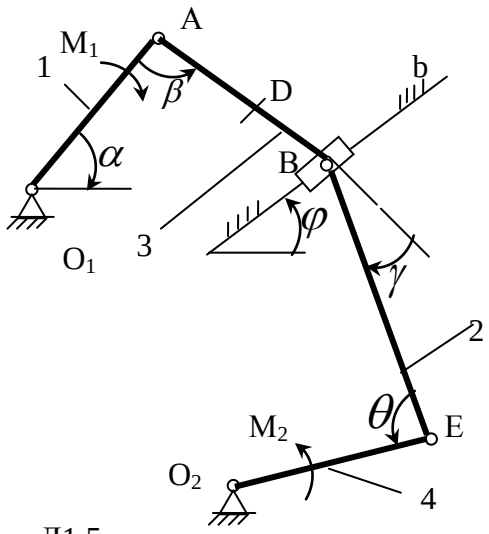


Рисунок Д1.5

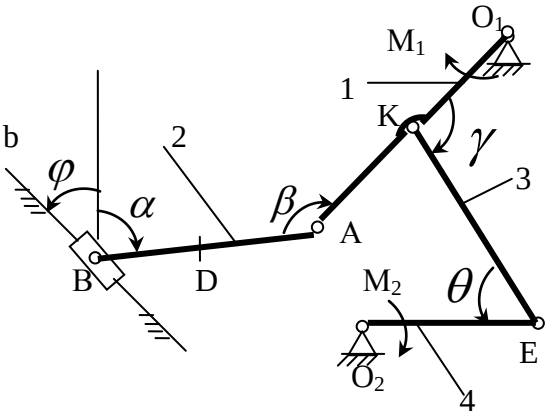


Рисунок Д1.6

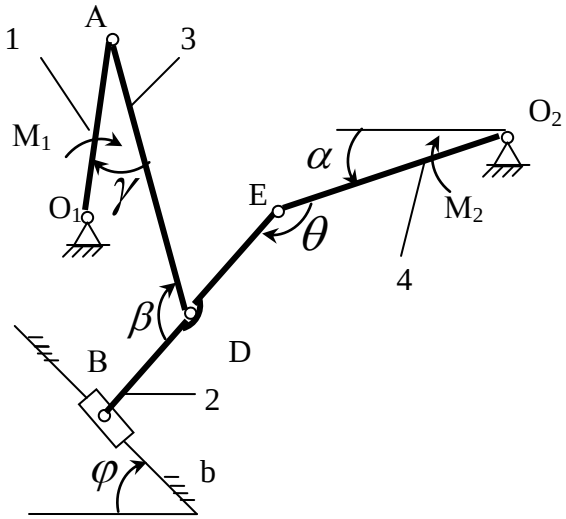


Рисунок Д1.7

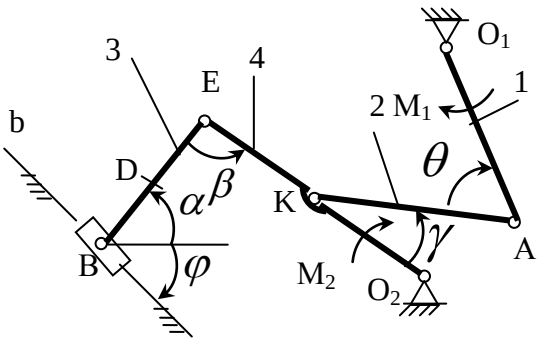


Рисунок Д1.8

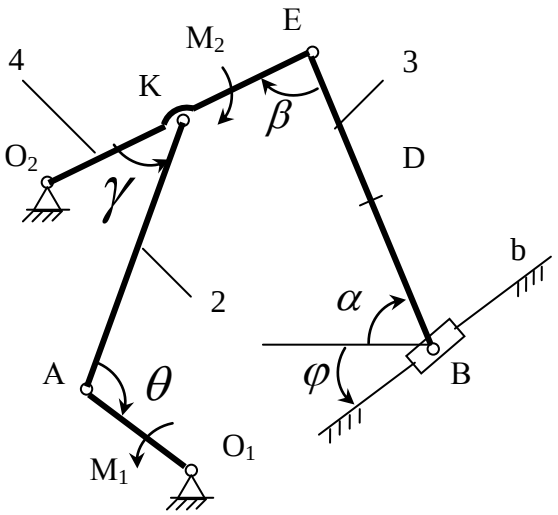


Рисунок Д1.9

ЗАДАЧА Д2. Механическая система состоит из шкивов 1 и 2, обмотанных нитями, и грузов 3-5,прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и двух пар сил с моментами M_1 и M_2. Радиусы ступеней шкива 1 равны: R_1=0,3 м, r_1=0,15 м, а шкива 2 – R_2=0,2 м, r_2= 0,1 м; их радиусы инерции относительно осей вращения равны ρ_1 = 0,2 м, ρ_2=0,1 м. Пренебрегая трением, определить ускорение груза, имеющего больший вес.

Примечание. Тот из грузов 3,4,5, вес которого равен нулю, на чертеже не изображать.

Таблица Д2

Номер условия	P_1 Н	P_2 Н	P_3 Н	P_4 Н	P_5 Н	M_1 Н м	M_2 Н м
0	10	0	20	0	30	0,3	0
1	0	30	20	10	0	0	0,4
2	0	20	0	30	10	0,6	0
3	30	0	10	20	0	0	0,6
4	10	0	0	30	20	0	0,2
5	0	10	30	0	20	0,3	0
6	0	30	0	10	20	0	0,6
7	20	0	30	0	10	0	0,2
8	0	10	20	30	1	0,3	0
9	20	0	0	10	30	0,6	0

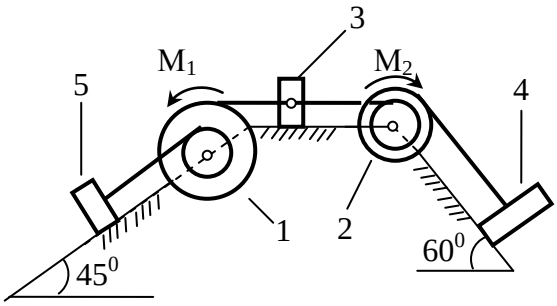


Рисунок Д2.0

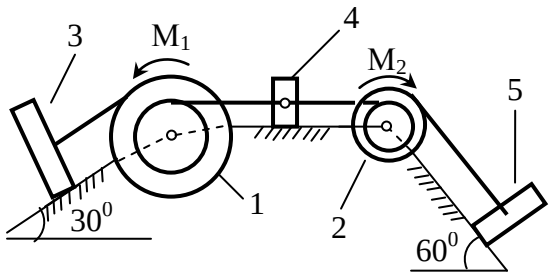


Рисунок Д2.1

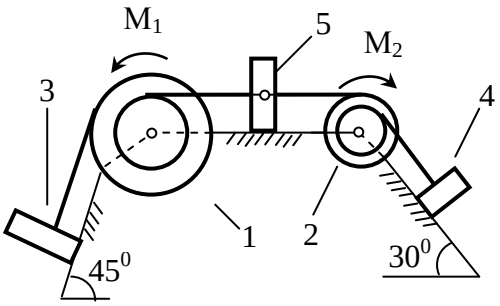


Рисунок Д2.2

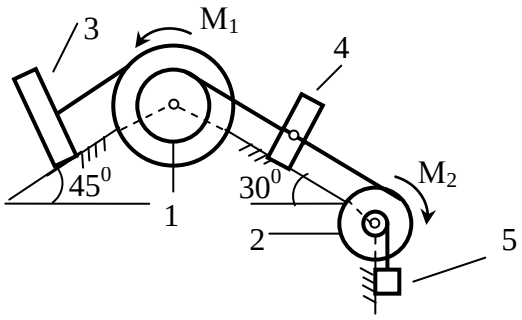


Рисунок Д2.3

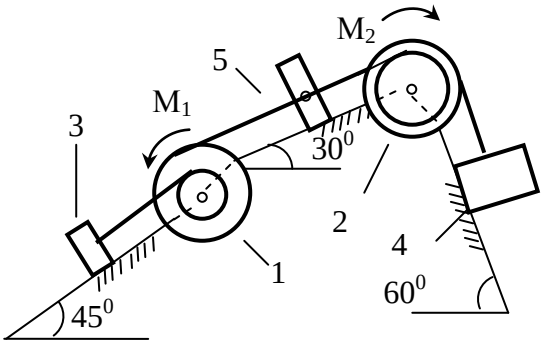


Рисунок Д2.4

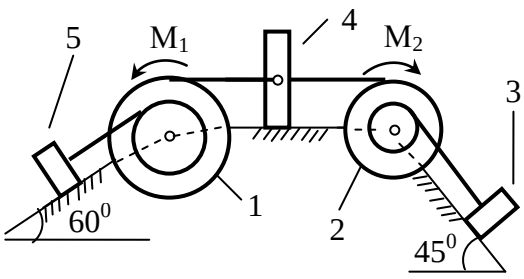


Рисунок Д2.5

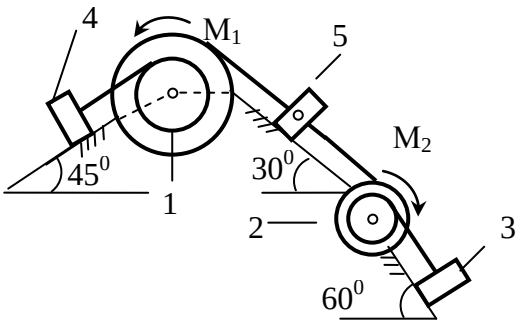


Рисунок Д2.6

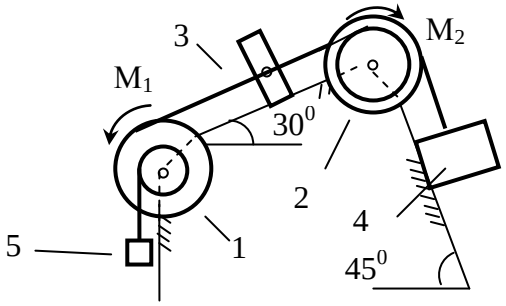


Рисунок Д2.7

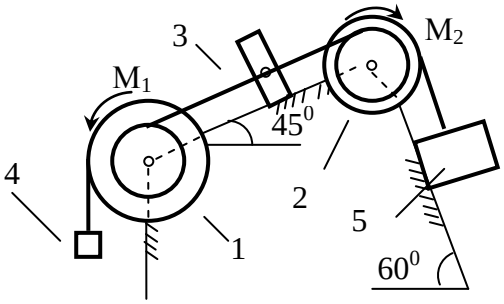


Рисунок Д2.8

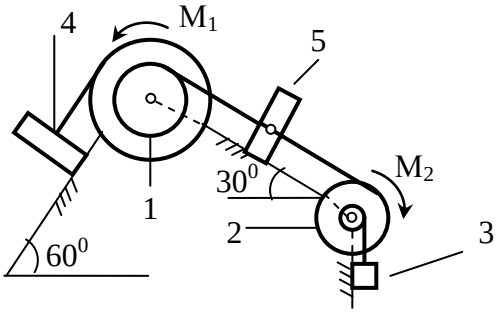


Рисунок Д2.9

4. Примеры вопросов к защите расчетно-графической работы

1. В каком случае момент силы относительно данной точки равен нулю?
2. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
3. Дайте определение алгебраической величины момента силы относительно некоторого центра.
4. Дайте определение момента силы относительно оси и укажите способы его нахождения.
5. Как определяется момент силы относительно точки и оси?
6. Как формулируются аналитические условия равновесия плоской системы сил?
7. Напишите и сформулируйте три формы условий равновесия произвольной плоской системы сил.
8. Напишите и сформулируйте векторные и аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
9. Абсолютная, относительная и переносная скорости точек. Теорема сложения скоростей в сложном движении точки
10. Абсолютное, относительное и переносное ускорения точки. Теорема сложения ускорений в сложном движении точки (теорема Кориолиса)
11. В каких случаях ускорение Кориолиса обращается в ноль?
12. В какой плоскости расположено ускорение точки и чему равны его проекции на естественные координатные оси?
13. Где находится МЦС плоской фигуры, совершающей мгновенно поступательное движение?
14. Дайте определение вращательного движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Как задается это движение.
15. Дайте определение плоскопараллельного движения твердого тела, обоснуйте и запишите уравнения плоскопараллельного движения.

16.Запишите формулу распределения скоростей точек плоской фигуры. Как определить скорости точек плоской фигуры с помощью этой формулы?
17.Запишите формулу распределения ускорений точек плоской фигуры. Как определить ускорения точек плоской фигуры с помощью этой формулы?
18.Запишите векторную формулу ускорения Кориолиса. Сформулируйте правило для определения направления вектора ускорения Кориолиса? Поясните это правило с помощью рисунка.
19.Запишите формулу модуля ускорения Кориолиса. В каких случаях кориолисово ускорение точки равно нулю?
20.Какое движение точки называется относительным? Какое — переносным?
21.Сформулировать правило Жуковского для определения направления ускорения Кориолиса.
22.Теорема о скорости точки в сложном движении.
23.Теорема об ускорении точки в сложном движении (теорема Кориолиса).
24.Дайте определение и запишите формулу момента количества движения материальной точки.
25.Дайте определение и запишите формулы возможной работы силы. Сформулируйте определение идеальной связи.
26.Дать определение кинетической энергии материальной точки и механической системы.
27.Записать формулу для определения возможной работы сил, приложенных к механической системе.
28.Записать формулу, выражающую принцип возможных перемещений.
29.Записать формулу, выражающую общее уравнение динамики.
30.Записать формулу для определения силы инерции материальной точки.
31.Записать формулу для определения главного вектора сил инерции поступательно движущегося твердого тела.
32.Записать формулу для определения момента сил инерции при вращении тела относительно оси, проходящей через его центр масс.
33.Записать формулы для определения инерционных нагрузок при плоскопараллельном движении твердого тела.
34. Запишите уравнения Лагранжа II рода.
35.К чему проводятся силы инерции точек твердого тела при плоском движении тела, имеющего плоскость материальной симметрии?
36.Как направлена и чему равна по величине сила инерции материальной точки?
37.Какие перемещения точек механической системы называются возможными?
38.Какие связи механической системы называются идеальными?
39.Что называется числом степеней свободы механической системы?
40.Элементарная работа и мощность силы. Мощность системы сил, приложенных к твердому телу.